MÉTODO DE LA DOBLE DIVISIÓN SINTÉTICA

El método de la doble división sintética es una aplicación directa del método de Newton-Raphson para resolver exclusivamente ecuaciones algebraicas (polinomios).

Por lo anterior la fórmula de recurrencia de método de Newton-Raphson, puede representarse en la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \quad \dots (1)$$

Donde $P(x)$ es un polinomio de la forma:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \dots (2)$$

Y el valor de $P(x)$ valuado para cuando $x = x_n$ puede determinarse considerando el residuo R que resulta de dividir $P(x)$ entre $(x - x_n)$:

$$P(x) = (x - x_n)Q(x) + R \quad \dots (3)$$

Y haciendo $x = x_n$ se obtiene:

$$P(x_n) = R \quad \dots (4)$$

Para obtener el denominador $P'(x_n)$, se deriva la expresión (3):

$$P'(x) = (x - x_n)Q'(x) + Q(x)$$

Haciendo $x = x_n$:

$$P'(x_n) = Q(x_n)$$

Donde $Q(x_n)$ puede determinarse como el residuo que resulta de dividir $Q(x)$ entre $(x - x_n)$, ya que:

$$Q(x) = (x - x_n)S(x) + R^*$$

Haciendo $x = x_n$:

$$Q(x) = R^* \quad \dots (5)$$

Sustituyendo las expresiones (4) y (5) en (1), se tendrá:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{R_n}{R_n^*} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (6)$$

Esta última ecuación define el método de Newton-Raphson para resolver ecuaciones algebraicas, donde R_n representa el residuo que resulta de dividir $P(x)$ entre $(x - x_n)$ en la n -ésima iteración y R_n^* representa el residuo que resulta de dividir $Q(x)$ entre $(x - x_n)$ también en la n -ésima iteración.

Ejemplo:

Obtener la raíz positiva de la siguiente ecuación algebraica con dos cifras decimales exactas:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$$

Aplicando la regla de los signos de Descartes:

RAICES	I	II
positivas	1	1
negativas	3	1
complejas	0	2
Total	4	4

Dado que el polinomio de la ecuación tiene coeficientes enteros se puede aplicar el teorema sobre posibles raíces racionales, con lo que se obtiene:

$$\frac{b}{c} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} b \text{ será factor de } a_n = |6| \\ c \text{ será factor de } a_0 = 1 \end{array}$$

Por lo que las posibles raíces racionales son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Probando por división sintética para valores positivos:

$$1 \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ & & & & & \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 3 & -3 \end{array}$$

$$2 \begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ & & & & & \\ \hline & 1 & 4 & 9 & 17 & 28 \end{array}$$

Debido a que se presenta un cambio de signo, se puede asegurar que la raíz positiva de la ecuación algebraica es irracional y se encuentra entre 1 y 2, para obtenerla se utilizará el método de la doble división sintética. El valor inicial x_0 será la media del intervalo en el cual se encuentra la raíz:

$$x_0 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

Utilizando la expresión (6) para $n = 0$:

$$x_1 = x_0 - \frac{R_0}{R_0^*}$$

Realizando la doble división sintética:

1.50	1.00	2.00	1.00	-1.00	-6.00	
		1.50	5.25	9.38	12.57	
	1.00	3.50	6.25	8.38	6.57	R_0
		1.50	7.50	20.63		
	1.00	5.00	13.75	29.01		R_0^*

Sustituyendo:

$$x_1 = 1.50 - \frac{6.57}{29.01} = 1.27$$

$$x_1 = 1.27$$

Aplicando reiteradamente la ecuación de recurrencia (6) se obtiene:

$$n = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{R_1}{R_1^*}$$

1.27	1.00	2.00	1.00	-1.00	-6.00	
		1.27	4.15	6.54	7.04	
	1.00	3.27	5.15	5.54	1.04	R_1
		1.27	5.76	13.86		
	1.00	4.54	10.91	19.40		R_1^*

$$x_2 = 1.27 - \frac{1.04}{19.40} = 1.21$$

$$x_2 = 1.21$$

$$n = 2;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{R_2}{R_2^*}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1.21 & 1.00 & 2.00 & 1.00 & -1.00 & -6.00 \\
 & & 1.21 & 3.88 & 5.90 & 5.93 \\
 \hline
 & 1.00 & 3.21 & 4.88 & 4.90 & -0.07 \\
 & & 1.21 & 5.34 & 12.37 & \\
 \hline
 & 1.00 & 4.42 & 10.22 & 17.27 & R_2^*
 \end{array}$$

$$x_3 = 1.21 - \frac{-0.071}{17.27} = 1.21$$

Como $x_2 = x_3$ se puede considerar que la raíz real positiva es:

$$R = 1.21$$

Con dos cifras decimales exactas.