Descomposición LU

INTRODUCCIÓN

1. D*escomposición LU.*

Se trata de otra importante herramienta que sirve para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones.

OBJETIVO GENERAL

- Comprender las diferentes formas de solucionar sistemas de ecuaciones lineales por medio de los métodos de descomposición LU versión Doolitle.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Proporcionar al estudiante una idea clara y comprensible del método de descomposición LU
- Mostrar cómo aplicar el método mencionado para facilitar la solución de sistemas de ecuaciones, y poder así programar dicho método en la computadora.

DESCOMPOSICIÓN LU

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Su nombre se deriva de las palabras inglesas "Lower" y "Upper", que en español se traducen como "Inferior" y "Superior". Estudiando el proceso que se sigue en la descomposición LU es posible comprender el por qué de este nombre, analizando cómo una matriz original se descompone en dos matrices triangulares, una superior y otra inferior.

La descomposición LU involucra solo operaciones sobre los coeficientes de la matriz [A], proporcionando un medio eficiente para calcular la matriz inversa o resolver sistemas de álgebra lineal.

Primeramente se debe obtener la matriz [L] y la matriz [U].

[L] es una matriz diagonal inferior con números 1 sobre la diagonal. [U] es una matriz diagonal superior en la que sobre la diagonal no necesariamente tiene que haber números 1.

El primer paso es descomponer o transformar [A] en [L] y [U], es decir obtener la matriz triangular superior [U] y la matriz triangular inferior [L].

PASOS PARA ENCONTRAR LA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (MATRIZ [U])

1. Hacer cero todos los valores abajo del pivote sin convertir este en 1.
2. Para lograr lo anterior se requiere obtener un factor el cual es necesario para convertir a cero los valores abajo del pivote.
3. Dicho factor es igual al número que se desea convertir en cero entre el número pivote.
4. Este factor multiplicado por -1 se multiplica luego por el pivote y a ese resultado se le suma el valor que se encuentra en la posición a cambiar (el valor en la posición que se convertirá en cero). Esto es:

- factor * pivote + posición a cambiar

PASOS PARA ENCONTRAR LA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR (MATRIZ [L])

Para encontrar la matriz triangular inferior se busca hacer ceros los valores de arriba de cada pivote, así como también convertir en 1 cada pivote. Se utiliza el mismo concepto de "factor" explicado anteriormente y se ubican todos los "factores" debajo de la diagonal según corresponda en cada uno.

Esquemáticamente se busca lo siguiente:

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{13} & l_{23} & 1 \end{pmatrix} \quad [U] = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Originalmente se tenía:

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Debido a que [A] = [L][U], al encontrar [L] y [U] a partir de [A] no se altera en nada la ecuación y se tiene lo siguiente:

$$[A] = [L][U]$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{13} & l_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si Ax = b, entonces LUx = b, de manera que Ax = LUx = b.

PASOS PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN LU

1. Obtener la matriz triangular inferior L y la matriz triangular superior U.
2. Resolver Ly = b (para encontrar y).
3. El resultado del paso anterior se guarda en una matriz nueva de nombre "y".
4. Realizar Ux = y (para encontrar x).
5. El resultado del paso anterior se almacena en una matriz nueva llamada "x", la cual brinda los valores correspondientes a las incógnitas de la ecuación matricial, (solución del sistema).

EJEMPLO 1 DE DESCOMPOSICIÓN LU

PROBLEMA: Encontrar los valores de x_1, x_2 y x_3 para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 = 9$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 = 7$$

$$X_1 + 2x_2 - x_3 = 12$$

NOTA: Recuérdese que si la matriz es 2x2 se hará 1 iteración; si es 3x3, 2 iteraciones; si es 4x4, 3 iteraciones; y así sucesivamente.

SOLUCIÓN:

	4	- 2	- 1			9
[A] =	5	1	- 1		[B] =	7
	1	2	- 1			12

ITERACIÓN 1

factor 1 = $(a_{21} / a_{11}) = 5 / 4 = 1.25 = l_{21}$

factor 2 = $(a_{31} / a_{11}) = 1 / 4 = 0.25 = l_{31}$

Encontrando [U]

fila 2 = - (factor 1) * (fila 1) + (fila 2)

fila 3 = - (factor 2) * (fila 1) + (fila 3)

$u_{11} = a_{11}$

$u_{12} = a_{12}$

$u_{13} = a_{13}$

$u_{21} = -(1.25) * (4) + (5) = 0$

$u_{22} = -(1.25) * (-2) + (1) = 3.5$

$u_{23} = -(1.25) * (-1) + (-1) = 0.25$

u_{31} = - (0.25) * (4) + (1) = 0

u_{32} = - (0.25) * (- 2) + (2) = 2.5

u_{33} = - (0.25) * (- 1) + (- 1) = - 0.75

	4	- 2	- 1
[U] =	0	3.5	0.25
	0	2.5	- 0.75

ITERACIÓN 2

factor 3 = (u_{32} / u_{22}) = 2.5 / 3.5 = 0.7142857143 = l_{32}

Encontrando [L]

	1	0	0
[L] =	Factor 1	1	0
	Factor 2	Factor 3	1

	1	0	0
[L] =	1.25	1	0
	0.25	0.7142857143	1

Encontrando [U]

fila 3 = - (factor 3) * (fila 2) + (fila 3)

u_{31} = - (2.5 / 3.5) * (0) + (0) = 0

u_{32} = - (2.5 / 3.5) * (3.5) + (2.5) = 0

u_{33} = - (2.5 / 3.5) * (0.25) + (- 0.75) = - 0.9285714286

	4	- 2	- 1
[U] =	0	3.5	0.25
	0	0	- 0.9285714286

Ahora ya se tiene la matriz [U] y la matriz [L].

El siguiente paso es resolver Ly = b para encontrar la matriz y. En pocas palabras es como que se pidiera resolver el siguiente sistema de ecuaciones, encontrando los valores de y_1, y_2 y y_3:

$$y_1 = 9$$
$$1.25y_1 + y_2 = 7$$
$$0.25y_1 + 0.7142857143y_2 + y_3 = 12$$

Al resolver el sistema anterior, se obtienen los siguientes valores para y_1, y_2 y y_3:

$$y_1 = 8.9999958604$$
$$y_2 = -4.2500046145$$
$$y_3 = 12.7857109172$$

El último paso es resolver Ux = y para encontrar la matriz x. En otras palabras es como que se pidiera resolver el siguiente sistema de ecuaciones, encontrando los valores de x_1, x_2 y x_3:

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 = 8.9999958604$$
$$3.5x_2 + 0.25x_3 = -4.2500046145$$
$$-0.9285714286x_3 = 12.7857109172$$

La solución del sistema es:

x1 = -1.30769342792116

x2 = -0.230770662099815

x3 = -13.7692287608251

Este es finalmente el valor de x_1, x_2 y x_3; es decir, la respuesta del ejercicio utilizando la descomposición LU.

EJEMPLO 2 DE DESCOMPOSICIÓN LU

PROBLEMA: Encontrar los valores de x_1, x_2 y x_3 para el siguiente sistema de ecuaciones:

11x1 – 3x2 – 2x3 = 18

5x1 -2x2 – 8x3 = 13

4x1 – 7x2 + 2x3 = 2

SOLUCIÓN:

	11	- 3	- 2			18
[A] =	5	- 2	- 8		[B] =	13
	4	- 7	2			2

ITERACIÓN 1

factor 1 = (a_{21} / a_{11}) = 5/11 = 0.4545454545

factor 2 = (a_{31} / a_{11}) = 4/11 = 0.3636363636

-

Encontrando [U]

fila 2 = - (factor 1) * (fila 1) + (fila 2)

fila 3 = - (factor 2) * (fila 1) + (fila 3)

$u_{11} = a_{11}$

$u_{12} = a_{12}$

$u_{13} = a_{13}$

u_{21} = - (0.4545454545) * (11) + (5) = 0

u_{22} = - (0.4545454545) * (- 3) + (- 2) = - 0.6363636365

u_{23} = - (0.4545454545) + (- 2) + (- 8) = - 7.0909090919

u_{31} = - (0.3636363636) * (11) + (4) = 0

u_{32} = - (0.3636363636) * (- 3) + (- 7) = - 5.909090909

u_{33} = - (0.3636363636) * (- 2) + (2) = 2.7272727272

	11	-3	-2
[U] =	0	- 0.6363636365	- 7.0909090919
	0	- 5.909090909	2.7272727272

Encontrando [L]

	1	0	0
[L] =	0.45454545	0	0
	0.36363636	0	0

ITERACIÓN 2

factor 3 = (u32/u22) = - 5.909090909 / - 0.6363636365 = 9.285714284

-

Encontrando [U]

fila 3 = - (factor 3) * (fila 2) + (fila 3)

a_{31} = - (9.285714284) * (0) + (0) = 0

a_{32} = - (9.285714284) * (- 0.6363636365) + (- 5.909090909) = 0

a_{33} = - (9.285714284) * (- 7.0909090919) + (2.7272727272) = 68.57142857

	11	- 3	- 2
[U] =	0	- 0.6363636365	- 7.0909090919
	0	0	68.57142857

Encontrando [L]

	1	0	0
[L] =	0.4545454545	1	0
	0.3636363636	9.285714284	1

Ahora ya se tiene la matriz [U] y la matriz [L]. El siguiente paso es resolver

Ly = b para encontrar la matriz y. En pocas palabras es como que se pidiera resolver el siguiente sistema de ecuaciones, encontrando los valores de y_1, y_2 y y_3:

$$y_1 = 18$$
$$0.4545454545y_1 + y_2 = 13$$
$$0.3636363636y_1 + 9.285714284y_2 + y_3 = 2$$

Al resolver el sistema anterior, se obtienen los siguientes valores para y_1, y_2 y y_3:

$$y_1 = 17.9995077868$$
$$y_2 = 4.8181765866$$
$$y_3 = - 49.2856843796$$

El último paso es resolver Ux = y para encontrar la matriz x. En otras palabras es como que se pidiera resolver el siguiente sistema de ecuaciones, encontrando los valores de x_1, x_2 y x_3:

$$
\begin{aligned}
11x_1 - \quad 3x_2 - \quad 2\,x_3 &= 17.9995077868 \\
-\,0.6363636365x_2 - 7.0909090919x_3 &= 4.8181765866 \\
68.57142857x_3 &= -\,49.2856843796
\end{aligned}
$$

La solución del sistema es:

x1 = 1.6249390480

x2 = 0.4375045020

x3 = - 0.7187500596

Este es finalmente el valor de x1, x2 y x3; es decir, la respuesta del ejercicio utilizando la descomposición LU.

BIBLIOGRAFÍA

1. C. Chapra, S.; P. Canale, R. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. (3ª ed.). McGrawHill.
2. Factorización LU. *Wikipedia*. Extraído el 22 Enero, 2007, de http://es.wikipedia.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n_LU