

1. MÉTODO DE LOS FACTORES CUADRÁTICOS

O MÉTODO DE LIN-BAIRSTOW

Al igual que el de la doble división sintética, este método es aplicable para resolver solamente ecuaciones algebraicas (polinomios).

El Método de los factores cuadráticos o método de Lin-Bairstow, permite obtener las raíces complejas de una ecuación algebraica, aunque es igual de eficiente para obtener raíces reales.

Sea la ecuación algebraica $P(x) = 0$, donde:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1.1)$$

Que tiene un factor cuadrático de la forma:

$$x^2 + px + q$$

Con lo que la expresión (1.1) se puede expresar como:

$$P(x) = (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} + \dots + b_{n-3}x + b_{n-2}) + Rx + S \quad (1.2)$$

También conocida como polinomio reducido.

Efectuando la multiplicación:

$$P(x) = b_0x^n + b_0px^{n-1} + b_0qx^{n-2} + b_1x^{n-1} + pb_1x^{n-2} + qb_1x^{n-3} + b_2x^{n-2} + pb_2x^{n-3} + qb_2x^{n-4} + \dots + b_{n-3}x^3 + pb_{n-3}x^2 + qb_{n-3}x + b_{n-2}x^2 + pb_{n-2}x + qb_{n-2} + Rx + S \quad (1.2)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias en los segundos miembros con la ecuación (1.1), entonces los coeficientes del polinomio reducido:

$$\begin{array}{ll}
a_0 = b_0 & b_0 = a_0 \\
a_1 = b_1 + pb_0 & b_1 = a_1 - pb_0 \\
a_2 = b_2 + pb_1 + qb_0 & b_2 = a_2 - pb_1 - qb_0 \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
a_{n-1} = R + pb_{n-2} - qb_{n-3} & R = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \\
a_n = S + qb_{n-2} & S = a_n - pb_{n-2}
\end{array}$$

Los coeficientes del polinomio reducido están dados por:

$$\begin{aligned}
b_k &= a_k - pb_{k-1} - qb_{k-2} \\
k &= 0, 1, 2, 3, \dots, (n-2) \\
b_{-1} &= b_{-2} = 0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Los coeficientes R y S se calculan:

$$\begin{aligned}
R &= a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \\
S &= a_n - qb_{n-2}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Los incrementos Δp y Δq se obtienen de:

$$\Delta p = \frac{R}{b_{n-2}} ; \quad \Delta q = \frac{S}{b_{n-2}} \tag{1.5}$$

Los nuevos valores de p y q, definidos como p^* y q^* se calculan como:

$$p^* = p + \Delta p ; \quad q^* = q + \Delta q \tag{1.6}$$

Donde p^* y q^* son los nuevos valores calculados. Considerando que estos valores están dados por (1.4) y (1.5) respectivamente se tiene:

$$p^* = \frac{a_{n-1} - qb_{n-3}}{b_{n-2}} ; \quad q^* = \frac{a_n}{b_{n-2}}$$

Sustituyendo en la expresión (1.6):

$$\Delta p = \frac{a_{n-1} - qb_{n-3}}{b_{n-2}} - p$$

Y

$$\Delta q = \frac{a_n}{b_{n-2}} - q$$

Simplificando:

$$\Delta p = \frac{a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}}{b_{n-2}}; \quad \Delta q = \frac{a_n - qb_{n-2}}{b_{n-2}}$$

Como el numerador de esas ecuaciones corresponde a las expresiones (1.4), entonces :

$$\boxed{\Delta p = \frac{R}{b_{n-2}}} \quad ; \quad \boxed{\Delta q = \frac{S}{b_{n-2}}}$$

(1.7)

Las expresiones (1.3), (1.4) y (1.7) definen el método de Lin-Bairstow. Para facilitar su aplicación se sugiere utilizar la siguiente tabla:

p =							
q =							
a ₀		b ₀					
a ₁		b ₁					
a ₂		b ₂					
⋮		⋮					
a _{n-1}		R					
a _n		S					
Δp =							
Δq =							

Tabla II.1

Ejemplo:

Obtener las raíces complejas de la siguiente ecuación algebraica con dos cifras decimales exactas:

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$$

Factorizando P(x) según 1.2:

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = (x^2 + px + q)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + Rx + S = 0 \quad (a)$$

Tomando como valores iniciales de p y q:

$$p = 0; \quad q = 0$$

b_0 , b_1 y b_2 se pueden obtener para $k = 0, 1$ y 2 respectivamente:

$$b_0 = a_0 = 1$$

$$b_1 = a_1 - pb_0 = -1$$

$$b_2 = a_2 - pb_1 - qb_0 = 6$$

R y S se obtienen como:

$$R = a_3 - pb_2 - qb_1 = -3$$

$$S = a_4 - qb_2 = 4$$

Por último:

$$\Delta p = \frac{R}{b_2} = \frac{-3}{6} = -0.50; \quad \Delta q = \frac{S}{b_2} = \frac{4}{6} = 0.67$$

Por lo tanto, p^* y q^* se obtienen como:

Sustituyendo esta primera iteración en la tabla (II.1)

p =		0		-0.50
q =		0		0.67
a₀	1	b₀	1	
a₁	-1	b₁	-1	
a₂	6	b₂	6	
a₃	-3	R	-3	
a₄	4	S	4	
delta p =		-0.50		
delta q =		0.67		

Tabla II.2

sustituyendo esta primera iteración en la tabla (II.1).

p =		0		-0.50
q =		0		0.67
a ₀	1	b ₀	1	
a ₁	-1	b ₁	-1	
a ₂	6	b ₂	6	
a ₃	-3	R	-3	
a ₄	4	S	4	
Δp =		-0.50		
Δq =		0.67		

Tabla II.2

Procediendo en forma similar, si el método converge, R y S tenderán a cero, así como Δp y Δq. El método se terminará de aplicar cuando la diferencia en valor absoluto entre los dos últimos valores calculados de p, así como los de q, sean menores o iguales que una tolerancia prefijada.

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -1 - (-0.50)(1) = -0.50$$

$$b_2 = 6 - (-0.50)(-0.50) - 0.67(1) = 5.08$$

$$R = -3 - (-0.50)(5.08) - 0.67(-0.50) = -0.13$$

$$S = 4 - (0.67)(5.08) = 0.60$$

$$\Delta p = \frac{-0.13}{5.08} = -0.02; \quad p^* = -0.50 - 0.02 = -0.52$$

$$\Delta q = \frac{0.60}{5.08} = 0.11; \quad q^* = 0.67 + 0.11 = 0.78$$

p =		0		-0.50	-0.52	-0.53	-0.53	-0.53
q =		0		0.67	0.78	0.80	0.81	0.81
a ₀	1	b ₀	1	1.00	1.00	1.00	1.00	
a ₁	-1	b ₁	-1	-0.50	-0.48	-0.47	-0.47	
a ₂	6	b ₂	6	5.08	4.97	4.95	4.94	
a ₃	-3	R	-3	-0.13	-0.04	0.00	0.00	
a ₄	4	S	4	0.60	0.12	0.04	0.02	
$\Delta p =$		-0.50		-0.02	-0.01	0.00	0.00	
$\Delta q =$		0.67		0.11	0.02	0.01	0.00	

TABLA II.3

Prosiguiendo en forma análoga, finalmente se obtiene la siguiente tabla:

p =		0		-0.50	-0.52	-0.53	-0.53	-0.53
q =		0		0.67	0.78	0.80	0.81	0.81
a ₀	1	b ₀	1	1.00	1.00	1.00	1.00	
a ₁	-1	b ₁	-1	-0.50	-0.48	-0.47	-0.47	
a ₂	6	b ₂	6	5.08	4.97	4.95	4.94	
a ₃	-3	R	-3	-0.13	-0.04	0.00	0.00	
a ₄	4	S	4	0.60	0.12	0.04	0.02	
Δp =		-0.50		-0.02	-0.01	0.00	0.00	
Δq =		0.67		0.11	-0.02	0.01	0.00	

TABLA II.3

donde $p = -0.53$ y $q = 0.81$ con dos cifras decimales exactas.

Sustituyendo los últimos valores de p , q , b_0 , b_1 , b_2 , R y S en (a):

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = (x^2 - 0.53x + 0.81)(x^2 - 0.47x + 4.94) + (0)x + 0.02 = 0$$

despreciando el residuo:

$$(x^2 - 0.53x + 0.81)(x^2 - 0.47x + 4.94) = 0$$

utilizando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$R_{1,2} = \frac{0.53 \pm \sqrt{(-0.53)^2 - 4(1)(0.81)}}{2(1)}$$

por lo tanto:

$$R_1 = 0.27 + 0.86i$$

$$R_2 = 0.27 - 0.86i$$

y:

$$R_{3,4} = \frac{0.47 \pm \sqrt{(-0.47)^2 - 4(1)(4.94)}}{2(1)}$$

por lo tanto:

$$R_3 = 0.24 + 2.21i$$

$$R_4 = 0.24 - 2.21i$$