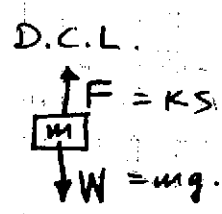
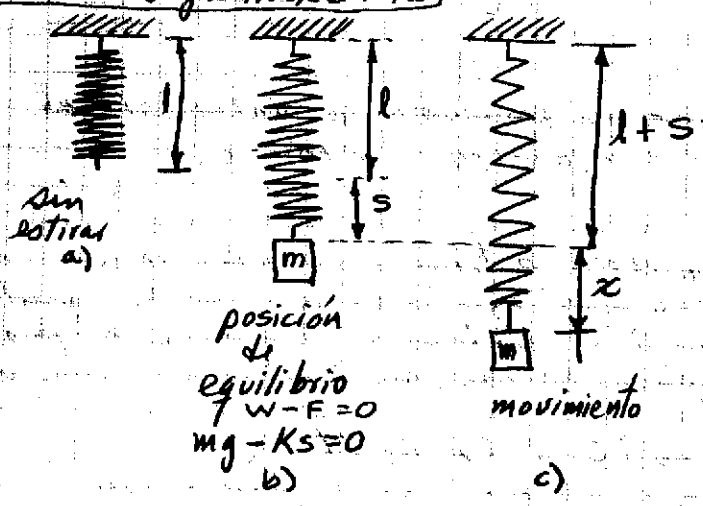


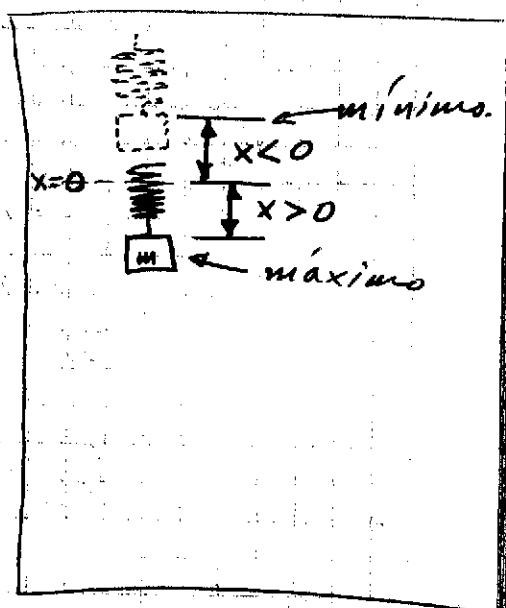
CAPITULO 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN: MODELOS DE MOVIMIENTO VIBRATORIO.

5.1 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE. Ley de Hooke. $F = Ks$ $ay'' + by' + cy = f(t)$.



$a = \frac{d^2x}{ds^2}$



$\Sigma F = ma$: 2ª ley de Newton.

$\Sigma F = W - F$

$W - F = ma$

$mg - k(s+x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$

$mg - ks - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$ ①

$\frac{m d^2x}{dt^2} + kx = 0$

② $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ Ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado o movimiento armónico simple.

si $\omega^2 = \frac{k}{m}$

③ $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ condiciones iniciales $x(0) = \alpha$
 $x'(0) = \beta$ ④

si $\alpha > 0$ (parte un punto por debajo de la posición de equilibrio) $\beta < 0$ (velocidad dirigida hacia arriba) $\left[\begin{matrix} \text{si } \alpha < 0 \text{ y } \beta = 0 \\ \text{se queda desde un punto que se encuentra a unidades arriba de la posición de equilibrio} \end{matrix} \right]$ (reposo), ..., etc.

Solución $r^2 + \omega^2 = 0$ ec. aux.

$r^2 = -\omega^2$

$r = \pm \sqrt{-\omega^2}$

$r = \pm i\omega$

⑤ $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = periodo natural

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ = frecuencia natural.

ω = "frecuencia circular" de las vibraciones u oscilaciones

$\omega = 3$
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$

Por ejemplo, para $x(t) = 2 \cos 3t - 4 \sin 3t$, el periodo es $\frac{2\pi}{3}$ y la frecuencia es $\frac{3}{2\pi}$. Los valores anteriores significan que la gráfica de $x(t)$ se repite cada $2\pi/3$ unidades. el último valor significa que existen 3 ciclos cada 2π , o equivalentemente, la masa realiza $3/(2\pi)$ oscilaciones completas por unidad de tiempo.

EJEMPLO 1 Resolver e interpretar el problema de valor inicial

$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0, \quad x(0) = 10, \quad x'(0) = 0.$

Solución:

El problema equivale a tirar hacia abajo de una masa fijada a un resorte 10 unidades por debajo de la posición de equilibrio, deteniéndola ahí, hasta $t=0$, y soltándola después a partir de un estado de reposo. aplicando las condiciones iniciales a la solución

$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$
 $x(0) = 10 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 10$

$\therefore x(t) = 10 \cos 4t + C_2 \sin 4t$

$\frac{dx}{dt} = -40 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t$

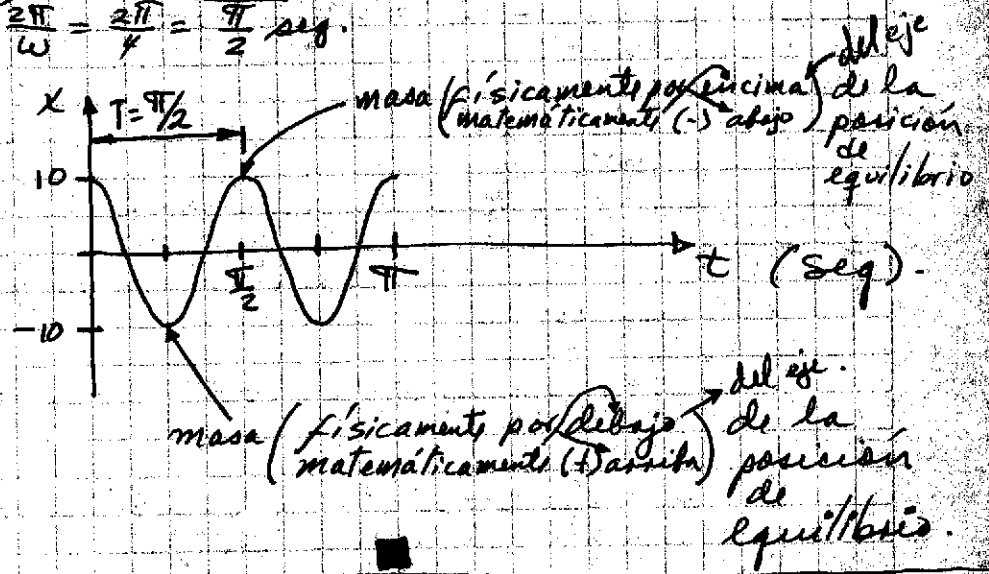
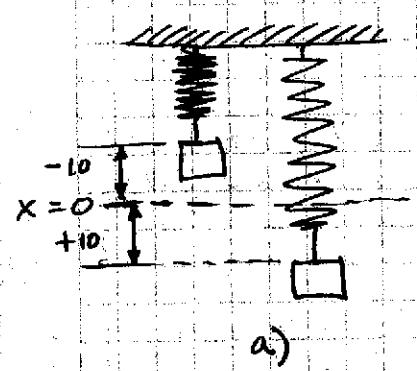
$x'(0) = 0 = 4C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0$

$\therefore$ la ecuación de movimientos es:

$x(t) = 10 \cos 4t.$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ seg.}$

$\omega = 4 \Rightarrow$



EJEMPLO 2

Una masa que pesa 2 lb estira un resorte 6 pulg. Dicha masa se suelta en $t=0$ desde un punto que se encuentra a 8 pulg. por debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de $1/3$ pie/s. Determine la función $x(t)$ que describe el movimiento libre resultante.

Solución: Puesto que se está usando el sistema de unidades inglesas de ingeniería, las magnitudes dadas en pulgadas deben expresarse en pies:

$$\begin{cases} 6 \text{ pulg} = \frac{1}{2} \text{ pie} \\ 8 \text{ pulg} = \frac{2}{3} \text{ pie} \end{cases}$$

además, se deben convertir las unidades de peso dadas en libras a unidades de masa. A partir de $m = \frac{W}{g}$ se tiene:

$$m = \frac{2 \text{ lbs}}{32 \frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}} = \frac{1}{16} \text{ slugs.}$$

También, a partir de la Ley de Hooke:

$$F = Kx$$

$$2 \text{ lbs} = K \left(\frac{1}{2} \text{ pie} \right) \Rightarrow K = 4 \frac{\text{lbs}}{\text{pie}}$$

Por lo tanto:

$$ma = -Kx, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{1}{16} \frac{d^2x}{dt^2} = -4x, \quad \text{mult por 16:}$$

$$\text{o sea: } \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$$

$$x(0) = \frac{2}{3} \text{ pie}, \quad x'(0) = -\frac{4}{3} \frac{\text{pie}}{\text{s}}$$

donde el signo negativo en la última condición es una consecuencia del hecho de que la masa se le proporciona una velocidad inicial con dirección negativa, esto es, dirigida hacia arriba.

Ahora bien, $\omega^2 = 64$, $\omega = 8$, de modo que la solución gen. de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t$$

aplicando las condiciones iniciales a (6), se obtiene:

$$x(0) = \frac{2}{3} = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{2}{3}}$$

$$x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t + C_2 \sin 8t$$

$$x'(t) = -\frac{16}{3} \sin 8t + 8C_2 \cos 8t$$

$$x'(0) = -\frac{4}{3} = -\frac{16}{3} \cdot 0 + 8C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{1}{6}}$$

Así, la ecuación de movimiento es:

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{6} \sin 8t} \quad (7)$$

Nota: Desafortunadamente, es común que no se haga una distinción clara entre peso y masa. Así, a menudo se habla del movimiento de una masa o sujeta a un resorte y también, del movimiento de un peso sujeto a un resorte.

FORMA ALTERNATIVA DE $x(t)$

Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la amplitud real "A" de las oscilaciones libres no se obtiene en forma inmediata de la ec. (5).

Por ejemplo, aunque la masa en el

Ejemplo 2 es esencialmente desplazada $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ — (5)
 $\frac{2}{3}$ de pie fuera de la posición de equilibrio, la amplitud de las oscilaciones es un número mayor de $\frac{2}{3}$. Por lo que, a menudo conviene transformar una solución de la forma (5) en una forma más simple.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{fase}$$

y donde ϕ es un ángulo de fase definido por

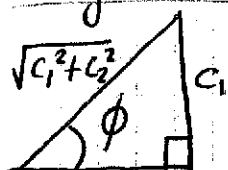


fig. 5.5 c_2

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos \phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned} \right\} \tan \phi = \frac{c_1}{c_2} \quad (9)$$



Para verificar esto, desarrollemos (8) mediante la fórmula del seno de una suma de ángulos:

del granville pág. 5.
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$A \sin(\omega t + \phi) = A \sin \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \sin \phi$$

$$= A \sin \phi \cos \omega t + A \cos \phi \sin \omega t \quad (10)$$

a partir de la figura 5.5 se deduce que si ϕ se define como

$$\sin \phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \quad \cos \phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A}$$

entonces (10) se transforma en

$$A \left(\frac{c_1}{A} \right) \cos \omega t + A \left(\frac{c_2}{A} \right) \sin \omega t = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = x(t).$$

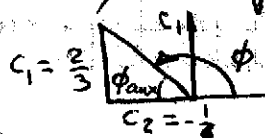
EJEMPLO 3

En vista de la presentación anterior, se puede escribir la solución (7) del ejemplo 2 alternativa como:

$$x(t) = A \sin(8t + \phi)$$

la amplitud está dada por

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{16+1}{36}} = \frac{1}{6} \sqrt{17} \approx 0.687 \text{ pie}$$



$$\phi_{aux} = \tan^{-1} \left| \frac{2/3}{-1/6} \right| = \tan^{-1} \left(\frac{2/3}{1/6} \right) = \tan^{-1} 4 = 1.3258 \text{ rad.}$$

$$\phi = \pi - \phi_{aux} = 1.816 \text{ rad.} \quad \therefore x(t) = \frac{1}{6} \sqrt{17} \sin(8t + 1.816) \quad (11)$$

Recordatorio
 $x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{6} \sin 8t$ (7)

Recordatorio

pág. 212

La forma (8) es muy útil, puesto que es fácil encontrar los valores de tiempo para los cuales la gráfica de $x(t)$ cruza el eje t positivo.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

(la recta $x=0$ horizontal)

Obsérvese que $\sin(\omega t + \phi) = 0$ cuando $\omega t + \phi = n\pi$

donde n es un entero no negativo.

EJEMPLO 4

Para el movimiento descrito por $x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6} \sin(8t + 1.816)$, hallar el primer valor del tiempo para el cual la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo físicamente.

Solución:

Los valores $t_1, t_2, t_3, \dots$, para los cuales

$$\sin(8t + 1.816) = 0$$

están determinados por

$$8t_1 + 1.816 = \pi$$

$$8t_1 = \pi - 1.816$$

$$t_1 = \frac{1}{8}(\pi - 1.816)$$

$$t_1 = 0.166 \text{ seg.}$$

$$8t_2 + 1.816 = 2\pi$$

$$t_2 = \frac{1}{8}(2\pi - 1.816)$$

$$t_2 = 0.558 \text{ seg.}$$

$$8t_3 + 1.816 = 3\pi$$

$$t_3 = \frac{1}{8}(3\pi - 1.816)$$

$$t_3 = 0.951 \text{ seg.}$$

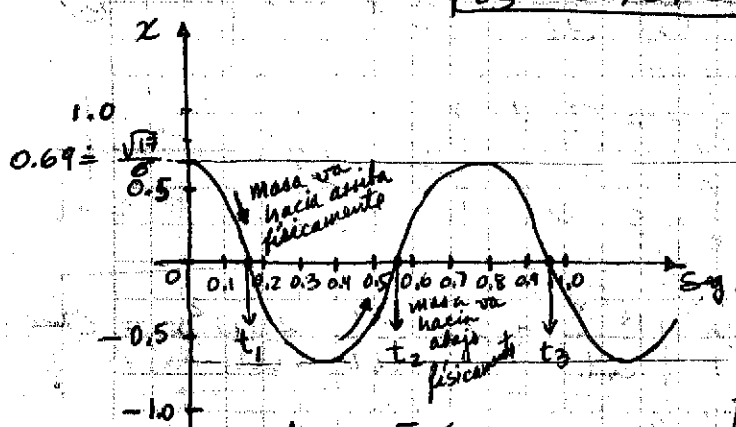


fig. 5.6

La figura 5.6 muestra que la masa pasa por $x=0$ por primera vez, en dirección hacia arriba matemáticamente, hacia abajo físicamente, (esto es, hacia $x > 0$), en $t_2 = 0.558 \text{ seg.}$

Pendientes problemas (BLOQUE Ejerc's) 5.1 pág 213

pág. 216

5.2 MOVIMIENTO AMORTIGUADO.

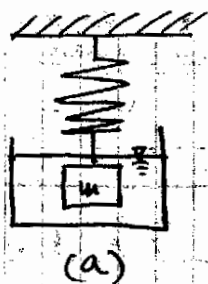
La descripción del movimiento armónico libre es un tanto igual puesto que el movimiento descrito por la ecuación (2) de la sección 5.1 supone que no actúan fuerzas retardadoras sobre la masa en movimiento.

Recordatorio

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m}x = 0 \quad (2)$$

A menos que la masa esté suspendida en un vacío perfecto, existirá por lo menos una fuerza opuesta debida al medio que la rodea. Por ejemplo, como lo muestra la figura 5.8, la masa m podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un mecanismo de amortiguación.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO CON AMORTIGUACIÓN



(a)



(b)

Pistón
medio
viscoso

D.C.L.

En los estudios de mecánica, se supone que las fuerzas de amortiguación que actúan sobre un cuerpo son proporcionales a una potencia de la velocidad instantánea. En particular, en el estudio que sigue, se supondrá que esta fuerza está dada por un múltiplo constante de $\frac{dx}{dt}$ *.

Cuando no actúan otras fuerzas exteriores sobre el sistema, se tiene, por la segunda ley de Newton, que:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} \quad \text{--- (1)}$$

Donde " β " es una constante de amortiguación positiva y el signo negativo se debe a la fuerza amortiguadora que actúa en dirección opuesta al movimiento.

Dividiendo (1) entre la masa " m ", se obtiene la ecuación diferencial del movimiento libre amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{Si: } \left. \begin{aligned} \frac{\beta}{m} &= 2\lambda \\ \frac{k}{m} &= \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\begin{aligned} \uparrow F &= -kx \\ \uparrow F_A &= -\beta v \\ \Sigma F &= ma \\ \Sigma F &= -kx - \beta v \\ ma &= -kx - \beta v \end{aligned}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} \quad \text{--- (1)}$$

El símbolo 2λ se usa sólo por conveniencia algebraica puesto que la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y por lo tanto las correspondientes raíces son:

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4(1)\omega^2}}{2(1)} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}{2}$$

$$m_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

* En muchos casos, como en los problemas de hidrodinámica, la fuerza de amortiguación es proporcional a: $(\frac{dx}{dt})^2$.

Según el signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$, se pueden distinguir tres casos posibles. Puesto que cada solución contiene el factor de amortiguación $e^{-\lambda t}$, siendo $\lambda > 0$, los desplazamientos de la masa se vuelven insignificantes para valores de t tiempos grandes.

CASO I. $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. En esta situación se dice que el sistema está sobre-amortiguado, puesto que el coeficiente de amortiguamiento λ es grande comparado con la constante k del resorte. La correspondiente solución de (3) es:

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{[-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}]t} + C_2 e^{[-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}]t}$$

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t} e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\lambda t} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t}) \quad (5)$$

Esta ecuación representa un movimiento suave y no oscilatorio. La Figura 5.9 muestra dos gráficos posibles $x(t)$.

CASO II.

$\lambda^2 - \omega^2 = 0$. Se dice que el sistema está críticamente amortiguado, ya que una pequeña disminución de la fuerza de amortiguación produciría un movimiento oscilatorio. La solución general de (3) es

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 t e^{m_1 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t) \quad (6)$$

algunas graficas de un movimiento típico se proporcionan en la figura 5.10. Observe que el movimiento es bastante similar al de un sistema sobre-amortiguado. La ecuación (6) muestra también que la masa puede pasar a lo más una vez por la posición de equilibrio*.

$\lambda^2 - \omega^2 < 0$. En este caso se dice que el sistema está subamortiguado, puesto que el coeficiente de amortiguación es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces m_1 y m_2 son ahora complejas:

$$m_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} i$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación (3) es:

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + C_2 \operatorname{Sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t) \quad (7)$$

Como se indica en la fig. 5.11, el movimiento descrito por (7) es oscilatorio, pero debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$ las amplitudes de la oscilación $\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

* Un examen de las derivadas de (5) y (6) mostraría que estas funciones pueden tener, a lo más, un máximo relativo o un mínimo relativo para $t > 0$.

EJEMPLO 1 Es fácilmente verificable que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0; x(0) = 1, x'(0) = 1,$$

$$\begin{aligned} 2\lambda &= 5 & \omega^2 &= \frac{k}{m} \\ \lambda &= \frac{5}{2} & \omega^2 &= 4 \\ \lambda^2 &= \frac{25}{4} & \omega &= 2 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - \omega^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow \text{Sobreamortiguado.}$$

$$m^2 + 5m + 4 = 0 \text{ ec. aux}$$

$$(m+1)(m+4) = 0$$

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -4$$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

$$x(0) = 1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1$$

$$1 = C_1 + C_2 \quad \text{--- (1)}$$

$$x'(t) = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-4t}$$

$$x'(0) = 1 = -C_1 - 4C_2 \quad \text{--- (2)}$$

$$\Sigma \text{ (1) y (2): } 2 = -3C_2$$

$$C_2 = -\frac{2}{3} \quad \checkmark \text{ OK.}$$

$$\text{de (1): } C_1 = 1 - C_2 = 1 - (-\frac{2}{3}) = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$C_1 = \frac{5}{3} \quad \checkmark \text{ OK.}$$

$$x(t) = \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-4t} \quad \text{--- (8)}$$

El problema puede interpretarse como una representación del sistema sobreamortiguado de una masa sujeta a un resorte. La masa parte desde una posición que se encuentra 1 unidad por debajo físicamente de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 pie/s.

Para graficar $x(t)$ encuentres el valor de t para el cual la función tiene un extremo, esto es, el valor de t para el cual la primera derivada (velocidad) es cero. Por máximos y mínimos:

Derivando (8)

$$x'(t) = -\frac{5}{3} e^{-t} + \frac{8}{3} e^{-4t} = 0$$

dividiendo $\div e^{-t}$:

$$-\frac{5}{3} + \frac{8}{3} e^{-3t} = 0$$

$$\frac{8}{3} e^{-3t} = \frac{5}{3}$$

$$8e^{-3t} = 5$$

$$\frac{8}{5} = e^{3t} \quad \checkmark$$

$$\ln \frac{8}{5} = 3t$$

$$t = \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} = 0.1567 \quad \text{--- (9)}$$

Por nuestra intuición física, y por la prueba de la primera derivada, se deduce que $x(0.157) = 1.069$ pies es realmente un máximo. En otras palabras, la masa alcanza un desplazamiento máximo de 1.069 pie por debajo de la posición de equilibrio.

Se debe averiguar también si la gráfica cruza el eje t , esto es, saber si la masa pasa por la posición de equilibrio. Esto no puede suceder en este caso puesto que la ecuación $x(t) = 0$, o sea $e^{3t} = \frac{2}{5}$, tiene la solución físicamente irrelevante $3t = \ln \frac{2}{5}$

$$x(t) = \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-4t} = 0$$

$$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} e^{-3t} = 0$$

$$5 = 2 e^{-3t}$$

$$e^{3t} = \frac{2}{5}$$

tiene la solución físicamente irrelevante $3t = \ln \frac{2}{5}$

$$t = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} = -0.3054 \quad \checkmark \text{ OK.}$$

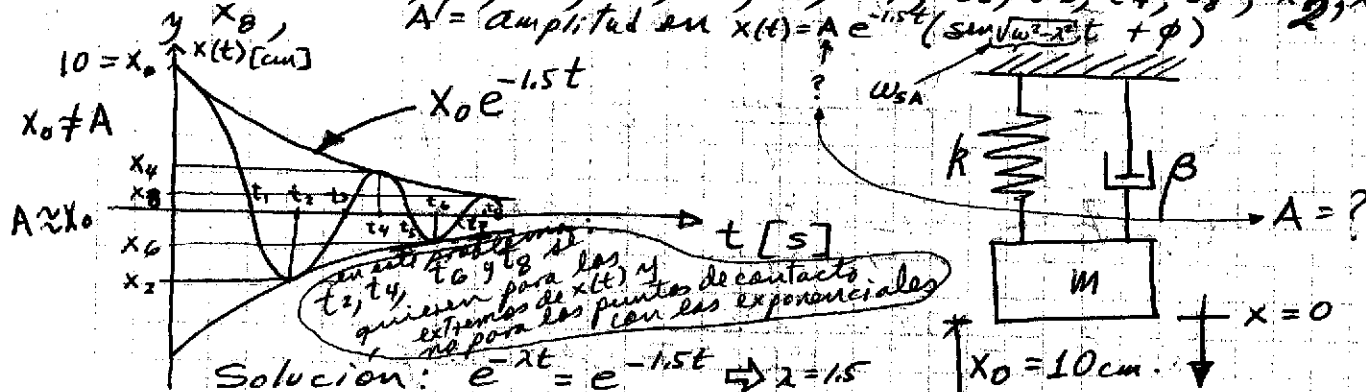
continúa en pag (6)

(PARENTESIS)

5

Probl. N° 2 Dinámica (Juan Carlos Villareal).

En el sistema que se muestra, $m = 1 [Kg]$ y $\omega_n = \omega_{natural}$
 $\omega_n = 12.48 [s^{-1}]$, por otro lado se le jala 10 cm hacia abajo, estando la masa inicialmente en reposo, y se tiene que la gráfica de $x(t)$. vs. t , es la que se muestra, obtén $k, \beta, x, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, x_2, x_4, x_6$
 $A = \text{amplitud en } x(t) = A e^{-\lambda t} (\sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi)$



Solución: $e^{-\lambda t} = e^{-1.5t} \Rightarrow \lambda = 1.5$

$$2\lambda = \frac{\beta}{m} \quad \text{--- ①} \Rightarrow \beta = 2m\lambda = 2(1)(1.5) = 3; \quad \boxed{\beta = 3}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{--- ②} \quad k = m\omega_n^2 = (1)(12.48)^2 = 155.8 \frac{Kg}{seg^2} = k$$

Caso III $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ Subamortiguado.

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t)$$

$$x(t) = e^{-1.5t} (C_1 \cos \sqrt{155.8 - (1.5)^2} t + C_2 \sin \sqrt{155.8 - 2.25} t)$$

$$x(t) = e^{-1.5t} (C_1 \cos 12.39t + C_2 \sin 12.39t)$$

$$x(0) = 10 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 10}$$

$$x(t) = e^{-1.5t} (10 \cos 12.39t + C_2 \sin 12.39t)$$

$$x'(t) = e^{-1.5t} (-123.9 \sin 12.39t + 12.39 C_2 \cos 12.39t) - 1.5 e^{-1.5t} (10 \cos 12.39t + C_2 \sin 12.39t)$$

$$x'(0) = 0 = 12.39 C_2 \cdot 1 - 1.5(10) \cdot 1$$

$$0 = 12.39 C_2 - 15$$

$$C_2 = \frac{12.39}{15}$$

$$C_2 = 0.8260$$

$$\omega_{SA} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$x(t) = e^{-1.5t} (10 \cos 12.39t + 0.826 \sin 12.39t)$$

$$y(t) = C_1 \cos \omega_{SA} t + C_2 \sin \omega_{SA} t$$

$$C_1 = 10, C_2 = 0.826, A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{10^2 + 0.826^2} = 10.03 \text{ cm} = A$$

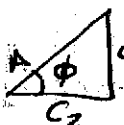
$\omega_{SA} = \omega_{subamortiguado}$

$$y(t) = A \sin(\omega_{SA} t + \phi)$$

$$\phi = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \arctan \frac{10}{0.826} = 1.488 \text{ rad.} \quad \frac{5}{0.2}$$

$$y(t) = 10.03 \sin(12.39t + 1.488)$$

$$x(t) = e^{-1.5t} 10.03 \sin(12.39t + 1.488)$$



(5)

(PARÉNTESIS)

$$x(t) = e^{-1.5t} 10.03 \operatorname{Sen}(12.39t + \overset{\phi}{1.488}) \checkmark \underline{\text{OK}}$$

$$x(t) = 0 \Rightarrow \operatorname{Sen}(12.39t + 1.488) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi = n\pi \leftarrow \text{pag 220}$$

$$12.39 \tau_n + 1.488 = n\pi$$

$$\text{si } n=0 \quad \tau_n = \frac{-1.488}{12.39} = -0.12$$

OK

$$\tau_n = \frac{n\pi - 1.488}{12.39}$$

$$t_1 = \tau_1 = \frac{1\pi - 1.488}{12.39} = 0.1335 \text{ seg.}$$

$$t_3 = \tau_2 = \frac{2\pi - 1.488}{12.39} = 0.3870 \text{ seg.}$$

$$t_5 = \tau_3 = \frac{3\pi - 1.488}{12.39} = 0.6405 \text{ seg.}$$

$$t_7 = \tau_4 = \frac{4\pi - 1.488}{12.39} = 0.8941 \text{ seg.}$$

Otra forma

$$x(t) = 10 e^{-1.5t} (\cos 12.39t + 0.0826 \operatorname{Sen} 12.39t)$$

$$x(t) = 0 \Rightarrow \cos 12.39t + 0.0826 \operatorname{Sen} 12.39t = 0$$

$$\cos 12.39t = -0.0826 \operatorname{Sen} 12.39t$$

$$\frac{\operatorname{Sen} 12.39t}{\cos 12.39t} = \frac{1}{-0.0826}$$

$$\tan 12.39t = -12.11$$

$$12.39t = -1.488$$

$$12.39 \tau_n = -1.488 + n\pi$$

$$\tau_n = \frac{n\pi - 1.488}{12.39} \text{ que es la misma ecuación.}$$

$$\therefore x(t) = 10 e^{-1.5t} (\cos 12.39t + 0.0826 \operatorname{Sen} 12.39t) \checkmark$$

o bien

$$x(t) = 10.03 e^{-1.5t} \operatorname{Sen}(12.39t + 1.488) \checkmark \underline{\text{OK}}$$

aplicando máximos y mínimos:

$$x'(t) = 10.03 \left[e^{-1.5t} \overset{\text{WSA}}{[\cos(12.39t + 1.488)]} 12.39 + [\operatorname{Sen}(12.39t + 1.488)] e^{-1.5t} (-1.5) \right]$$

$$x'(t) = 10.03 \left[12.39 e^{-1.5t} \cos(12.39t + 1.488) - 1.5 e^{-1.5t} \operatorname{Sen}(12.39t + 1.488) \right]$$

$$x'(t) = 10.03 e^{-1.5t} [12.39 \cos(12.39t + 1.488) - 1.5 \operatorname{Sen}(12.39t + 1.488)]$$

Nota: Si es necesario poner τ_n ya que los subíndices de t no corresponden con los subíndices de τ_n .

ultimo renglon
 $0.8941 \div 0.9 = 2.59$
 0.19

(PARENTESIS)

6

tenemos máximos y mínimos en $x'(t) = 0$

$$0 = 10.03e^{-1.5t} [12.39 \cos(12.39t + 1.488) - 1.5 \sin(12.39t + 1.488)]$$

$$0 = 12.39 \cos(12.39t + 1.488) - 1.5 \sin(12.39t + 1.488)$$

$$1.5 \sin(12.39t + 1.488) = 12.39 \cos(12.39t + 1.488)$$

$$\tan(12.39t + 1.488) = \frac{12.39}{1.5} = 8.26$$

$$12.39t + 1.488 = 1.450 \text{ rad.}$$

$$12.39t + 1.488 = 1.45 + n\pi$$

$$t_n = \frac{1.45 + n\pi - 1.488}{12.39}$$

$$\text{si } n = 0$$

$$t_0 = \frac{1.45 - 1.488}{12.39}$$

$$t_0 = -0.003 \text{ seg.}$$

$$\text{si } n = 1$$

$$t_1 = \frac{1.45 + \pi - 1.488}{12.39}$$

$$t_2 = t_1 = 0.2505 \text{ seg.}$$

$$\text{si } n = 2$$

$$t_2 = \frac{1.45 + 2\pi - 1.488}{12.39} \approx 0.5$$

$$t_4 = t_2 = 0.5041 \text{ seg.}$$

$$\text{si } n = 3$$

$$t_3 = \frac{1.45 + 3\pi - 1.488}{12.39}$$

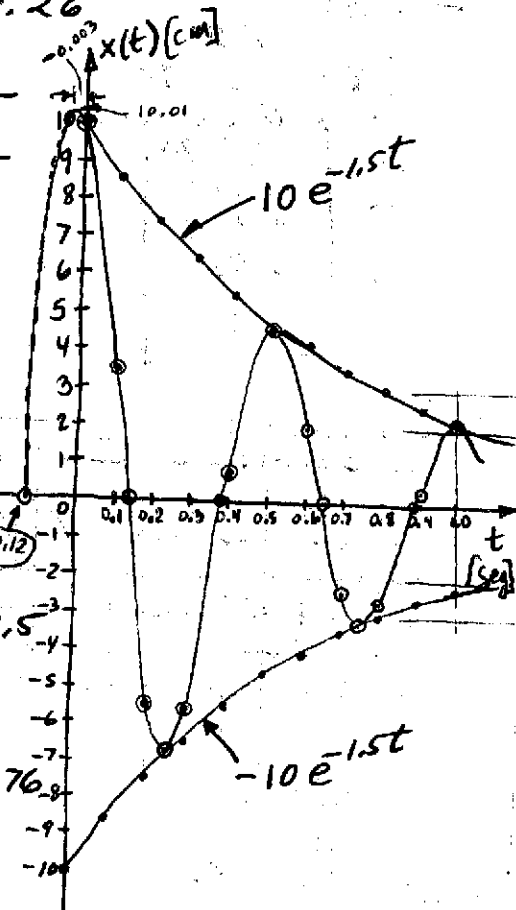
$$t_6 = t_3 = 0.7576 \text{ seg.}$$

$$\text{si } n = 4$$

$$t_4 = \frac{1.45 + 4\pi - 1.488}{12.39}$$

$$t_8 = t_4 = 1.011 \text{ seg.} \approx 1.00$$

estas si son los
puntos de los extremos
relativos
mas no los
puntos de
contacto
con las
curvas
exponenciales



tabulando $x(t) = 10e^{-1.5t} (\cos 12.39t + 0.0826 \sin 12.39t)$

t	$10e^{-1.5t}$	x(t)
-0.003	10.05	10.01 ← máximo (no tiene significado físico)
0	10.	10.00
0.1	8.61	3.48
0.1335	8.19	0.003
0.2	7.41	-5.46
0.2505	6.87	-6.84 ← mínimo
0.3	6.38	-5.64
0.3870		
0.4	5.49	0.88
0.5	4.72	4.67 ← máximo
0.6	4.07	1.97
0.6405		
0.7	3.50	-2.36
0.7576	3.21	-3.20 ← mínimo
0.8	3.01	-2.78

t	$10e^{-1.5t}$	x(t)
1.0	2.23	2.16 ← máximo

OK ✓ bien resueltos

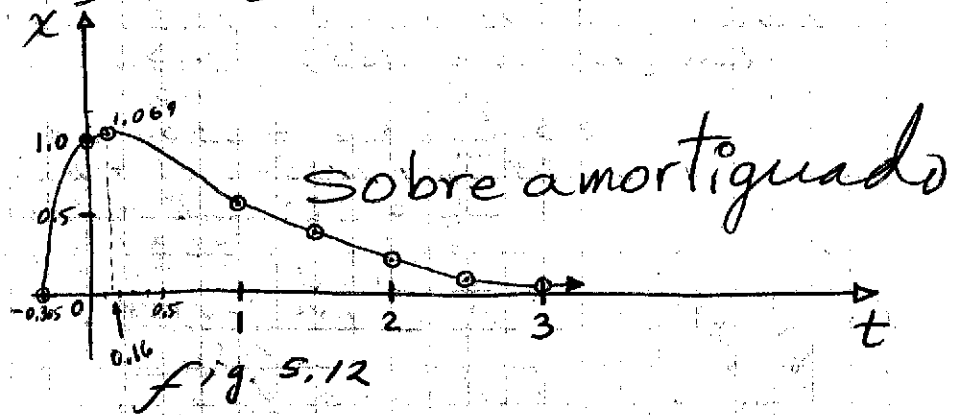
(FIN PARENTESIS) FIN PROBLEMA.

6' ^{pág 218} **CAP. 5** APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

Viene de pág (4)

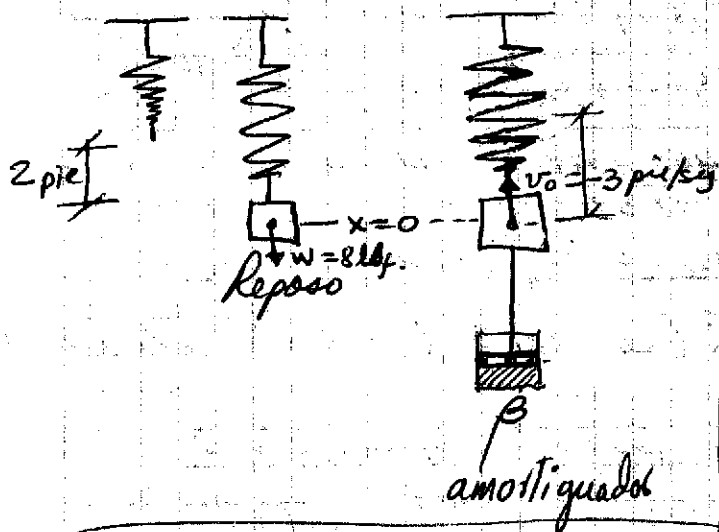
CONT. EJ. 1. → La gráfica de $x(t)$ junto con otros datos pertinentes se proporciona en la figura 5.12.

t	x(t)	$z(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$
-0.305	0	
0	1.0	
0.16	1.069	
1	0.601	
1.5	0.370	
2	0.225	
2.5	0.137	
3	0.083	



EJEMPLO 2.

Un peso de 8 lbf estira un resorte 2 pie. Supóngase que una fuerza de amortiguación numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema; determine la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pie/s.



Solución:
Por la ley de Hooke tenemos:

$$F = kx$$

$$8 \text{ lbf} = k(2)$$

$$k = \frac{8 \text{ lbf}}{2 \text{ pie}} = 4 \frac{\text{lbf}}{\text{pie}}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{8 \text{ lbf}}{32 \frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}} = \frac{1}{4} \text{ slug}$$

Así la ecuación diferencial del movimiento es: $m x'' + kx + 2 \frac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2 \frac{dx}{dt}$$

o bien: $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0$ — (9)

Las condiciones iniciales son: $x(0) = 0$, $x'(0) = -3$
ahora bien, la ecuación auxiliar de (9) es:

$$m^2 + 8m + 16 = 0$$

$$(m + 4)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -4$$

Por lo tanto, el sistema está críticamente amortiguado, y:

$$2\lambda = 8 = \beta = 2 \quad \omega^2 = k/m = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16 \quad \omega = 4 \quad \therefore \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

$$x(0) = 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$x'(t) = c_2 (t e^{-4t} (-4) + e^{-4t} (1))$$

$$x'(t) = c_2 e^{-4t} (1 - 4t)$$

$$x'(0) = -3 = c_2 \cdot 1 (1 - 4 \cdot 0) = c_2 \Rightarrow c_2 = -3$$

Así la ec. de movimiento es:

$$x(t) = -3t e^{-4t} \quad (11)$$

Para trazar la gráfica $x(t)$ se procede como en el ejemplo 1:

$$x'(t) = -3(-4t e^{-4t} + e^{-4t})$$

$$x'(t) = -3e^{-4t}(1 - 4t) = 0$$

$$1 - 4t = 0$$

$$4t = 1$$

$$t = \frac{1}{4}$$

tiene un mínimo.

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{4}\right)e^{-4\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{3}{4}e^{-1} = -\frac{3}{4e} = -0.2759 \text{ pie}$$

t	$x(t) = -3t e^{-4t}$
0	0
1/8	-0.23
1/4	-0.28
3/8	-0.25
1/2	-0.20
1/6	-0.15

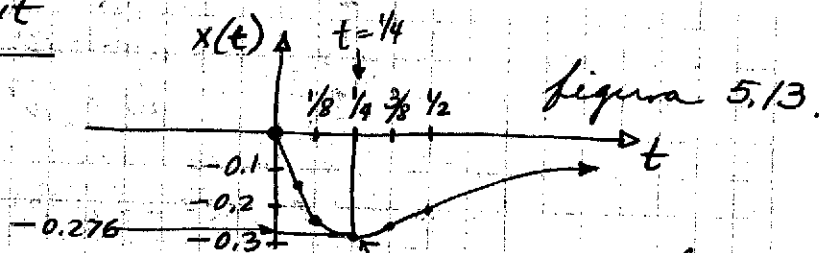
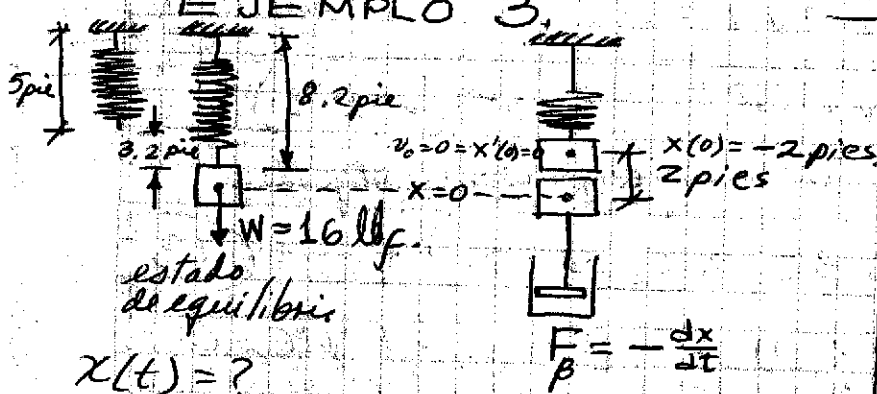


figura 5.13.

altura máxima por encima físicamente de la posición de equilibrio.

Nota: Es tal como funciona un buen amortiguador de coche.

EJEMPLO 3



Un peso de 16 lb se sujeta a un resorte de 5 pie de largo. En estado de equilibrio, el resorte mide 8.2 pie. Si el peso se empuja hacia arriba y se suelta a partir del reposo, desde un punto que está 2 pie sobre la posición de equilibrio, determinar los desplazamientos $x(t)$ sabiendo además que el medio ofrece una resistencia numérica igual a la velocidad instantánea.

Solución:

El alargamiento experimentado por el resorte después de que se le sujeta el peso es de $8.2 - 5 = 3.2$ pie, luego por la ley de Hooke se obtiene que $16 \text{ lb} = k(3.2 \text{ pie}) \Rightarrow k = \frac{16 \cdot 5}{3.2} \frac{\text{lb}}{\text{pie}}; [k = 5 \frac{\text{lb}}{\text{pie}}]$.

(7) ^{pag 219, 220}

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

además:

^{COA}
^{EJ}
^{pag 21}
 $m = \frac{W}{g} \Rightarrow m = \frac{16 \text{ lbf}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{seg}^2}} = \frac{1}{2} \text{ slug},$

de modo que la ecuación diferencial está dada por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} = -5x - 1 \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -10x - 2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$\uparrow \frac{\beta}{m}$$

$$\uparrow \frac{k}{m}$$

$$\uparrow 2\lambda = 2$$

$$\uparrow \omega^2 = 10$$

$$\uparrow \omega = \sqrt{10} = 3.162$$

$$m^2 + 2m + 10 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-10}}{2}$$

$$m = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm 3i$$

$$\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = \sqrt{1-10} = \pm 3i$$

$$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$$

$\lambda^2 - \omega^2 < 0$ caso III
Subamortiguado

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t)$$

$$\lambda = 1, \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = 3 = \omega_{SA} = \omega_{\text{subamortiguado}}$$

$$x(t) = e^{-t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

(13)

Ahora bien: $x(0) = -2 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$

$$\Rightarrow C_1 = -2$$

$$x(t) = e^{-t} (-2 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

$$x'(t) = e^{-t} (6 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t) - e^{-t} (-2 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

$$x'(0) = 0 = 3C_2 \cdot 1 - 1(-2 \cdot 1) = 3C_2 + 2$$

$$0 = 3C_2 + 2 \Rightarrow 3C_2 = -2$$

$$C_2 = -2/3$$

así finalmente se obtiene.

$x(t) = e^{-t} \left(-2 \cos 3t - \frac{2}{3} \operatorname{Sen} 3t \right)$

(14)

FORMA ALTERNATIVA DE LA SOLUCION:

De manera idéntica al procedimiento usado en la sección 5.1, se puede escribir cualquier solución

$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + c_2 \operatorname{Sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t)$ (Subamortiguado) en la forma alternativa.

$x(t) = A e^{-\lambda t} \operatorname{Sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi)$ (15)

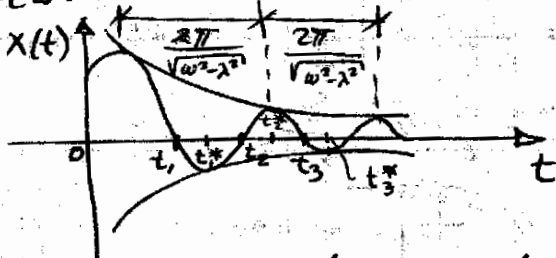
donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y el ángulo de fase ϕ se determinan de las ecuaciones

$\operatorname{Sen} \phi = \frac{c_1}{A}, \cos \phi = \frac{c_2}{A}, \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}$

A veces, el coeficiente $A e^{-\lambda t}$, recibe el nombre de amplitud amortiguada de las oscilaciones.

Debido a que (15) no es una función periódica, el valor $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$ se llama cuasiperíodo y $\frac{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}{2\pi}$ es

la cuasifrecuencia. El cuasiperíodo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos de $x(t)$.



Para graficar una ecuación como la (15), se buscan primero los puntos $t_1, t_2, \dots, t_k$, esto es, para algún entero n debe resolverse

$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi = n\pi$

para t , Se obtiene entonces:

$t_n = \frac{n\pi - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$ (16)

t_n va desde $t_1, t_2, \dots, t_k$.

además, observe que $|x(t)| \leq A e^{-\lambda t}$, puesto que

$|\operatorname{Sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi)| \leq 1$

En verdad, la gráfica de (15) "toca" la gráfica de $\pm A e^{-\lambda t}$ en los valores $t_1^*, t_2^*, \dots, t_k^*$, para los cuales

$\operatorname{Sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi) = \pm 1$, (ocurre en las crestas y valles, ¡tiene sentido!)

Esto significa que $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi$ debe ser un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi = (2n+1) \frac{\pi}{2}$, desde $n=0, 1, 2, \dots$

lo vuelven n par.

Recordar

$\operatorname{Sen} \frac{\pi}{2} = 1$
$\operatorname{Sen} \frac{3\pi}{2} = -1$
$\dots$

(8)

pág 221

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

$$t = \frac{(2n-1)\pi/2 - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

(17)

$$\omega = \omega_{\text{natural}} \text{ armónico simple}$$

$$\omega_{SA} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

Por ejemplo para trazar la gráfica de $x(t) = e^{-\lambda t} \sin(\omega_{SA} t - \frac{\pi}{3})$, se buscan los puntos de intersección con el eje positivo t resolviendo

$$2t_1 - \frac{\pi}{3} = 0, \quad 2t_2 - \frac{\pi}{3} = \pi, \quad 2t_3 - \frac{\pi}{3} = 2\pi, \dots$$

lo que resulta respectivamente:

$2t_1 = \frac{\pi}{3}$	$2t_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$	$2t_3 = 2\pi + \frac{\pi}{3}$
$t_1 = \frac{\pi}{6}$	$2t_2 = \frac{4\pi}{3}$	$2t_3 = \frac{7\pi}{3}$
	$t_2 = \frac{4\pi}{6}$	$t_3 = \frac{7\pi}{6}, \dots$
	$t_2 = \frac{2\pi}{3}$	

Observe que aún cuando $x(t)$ no es periódica, la diferencia entre las raíces sucesivas es

$$t_k - t_{k-1} = \pi/2 \text{ unidades, o sea, una mitad del}$$

$$i) \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

$$ii) \frac{7\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

$$\text{cuasiperíodo} = \frac{2\pi}{\omega_{SA}} = \pi \text{ Segundos.}$$

$$\omega_{SA} = \omega_{\text{subamortiguado.}}$$

además, $\sin(2t - \frac{\pi}{3}) = \pm 1$ para los valores de t que son soluciones de:

$$2t_1^* - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \quad 2t_2^* - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}, \quad 2t_3^* - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}$$

$$2t_1^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$t_1^* = \frac{5\pi}{12}$$

$$2t_2^* = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi + 2\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$2t_2^* = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_2^* = \frac{11\pi}{12}$$

$$t_2^* = \frac{11\pi}{12}$$

$$2t_3^* = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{15\pi + 2\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

$$2t_3^* = \frac{17\pi}{6}$$

$$t_3^* = \frac{17\pi}{12}$$

$$\frac{6\pi}{12} \text{ de dif.} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{6\pi}{12} \text{ de dif.} = \frac{\pi}{2}$$

Recordar:
 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

Recordar:
 $T = \frac{2\pi}{\omega}$
período.

Se verifica fácilmente que la diferencia entre los valores de t_k^* sucesivos es también $\frac{\pi}{2}$. La gráfica de $x(t)$ se presenta en la figura 5.14.

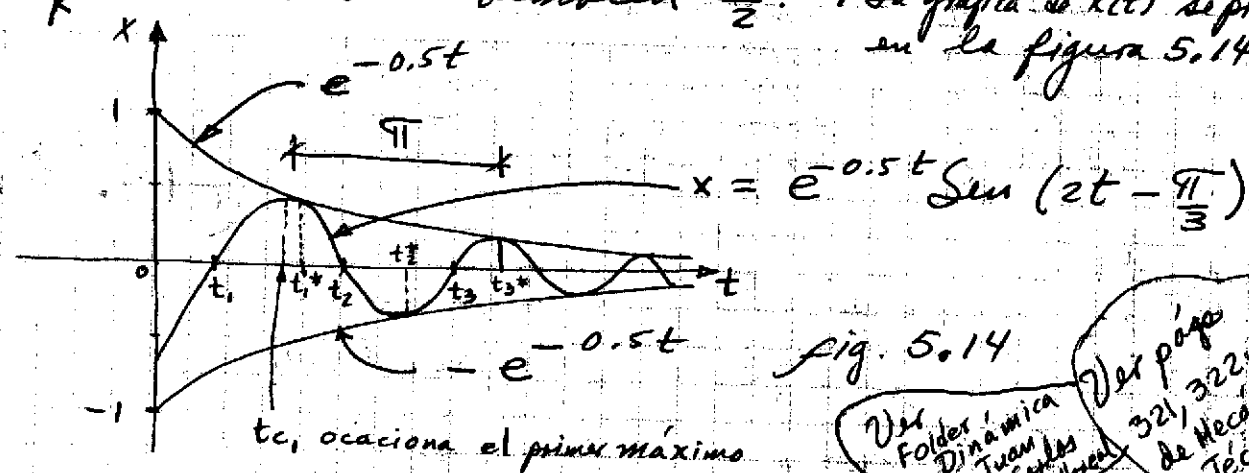


fig. 5.14

Ver pág. 321, 322 y 323 de Mecánica Técnica
Ver Folder Dinámica Juan Carlos Villanar

EJEMPLO 4.

Usando (15), se puede escribir la solución del problema de valor inicial $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$, del ejemplo (3) en la forma $x(t) = Ae^t \sin(3t + \phi)$

a partir de (14) tenemos que: $C_1 = -2$, $C_2 = -2/3$ de modo que

$$\sqrt{(-2)^2 + (-\frac{2}{3})^2} = A = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{40} = \frac{1}{3} \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2}{3} \sqrt{10}$$

$$\phi_{aux} = \arctan \left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \arctan \left| \frac{-2}{-2/3} \right| = \arctan 3 = 1.1071 \text{ rad.}$$

$$\phi = \pi + \phi_{aux} = \pi + 1.1071 = 4.391 \text{ radianes}$$

Por lo tanto

$$x(t) = \frac{2}{3} \sqrt{10} e^{-t} \sin(3t + 4.391)$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 5.15. Los valores de t_k y de t_k^* dados en la tabla adjunta son las intersecciones con el eje t y los puntos donde la gráfica de $x(t)$ toca las gráficas de $\pm (2/3) \sqrt{10} e^{-t}$, respectivamente. En este ejemplo el cuasiperíodo es $\frac{\pi}{3}$ segundos y por lo tanto la diferencia entre los t_k sucesivos (y los t_k^* sucesivos) es $\pi/3$ unidades.

$$3t_k + 4.391 = K\pi$$

$$t_k = \frac{K\pi - 4.391}{3}, K=2$$

$$t_k^* = \frac{(2K-1)\pi/2 - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} = \frac{(2K-1)\pi/2 - 4.391}{3}, K=2$$

$$t_2^* = 0.1071, t_3^* = 0.1071 + \pi/3 = 1.154, t_4^* = 1.154 + \pi/3 = 2.202, t_5^* = 2.202 + \pi/3 = 3.249$$

$$t_1 = -0.4165, t_2 = 0.6307, t_3 = 0.6307 + \pi/3 = 1.678, t_4 = 1.678 + \pi/3 = 2.725, t_5 = 2.725 + \pi/3 = 3.772 \text{ OK}$$

$$t_1^* = -0.9401$$

* Nota importante: Los valores de t , para los cuales la gráfica de $x(t)$ toca a las gráficas exponenciales, "no" son los valores para los que la función alcanza sus extremos relativos.

Recordatorios

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi)$$

$$x(t) = e^{-t} (-2 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t)$$

40	2
20	2
10	2
5	5
1	
40 = 2^3 \cdot 5	
= 2 \cdot 2^5	

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{5}{2} = 2.5$$

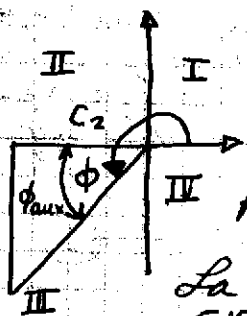
$$\omega^2 = 10$$

$$2\lambda = \frac{b}{m} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$2\lambda = 2$$

$$\lambda = 1$$

$$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3$$



91

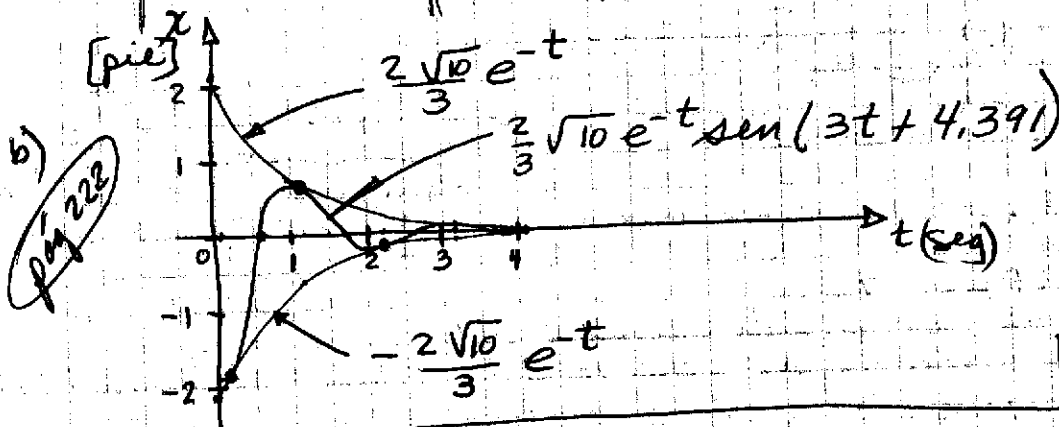
CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

a)

K	t_K	K	t_K^*	$x(t_K^*) = \frac{2}{3}\sqrt{10}e^{-t}\sin(3t + 4.391)$
1	-0.4165	2	-0.9401	es irrelevante.
2	0.6307	3	0.1071	-1.894 ; sen = -1
3	1.678	4	1.154	0.6649 ; sen = +1
4	2.725	5	2.202	-0.2331 ; sen = -1
5	3.772	6	3.249	0.0818 ; sen = +1
			4.296	-0.0287 ; sen = -1

(FIG. 5.15)

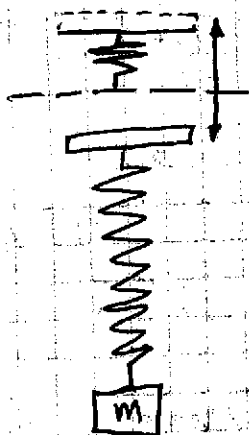


pendientes
ejercicios 5.2

5.3 MOVIMIENTO FORZADO.

"Con Amortiguación"

Supóngase que ahora consideramos además una fuerza exterior $f(t)$ que actúa sobre una masa oscilante sujeta a un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza impulsora que causa un movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte. Véase la figura 5.20. al incluir $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton se obtiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento forzado:



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + f(t) \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{o bien: } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \quad \text{--- (3)}$$

figura 5.20 donde $F(t) = \frac{f(t)}{m}$,

como en la sección anterior: $2\lambda = \beta/m$

$$\omega^2 = k/m$$

Para resolver esta última ecuación no homogénea se puede usar indistintamente el método de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros.

EJEMPLO 1.

Interpretar y resolver el problema de valor inicial

$$(4) \quad \frac{1}{5} \frac{d^2 x}{dt^2} + 1.2 \frac{dx}{dt} + 2x = 5 \cos 4t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$$

Solución:

Podemos interpretar el problema como una representación de un sistema oscilatorio que consiste de una masa ($m = \frac{1}{5} \text{ slug o kg}$) sujeta a un resorte ($k = 2 \text{ lb/pie o N/m}$). La masa es suelta, a partir del reposo, desde un punto que está $\frac{1}{2}$ unidades (pie o m) por debajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está impulsado por una fuerza periódica ($T = \frac{2\pi}{\omega}$).

($T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ seg}$) a partir del instante $t = 0$. Intuitivamente, se espera que aún con amortiguación el sistema se mantenga en movimiento hasta el momento en que la función forzante "desaparezca", en cuyo caso las amplitudes disminuirán gradualmente. Sin embargo, por la forma en que el problema está dado, $f(t) = 5 \cos 4t$ permanecerá "activa" indefinidamente.

Primero se multiplica (4) por 5 y resolvemos la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$m^2 + 6m + 10 = 0$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2}$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = \boxed{-3 \pm i = m_{1,2}}$$

$$x_h(t) = e^{-3t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

Utilizando el método de coeficientes indeterminados, supóngase una solución particular de la forma

$$x_p(t) = A \cos 4t + B \sin 4t, \text{ ahora}$$

$$x'_p(t) = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t$$

$$x''_p(t) = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t, \text{ de modo que}$$

$$x''_p + 6x'_p + 10x_p = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t + 24B \cos 4t - 24A \sin 4t + 10A \cos 4t + 10B \sin 4t = 25 \cos 4t$$

$$(1) \quad -6A + 24B = 25$$

$$(2) \quad -24A - 6B = 0$$

$$\begin{array}{r|l} (1) \quad (-4) : 24A - 96B = -100 & B = \frac{-100}{-102} \\ (2) \quad \quad \quad -24A - 6B = 0 & A = -\frac{50}{51} \\ \hline & -102B = -100 & B = \frac{50}{51} & A = -\frac{25}{102} \end{array}$$

10' pag 227

CAP. 5 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN

Entonces:

$$X(t) = e^{-3t} (C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t$$

si en la ecuación anterior se hace $t=0$, obtenemos que:

$$X(0) = \frac{1}{2} = e^0 (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) - \frac{25}{102} \cdot 1 + \frac{50}{51} \cdot 0$$

$$\frac{1}{2} = C_1 - \frac{25}{102}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{25}{102} = \frac{51+25}{102} = \frac{76}{102} = \frac{38}{51}$$

$C_1 = \frac{38}{51}$. Derivando la expresión y haciendo $t=0$ se encuentra además que:

$$X'(t) = e^{-3t} \left(-\frac{38}{51} \sin 4t + C_2 \cos 4t \right) - 3e^{-3t} \left(\frac{38}{51} \cos 4t + C_2 \sin 4t \right) + \frac{100}{102} \sin 4t + \frac{200}{51} \cos 4t$$

$$X'(0) = 0 = C_2 - 3 \left(\frac{38}{51} \right) + \frac{200}{51}$$

$$C_2 = \frac{114}{51} - \frac{200}{51} = -\frac{86}{51}$$

$C_2 = -\frac{86}{51}$. Por lo tanto la ecuación de movimiento es:

$$X(t) = e^{-3t} \left(\frac{38}{51} \cos 4t - \frac{86}{51} \sin 4t \right) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t$$

TÉRMINOS TRANSITORIO Y DE ESTADO ESTACIONARIO

Nótese que la función complementaria

$$X_h(t) = X_c(t) = e^{-3t} \left(\frac{38}{51} \cos 4t - \frac{86}{51} \sin 4t \right)$$

en el ejemplo 1 tiene la propiedad de que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_c(t) = 0 \quad \text{OK}$$

puesto que $X_c(t)$ se hace insignificante, (es decir, cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que es un término transitorio o una solución transitoria).

* Transitorio o una solución transitoria

Así, para valores grandes de tiempo, las des-
plazamientos del peso en el problema anterior
se aproximan grandemente por la solución
particular $x_p(t)$. Esta última función se llama
solución de estado estacionario. Cuando F es
una función periódica, tal como

$$F(t) = F_0 \sin \gamma t$$

o $F(t) = F_0 \cos \gamma t$, la solución general de (3)
consiste en:

$$x(t) = \text{respuesta transitoria} + \text{respuesta permanente}$$

EJEMPLO 2.

La solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 4 \cos t + 2 \sin t, \quad x(0) = 0$$

$$, \quad x'(0) = 3$$

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$x_h = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$x_p = A \cos t + B \sin t$$

$$x'_p = -A \sin t + B \cos t$$

$$x''_p = -A \cos t - B \sin t$$

$$x''_p + 2x'_p + 2x_p = 4 \cos t + 2 \sin t$$

$$\begin{cases} -A \cos t + B \sin t \\ +2B \cos t - 2A \sin t \\ +2A \cos t + 2B \sin t \end{cases} = 4 \cos t + 2 \sin t$$

$$\textcircled{1}: \begin{cases} 2B + A = 4 \\ -2A + B = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2}: \begin{cases} 2B - A = 4 \\ -2B + 4A = -4 \end{cases}$$

$$\textcircled{3}: \begin{cases} 2B - A = 4 \\ -2B + 4A = -4 \end{cases}$$

$$+3A = 0$$

$$A = 0$$

$$B = -4 + 2A = -4 + 2(0)$$

$$B = -2$$

$$x_p = -\frac{8}{5} \sin t + \frac{6}{5} \cos t$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{8}{5} \sin t + \frac{6}{5} \cos t$$

$$x(0) = 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 - \frac{8}{5}$$

$$c_1 = \frac{8}{5}$$

$$x = e^t \left(\frac{8}{5} \cos t + c_2 \sin t \right) - \frac{8}{5} \sin t + \frac{6}{5} \cos t$$

$$x = e^t \left(-\frac{8}{5} \sin t + c_2 \cos t \right) + \frac{8}{5} \sin t + \frac{6}{5} \cos t$$

$$x'(0) = 3 = c_2 \cdot 1 + \frac{6}{5}$$

$$c_2 = -\frac{6}{5} + 3 = -\frac{6}{5} + \frac{15}{5} = \frac{9}{5}$$

$$c_2 = \frac{9}{5}$$

$$x = e^t \left(\frac{8}{5} \cos t + \frac{9}{5} \sin t \right) - \frac{8}{5} \sin t + \frac{6}{5} \cos t$$

$$x_p = 2 \sin t$$

$$\text{Sol. grad.}$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2 \sin t$$

$$x(0) = 0 = c_1 + 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$x = e^t c_2 \sin t + 2 \sin t$$

$$x' = c_2 (e^t \cos t - e^t \sin t) + 2 \cos t$$

$$x'(0) = 3 = c_2 (1 - 0) + 2$$

$$c_2 = 1$$

$$x = e^t \sin t + 2 \sin t$$

transitorio permanente

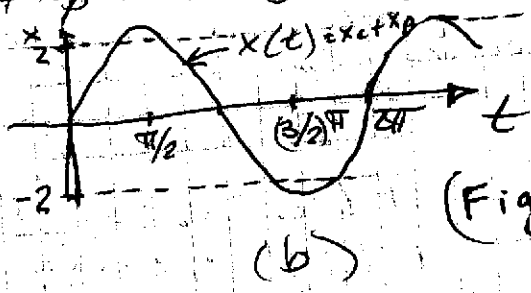
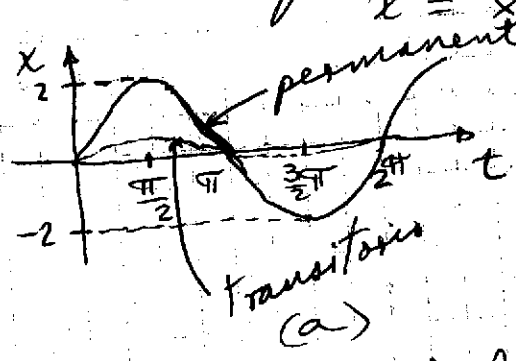
11'

pag 228

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

se puede ver fácilmente que es
 $x = x_c + x_p = e^{-t} \sin t + 2 \sin t$



(Fig. 5.21)

Un examen de la figura 5.21 muestra que, en este caso, el efecto del término transitorio en la solución es insignificante alrededor de $t > 2\pi$.

SIN AMORTIGUACIÓN.

En ausencia de una fuerza de amortiguación, no habrá término transitorio en la solución de un problema. Además, veremos, que la aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana, o igual, a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un problema, serio en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

EJEMPLO 3.

Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin \delta t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

donde F_0 es una constante.

Solución:

La función complementaria

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

$$m^2 = -\omega^2$$

$$m = \pm i\omega$$

$x_c(t) = x_h(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Para obtener una solución particular supóngase $x_p(t) = A \cos \delta t + B \sin \delta t$

de modo que: $x_p' = -A\delta \sin \delta t + B\delta \cos \delta t$
 $x_p'' = -A\delta^2 \cos \delta t - B\delta^2 \sin \delta t$

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t$$

$$-A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \sin \gamma t + \omega^2 (A \cos \gamma t + B \sin \gamma t) = F_0 \sin \gamma t$$

$$(A\omega^2 - A\gamma^2) \cos \gamma t + (B\omega^2 - B\gamma^2) \sin \gamma t = F_0 \sin \gamma t$$

$$A(\omega^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2) \sin \gamma t = F_0 \sin \gamma t$$

de donde se deduce que

$$A(\omega^2 - \gamma^2) = 0, \quad B(\omega^2 - \gamma^2) = F_0, \quad \text{así:}$$

$$\boxed{A = 0}, \quad B = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}; \quad (\gamma \neq \omega)$$

Por lo tanto

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$$

aplicando las condiciones iniciales dadas a la solución general

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$$

se llega a

$$x(0) = 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 0 \quad \therefore \boxed{c_1 = 0}$$

$$x'(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t + \frac{F_0 \gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

$$x'(0) = 0 = -c_1 \cdot 0 + c_2 \omega \cdot 1 + \frac{F_0 \gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \cdot 1$$

$$0 = c_2 \omega + \frac{F_0 \gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\omega} \left(-\frac{F_0 \gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \right)$$

$$\boxed{c_2 = -\frac{F_0 \gamma}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}} \quad \text{así, la solución es}$$

$$x(t) = \frac{-F_0 \gamma}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t), \quad \gamma \neq \omega}$$

(8)

RESONANCIA PURA.

Aunque la ecuación (8) no está definida para $\gamma = \omega$, es interesante observar que el valor del límite cuando $\gamma \rightarrow \omega$ se puede obtener utilizando la regla de L'Hôpital. Este proceso al límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza impulsora ($\gamma/2\pi$) con la frecuencia de las oscilaciones libres ($\omega/2\pi$).

121

pag 229, 230

CAP. 5 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

De manera intuitiva, se espera que después de un tiempo debe poderse aumentar sustancialmente las amplitudes de oscilación*. La solución para $\gamma = \omega$ se define como

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\gamma \rightarrow \omega} F_0 \frac{-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}(-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t)}{\frac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{-\sin \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega \gamma} \\ &= F_0 \frac{-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t}{-2\omega^2} \end{aligned}$$

Resonancia Pura.

$$x(t) = \frac{F_0 \sin \omega t}{2\omega^2} - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t \quad (9)$$

tal como pensamos, cuando $t \rightarrow \infty$ los desplazamientos se hacen grandes; de hecho

$$|x(t_n)| \rightarrow \infty, \text{ cuando } t_n = \frac{n\pi}{\omega}, n = 1, 2, \dots$$

El fenómeno se conoce como resonancia pura. La gráfica de la figura 5.22 muestra un movimiento típico correspondiente a este caso.

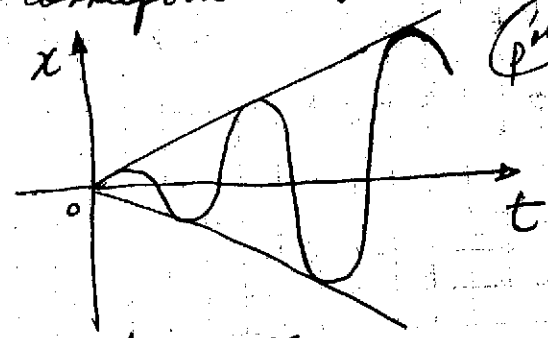


fig. 5.22

Para concluir, debe notarse que en realidad no es necesario usar un proceso al límite en (8) para obtener la solución correspondiente a $\gamma = \omega$. La ecuación (9) se deduce también resolviendo el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin \omega t, x(0) = 0, x'(0) = 0$$

directamente por los métodos convencionales.

$$x_p = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t$$

~~$$\begin{aligned} x_h &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \\ x_p &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ x_p' &= -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \\ x_p'' &= -A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t \\ x_p'' + \omega^2 x_p &= F_0 \sin \omega t \\ -A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) &= F_0 \sin \omega t \\ A \omega^2 (\cos \omega t - \cos \omega t) + B \omega^2 (-\sin \omega t + \sin \omega t) &= F_0 \sin \omega t \text{ no} \end{aligned}$$~~

* Ejemplo autobús sin amortiguadores, baches espaciados igual distancia pasajeros brincando sincronizadamente (no hay techo) el autobús

* se volcará

$$X_p = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t$$

$$X'_p = A[t(-\omega \sin \omega t) + \cos \omega t] + B[t(\omega \cos \omega t) + \sin \omega t]$$

$$X'_p = A[-\omega t \sin \omega t + \cos \omega t] + B[\omega t \cos \omega t + \sin \omega t]$$

$$X'_p = -A\omega t \sin \omega t + A \cos \omega t + B\omega t \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$X''_p = -A\omega[t\omega \cos \omega t + \sin \omega t] - A\omega \sin \omega t$$

$$+ B\omega[t(-\omega \sin \omega t) + \cos \omega t] + B\omega \cos \omega t$$

$$X''_p = -A\omega^2 t \cos \omega t - A\omega \sin \omega t - A\omega \sin \omega t$$

$$+ B\omega^2 t \sin \omega t + B\omega \cos \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$X''_p = -A\omega^2 t \cos \omega t - 2A\omega \sin \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t$$

$$X''_p = \omega^2 t(-A \cos \omega t - B \sin \omega t) + 2\omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

$$X''_p + \omega^2 X_p = F_0 \sin \omega t$$

$$\omega^2 t(-A \cos \omega t - B \sin \omega t) + 2\omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \omega^2 t(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = F_0 \sin \omega t$$

$$\left(\begin{array}{l} -A\omega^2 t \cos \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t \\ + 2B\omega \cos \omega t - 2A\omega \sin \omega t \\ + A\omega^2 t \cos \omega t + B\omega^2 t \sin \omega t \end{array} \right) = F_0 \sin \omega t$$

$$(-A\omega^2 t + 2B\omega + A\omega^2 t) \cos \omega t + (-B\omega^2 t - 2A\omega + B\omega^2 t) \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$

$$2B\omega \cos \omega t - 2A\omega \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$

$$2B\omega = 0 \quad | \quad -2A\omega = F_0$$

$$B = 0$$

$$A = -\frac{F_0}{2\omega}$$

$$X_p = -\frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

Gr'al: $X = X_h + X_p$

$$X = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

$$X(0) = 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$X = C_1 \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

$$X' = C_1 \omega \cos \omega t - \frac{F_0}{2\omega} [-\omega t \sin \omega t + \cos \omega t]$$

$$X'(0) = 0 = C_1 \omega \cdot 1 - \frac{F_0}{2\omega} (1)$$

$$C_1 \omega = \frac{F_0}{2\omega} \quad ; \quad C_1 = \frac{F_0}{2\omega^2}$$

$$X(t) = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

OK (9)

por los métodos convencionales.

Resonancia Pura OK.

13'

pág. 230

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

CURVA DE RESONANCIA.

En el caso de oscilaciones subamortiguadas, la solución general de la ecuación diferencial

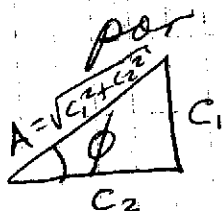
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \delta t \quad (10)$$

puede mostrarse que es:

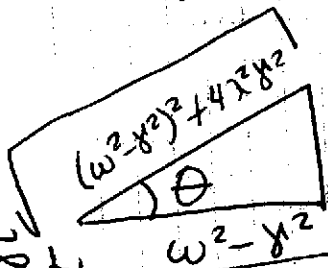
$$X(t) = A e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \delta^2)^2 + 4\lambda^2 \delta^2}} \sin(\delta t + \theta) \quad (11)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y los ángulos de fase ϕ y θ están definidos, respectivamente,

$$\sin \phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos \phi = \frac{c_2}{A}$$



$$\sin \theta = \frac{-2\lambda \delta}{\sqrt{(\omega^2 - \delta^2)^2 + 4\lambda^2 \delta^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\omega^2 - \delta^2}{\sqrt{(\omega^2 - \delta^2)^2 + 4\lambda^2 \delta^2}}$$



$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$$

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4(1)\omega^2}}{2(1)} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

$\lambda^2 - \omega^2 < 0$ es subamortiguado

$$m = -\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} i$$

$$X_h = e^{-\lambda t} (c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$X_h = A e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi), \quad \sin \phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos \phi = \frac{c_2}{A}$$

$$X_p = K_1 \sin \delta t + K_2 \cos \delta t$$

$$\begin{aligned} * X_p &= K_1 \delta \cos \delta t - K_2 \delta \sin \delta t \\ X_p'' &= -K_1 \delta^2 \sin \delta t - K_2 \delta^2 \cos \delta t \end{aligned}$$

pag 230

CAP. 5

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de 2º orden.

14

$$x_p'' + 2\lambda x_p' + \omega^2 x_p = F_0 \sin \gamma t$$

$$\left[\begin{aligned} &-K_1 \gamma^2 \sin \gamma t - K_2 \gamma^2 \cos \gamma t \\ &+ 2\lambda (K_1 \gamma \cos \gamma t - K_2 \gamma \sin \gamma t) \\ &+ \omega^2 (K_1 \sin \gamma t + K_2 \cos \gamma t) \end{aligned} \right] = F_0 \sin \gamma t$$

$$\left[\begin{aligned} &-K_1 \gamma^2 \sin \gamma t - K_2 \gamma^2 \cos \gamma t \\ &-2K_2 \lambda \gamma \sin \gamma t + 2K_1 \lambda \gamma \cos \gamma t \\ &+ K_1 \omega^2 \sin \gamma t + K_2 \omega^2 \cos \gamma t \end{aligned} \right] = F_0 \sin \gamma t$$

$$(-K_1 \gamma^2 - 2K_2 \lambda \gamma + K_1 \omega^2) \sin \gamma t + (-K_2 \gamma^2 + 2K_1 \lambda \gamma + K_2 \omega^2) \cos \gamma t = F_0 \sin \gamma t$$

$$-K_1 \gamma^2 - 2K_2 \lambda \gamma + K_1 \omega^2 = F_0 ; -K_2 \gamma^2 + 2K_1 \lambda \gamma + K_2 \omega^2 = 0$$

$$\begin{cases} (\omega^2 - \gamma^2) K_1 - 2K_2 \lambda \gamma = F_0 \\ (2\lambda \gamma) K_1 + (\omega^2 - \gamma^2) K_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (\omega^2 - \gamma^2) K_1 - (2\lambda \gamma) K_2 = F_0 : ① \\ (2\lambda \gamma) K_1 + (\omega^2 - \gamma^2) K_2 = 0 : ② \end{cases}$$

$$① (2\lambda \gamma) : (\omega^2 - \gamma^2)(2\lambda \gamma) K_1 - (2\lambda \gamma)^2 K_2 = F_0 (2\lambda \gamma)$$

$$② [-(\omega^2 - \gamma^2)] : -(\omega^2 - \gamma^2)(2\lambda \gamma) K_1 - (\omega^2 - \gamma^2)^2 K_2 = 0$$

$$-(2\lambda \gamma)^2 K_2 - (\omega^2 - \gamma^2)^2 K_2 = F_0 (2\lambda \gamma)$$

$$K_2 \{ -[(2\lambda \gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2] \} = F_0 (2\lambda \gamma)$$

$$K_2 = - \frac{F_0 (2\lambda \gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}$$

$$① (\omega^2 - \gamma^2) : (\omega^2 - \gamma^2)^2 K_1 - (\omega^2 - \gamma^2)(2\lambda \gamma) = F_0 (\omega^2 - \gamma^2)$$

$$② (2\lambda \gamma) : (2\lambda \gamma)^2 K_1 + (\omega^2 - \gamma^2)(2\lambda \gamma) = 0$$

$$[(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2] K_1 = F_0 (\omega^2 - \gamma^2)$$

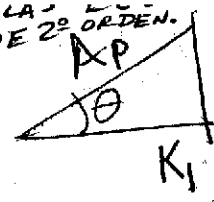
$$K_1 = \frac{F_0 (\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}$$

$$x_p = \frac{(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} F_0 \sin \gamma t + \frac{-2\lambda \gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} F_0 \cos \gamma t$$

$$x_p = F_0 \left[\frac{\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \sin \gamma t + \frac{-2\lambda \gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \cos \gamma t \right]$$

14' pag 230

$$A_p = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$



K_2

¿L2 queda vertical por que

$$\sqrt{\left(\frac{\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda\gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}{[(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}}$$

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}}$$

$$X_p = F_0 A_p \sin(\gamma t + \theta)$$

$$X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}} \sin(\gamma t + \theta)$$

finalmente

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \phi) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}} \sin(\gamma t + \theta)$$

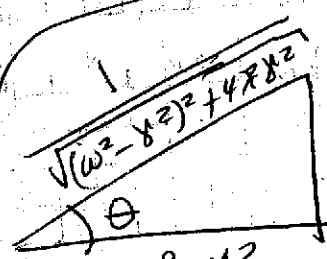
OK
todo bien

$$X_p = K_1 \sin \gamma t + K_2 \cos \gamma t$$

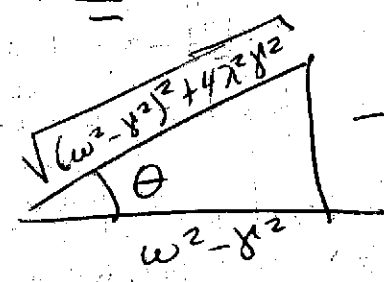
si hubiera puesto

$$X_p = K_1 \cos \gamma t + K_2 \sin \gamma t$$

el triangulo 



, mult por el denom. $(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2$



$$\sin \theta = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\omega^2 - \gamma^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}}$$

OK

EJEMPLO 4

La inspección de (11)

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}t + \phi)}_{x_c(t) \text{ Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \theta)}_{x_p(t) \text{ estacionario}} \quad (11)$$

muestra que $x_c(t)$ es transitorio cuando se presenta amortiguación, y por lo tanto para valores grandes de tiempo la solución se aproxima muy cercanamente por la solución de estado estacionario

$x_p(t) = g(\gamma) \sin(\gamma t + \theta)$, donde se define

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \quad (12)$$

Aunque la amplitud de x_p está acotada a medida que $t \rightarrow \infty$, se puede demostrar con facilidad que las oscilaciones máximas se presentarán en el valor

$$\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} \quad (\text{Véase problema 11})$$

demostración:

$$g(\gamma) = F_0 [(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]^{-1/2}$$

$$g'(\gamma) = F_0 \left(-\frac{1}{2}\right) [(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]^{-3/2} \{2(\omega^2 - \gamma^2)(-2\gamma) + 8\lambda^2\gamma\} = 0$$

$$-\frac{F_0}{2} \frac{2(\omega^2 - \gamma^2)(-2\gamma) + 8\lambda^2\gamma}{[(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]^{3/2}} = 0$$

$$2(\omega^2 - \gamma^2)(-2\gamma) + 8\lambda^2\gamma = 0$$

$$-8\lambda^2\gamma = 4\gamma(\omega^2 - \gamma^2)$$

$$-2\lambda^2 = (\omega^2 - \gamma^2)$$

$$\gamma^2 = \omega^2 - 2\lambda^2$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} \quad \text{OK}$$

se encuentra en "resonancia".

Probl. 11) a) Demuestre que $g(\gamma)$ dada en (13) del ejemplo 4 tiene un ^{del (12)} valor máximo en $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$

[Sugerencia: Derive con respecto a γ]

b) ¿Cuál es el máximo valor de $g(\gamma)$ en resonancia?

Así, cuando la frecuencia de la fuerza externa es $\frac{\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}}{2\pi}$, se dice que el sistema

OK

15'

pag 230

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

b) $g(x)_{\max} = ?$ $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$

$$g(x) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - x^2)^2 + 4\lambda^2 x^2}} \quad \text{--- (12) en términos de } \omega, \lambda, x$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - (\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2})^2)^2 + 4\lambda^2 x_1^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega^2 - 2\lambda^2))^2 + 4\lambda^2 x_1^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^2 + 2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2 x_1^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\sqrt{(2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2 x_1^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2 x_1^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^2(\lambda^2 + x_1^2)}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 + x_1^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 + (\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2})^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 + \omega^2 - 2\lambda^2}} = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

$g(x_1) = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 + \omega^2 - 2\lambda^2}}$ en términos de λ, ω $\checkmark$ OK con libro pag 591

$$F_0 = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

$$g(x_1)$$

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}$$

$$4\lambda^2 = \frac{\beta^2}{m^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{\beta^2}{4m^2}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

en términos de β, k, m

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\frac{\beta}{m} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\frac{\beta}{m} \sqrt{\frac{4mk - \beta^2}{4m^2}}}$$

$$g(x_1) = \frac{F_0}{\frac{\beta}{m} \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - \beta^2}}$$

$$g(x_1) = \frac{2F_0 m^2}{\beta \sqrt{4mk - \beta^2}}$$

Si $F_0 = 2, k = 4, m = 1$

$$g(x_1) = \frac{2(2)(1)^2}{0.25 \sqrt{4(1)(4) - 0.25^2}} = 4.007 \text{ OK } \checkmark$$

$$g(x_1) = \frac{4}{\beta \sqrt{16 - \beta^2}} \text{ OK } \checkmark$$

pág 230, 231

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

16

en general en términos de γ, β, k y $m \Rightarrow (12):$

pág 230

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \gamma^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \gamma^2}}$$

En el caso específico en que $k=4, m=1, F_0=2, g(\gamma)$ se convierte en:

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{4}{1} - \gamma^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{(1)^2} \gamma^2}}$$

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + \beta^2 \gamma^2}} \quad (13)$$

pág 231

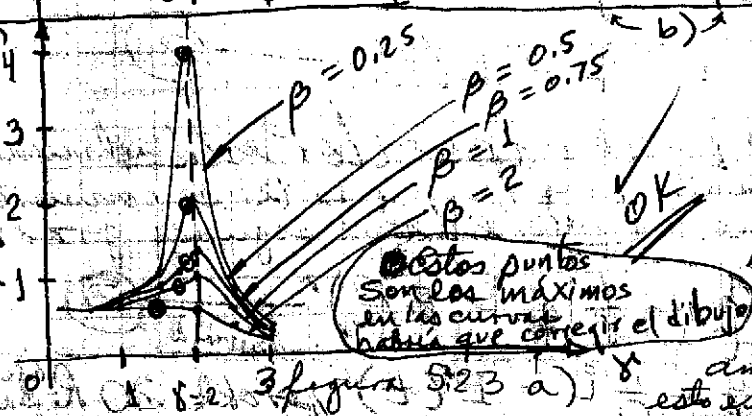
β	$\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{\beta^2}{4m^2}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}} = \sqrt{4 - \frac{\beta^2}{2}}$
2	1.414 ✓
1	1.871 ✓
0.75	1.928 ✓
0.50	1.969 ✓
0.25	1.992 ✓

✓ OK

Son los máximos
4
$\sqrt{16 - \beta^2}$
$g(\gamma_1)$
0.577 ✓
1.033 ✓
1.357 ✓
2.016 ✓
4.007 ✓

	$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 0.75$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.25$
γ	$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2}}$	$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + \gamma^2}}$	$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + 0.75^2 \gamma^2}}$	$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + 0.5^2 \gamma^2}}$	$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + 0.25^2 \gamma^2}}$
1	0.555 ✓	0.632 ✓	0.647 ✓	0.658 ✓	0.664 ✓
1.5	0.576 ✓	0.868 ✓	0.961 ✓	1.050 ✓	1.117 ✓
1.914	0.577 ✓	1.033 ✓	1.357 ✓	2.016 ✓	4.007 ✓
2	0.577 ✓	1.033 ✓	1.357 ✓	2.016 ✓	4.007 ✓
2.5	0.365 ✓	0.595 ✓	0.683 ✓	0.777 ✓	0.856 ✓
3	0.256 ✓	0.343 ✓	0.365 ✓	0.383 ✓	0.396 ✓

pendiente bloque de ejercicios No 5.3 pág 233



La figura 5.23a) muestra la gráfica de (13) para diferentes valores de coeficientes de amortiguación " β ". La familia de curvas se llama "curvas de resonancia" del sistema. Observe el comportamiento de las amplitudes de $g(\gamma)$ cuando $\beta \rightarrow 0$, esto es, cuando el sistema se acerca a la resonancia pura.

16'

págs 235, 236

CAP. 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

5.4. CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y OTROS SISTEMAS ANALÓGOS.

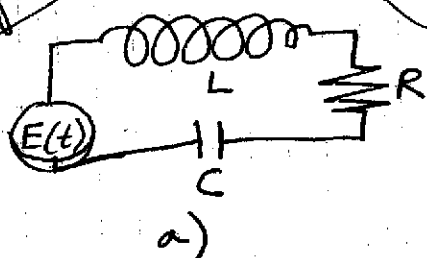
pág 235

"CIRCUITOS R-L-C CONECTADOS EN SERIE"

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, gran cantidad de sistemas físicos pueden describirse por medio de una ecuación diferencial lineal de segundo orden similar a la ecuación diferencial del movimiento forzado con amortiguación:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t). \quad (1)$$

pág 236



Inductor
Inductancia L: henrys (h)
caída de voltaje:
 $L \frac{di}{dt}$

Resistor
Resistencia R: ohms (Ω)
caída de voltaje:
 iR

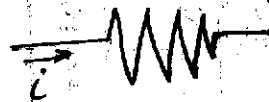
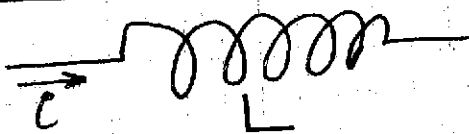
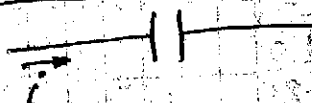


Figura 5.28

b)

Capacitor
Capacitancia C: farads (f)
caída de voltaje:
 $\frac{1}{C} q$



Si $i(t)$ representa la corriente en el "circuito eléctrico R-L-C en serie"

mostrado en la figura 5.28 a), entonces la caída de voltaje a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia se muestra en la figura 5.28 (b). aplicando la segunda ley de Kirchhoff, la suma de esos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ suministrado al circuito; esto es,

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (2)$$

Pero la carga $q(t)$ en el capacitor está relacionada con la corriente $i(t)$ mediante $i = \frac{dq}{dt}$, y así (2) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo grado

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (3)$$

también: $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E'(t)$ derivada de proble. 20 Ref. 1