Repaso de Análisis vectorial

Introducción.

•Las leyes de la física no dependen de la orientación del sistema de coordenadas: son invariantes frente a transformaciones de coordenadas de tipo ortogonal.
⇒Análisis Vectorial
•Dentro de la teoría clásica, los campos sólo actúan sobre sus propias fuentes.

El principal problema que plantea la teoría electromagnética es el de relacionar los vectores de los campos eléctrico y magnético y sus derivadas, con sus fuentes físicas y cualquier otro parámetro que se requiera para describir las propiedades de una región del espacio. Suele convenir introducir términos para describir fenómenos electromagnéticos, que tienen significado dentro de la teoría y que describen de forma matemática dicho fenómeno; pero que no representan cantidades físicas reales.

Cuando aplicamos las leyes de la física a situaciones particulares, es evidente que los resultados han de ser independientes del sistema de referencia elegido, (cartesiano, cilíndrico, esférico), así como de donde situemos el origen de coordenadas; con el empleo de vectores cumplimos con este requisito de independencia respecto de las particularidades del sistema de referencia, que hayamos utilizado.

Sea una transformación de coordenadas del tipo:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i' = \sum_j \lambda_{ij} x_j \\ \textit{con} \quad \sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \Rightarrow \end{array}}$$

Los ejes de cada uno de los sistemas son ortogonales entre sí.

en un espacio de tres coordenadas tendremos:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1' = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x_2' = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x_3' = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}}_{\textit{matriz } \lambda} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Escalar es una magnitud que no resulta afectada por una de tales transformaciones.

Un **vector** es un conjunto de magnitudes A_j que se transforma al pasar del sistema x_i al sistema x_i' mediante una matriz de transformación λ resultando: $A_i' = \sum_j \lambda_{ij} A_j$.

Las leyes útiles de la física son las que no dependen de la orientación del sistema de coordenadas.

Producto punto (escalar).

Definición (para vectores en el mismo sistema de coordenadas ortogonales):

$\vec{A}\bullet\vec{B}=\sum_i A_i B_i \longrightarrow$ escalar $\quad \vec{A}=(A_1,A_2,...,A_i,...)$, $\vec{B}=(B_1,B_2,...,B_i,...)$

Escalar ≡ magnitud que permanece invariante ante transformaciones de coordenadas

Dem. Sean A_i' y B_i' dos transformaciones de coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} A_i' &= \sum_j \lambda_{ij} A_j \\ B_i' &= \sum_k \lambda_{ik} B_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{A}'\bullet\vec{B}' = \sum_i A_i' B_i' = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} A_j\right)\left(\sum_k \lambda_{ik} B_k\right) = \sum_{j,k}\left(\sum_i \lambda_{ij}\lambda_{ik}\right) A_j B_k = \sum_j A_j B_j = \vec{A}\bullet\vec{B}$$

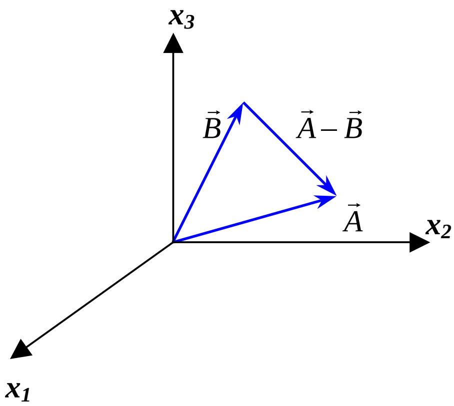
el valor del producto punto no resulta alterado por transformaciones de coordenadas.

La distancia desde un punto (A_1, A_2, A_3) definido por $\vec{A}$, al punto (B_1, B_2, B_3) definido por $\vec{B}$, esta dada por:

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{\sum_i (A_i - B_i)^2} = \sqrt{\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\bullet\left(\vec{A}-\vec{B}\right)}$$

la raíz cuadrada de un producto escalar.

$\Rightarrow$ la distancia es invariante respecto de transformaciones ortogonales de coordenadas.



Ahora si θ ($0 \le \theta \le \pi$) es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ entonces: $\vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = AB\cos\theta$

$\Rightarrow$ el ángulo formado por dos vectores es invariante respecto de transformaciones ortogonales de coordenadas.

En las transformaciones ortogonales se conservan las distancias y los ángulos entre vectores.

Propiedades del producto punto: Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, r y s escalares. Entonces:

$(a)\ \vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{B}\bullet\vec{A}$

$(b)\ \left(\vec{A}+\vec{B}\right)\bullet\vec{C} = \vec{A}\bullet\vec{C} + \vec{B}\bullet\vec{C}$

$(c)\ r\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right) = \left(r\vec{A}\right)\bullet\vec{B} = \vec{A}\bullet\left(r\vec{B}\right)$

$(d)\ \vec{A}\bullet\vec{A} = \left|\vec{A}\right|^2 = A^2 \ge 0$ y $\vec{A}\bullet\vec{A} = 0$ si y sólo si $\vec{A} = 0$

$(e)\ \left(r\vec{A}+s\vec{B}\right)\bullet\vec{C} = r\left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right) + s\left(\vec{B}\bullet\vec{C}\right)$

Producto cruz (vectorial).

El producto cruz únicamente está definido para vectores en $\mathbb{R}^3$. Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. El producto cruz se define como:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}=(C_1,C_2,C_3) \text{ donde } C_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}A_jB_k$$

$$\text{tensor Levi-Civita } \varepsilon_{ijk}=\begin{cases} 0 \text{ si dos subíndices son iguales} \\ 1 \text{ si } i,j,k \text{ forman permutación par de } i,j,k \\ -1 \text{ si } i,j,k \text{ forman permutación impar de } i,j,k \end{cases}$$

$$\varepsilon_{122}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{211}=0 \qquad \varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1 \qquad \varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$$

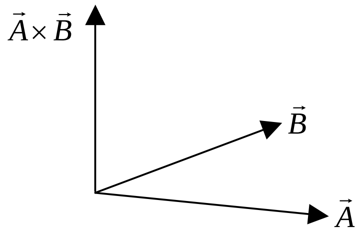
$$\left.\begin{array}{l} \text{si } i=1 \text{ las } \varepsilon_{ijk}\neq 0 \text{ son } \varepsilon_{123} \text{ y } \varepsilon_{132} \\ \text{entonces } C_1=\varepsilon_{123}A_2B_3+\varepsilon_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2 \\ \\ \text{si } i=2 \text{ las } \varepsilon_{ijk}\neq 0 \text{ son } \varepsilon_{231} \text{ y } \varepsilon_{213} \\ \text{entonces } C_2=\varepsilon_{231}A_3B_1+\varepsilon_{213}A_1B_3=A_3B_1-A_1B_3 \\ \\ \text{si } i=3 \text{ las } \varepsilon_{ijk}\neq 0 \text{ son } \varepsilon_{312} \text{ y } \varepsilon_{321} \\ \text{entonces } C_3=\varepsilon_{312}A_1B_2+\varepsilon_{321}A_2B_1=A_1B_2-A_2B_1 \end{array}\right\} \vec{C}=\left(A_2B_3-A_3B_2,A_3B_1-A_1B_3,A_1B_2-A_2B_1\right)$$

$$\text{Ahora } \begin{cases} \vec{A}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})=(A_1,A_2,A_3)\bullet\left(A_2B_3-A_3B_2,A_3B_1-A_1B_3,A_1B_2-A_2B_1\right)=0 \\ \vec{B}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})=\left(B_1,B_2,B_3\right)\bullet\left(A_2B_3-A_3B_2,A_3B_1-A_1B_3,A_1B_2-A_2B_1\right)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \vec{A}\bullet\vec{C}=0\Rightarrow\cos\theta'=0\Rightarrow\theta'=90^0, \text{ aquí } \theta' \text{ es el ángulo entre } \vec{A} \text{ y } \vec{C} \\ \vec{B}\bullet\vec{C}=0\Rightarrow\cos\theta'=0\Rightarrow\theta'=90^0, \text{ aquí } \theta' \text{ es el ángulo entre } \vec{B} \text{ y } \vec{C} \end{array}\right\}$$

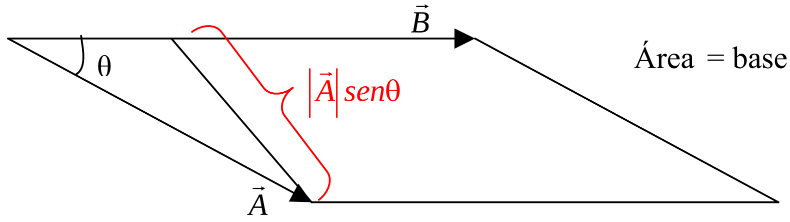
$$\Rightarrow \vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \text{ es un vector normal al plano definido por } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

el sentido de $\vec{A}\times\vec{B}$ es, por convenio, el de avance de un tornillo derecho cuando gira en el sentido de $\vec{A}$ a $\vec{B}$



Si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ entonces:

$C = |\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| sen\theta \equiv$ área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$



$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = |\vec{B}| \underbrace{|\vec{A}| sen\theta}_{altura}$$

De los resultados anteriores podemos observar que el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene las siguientes características:

a) Determina el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$
b) Es ortonormal (perpendicular) al plano de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Entonces toda superficie plana puede estar representada por un vector normal a ella y de magnitud igual al área de la misma.

Propiedades del producto cruz: Sean $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ y $\vec{D}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ diferentes de cero. Entonces si r y s son escalares cualesquiera:

(a) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

(b) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ si y sólo si $\vec{A} = 0, \vec{B} = 0$ o $\text{sen}\theta = 0$

(c) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ (todo vector es paralelo a sí mismo)

(d) $\left(r\vec{A}\right) \times \left(s\vec{B}\right) = rs\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$

(e) $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \bullet \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right)\vec{C}$

(f) $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \bullet \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \vec{A} \bullet \left(\vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{D}\right)\right) = \left(\vec{A} \bullet \vec{C}\right)\left(\vec{B} \bullet \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \bullet \vec{D}\right)\left(\vec{B} \bullet \vec{C}\right)$

(g) $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{D}\right)\vec{C} - \left(\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{C}\right)\vec{D}$

Vectores unitarios. $\vec{A} = \left(A_1, A_2, A_3\right) = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3 = \sum_i \hat{e}_i A_i$

$$A_i = \hat{e}_i \bullet \vec{A}$$

$$\hat{e}_i \bullet \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k \varepsilon_{ijk}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Un campo depende de la posición $\vec{r}$ del espacio

Campo escalar: Mapeo $\phi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\vec{r} \mapsto \phi(\vec{r}) = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

Campo vectorial: Mapeo $\vec{A}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r}) = \left(A_1(x_1,x_2,x_3), \underbrace{A_2(x_1,x_2,x_3)}_{campoescalar}, A_3(x_1,x_2,x_3) \right)$$

$$A_i:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Derivada total.

Sea $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}(t)) = \phi\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)$, la derivación respecto a la variable t se efectúa según la regla de la cadena:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \Rightarrow \text{diferencial total de } \phi\text{:}\ d\phi = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i$$

La diferencial total del vector de posición $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ es $d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial\vec{r}}{\partial x_i}dx_i$

Coordenadas cartesianas.

Gradiente: $\nabla\phi = \underbrace{\left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_3}\right)}_{\text{campo vectorial}} \Rightarrow$ operador nabla $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

Divergencia:

$$\nabla\bullet\vec{A} = \underbrace{\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}}_{\text{campo escalar}} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}A_i \quad ...(*)$$

$$\vec{B}\bullet\vec{A} = \sum_i B_i A_i \qquad \text{con} \quad \vec{B} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

Rotacional:

$$\nabla\times\vec{A} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)A_k \qquad \text{(campo vectorial)}$$

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)A_k \qquad ...(**)$$

$$\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}B_jA_k = \left(B_2A_3 - B_3A_2, B_3A_1 - B_1A_3, B_1A_2 - B_2A_1\right)$$

$$\text{con } \vec{B} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

Laplaciano: $\nabla^2\phi = \nabla\bullet(\nabla\phi) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) = \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}$

Propiedades operador ∇

(a) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$

Dem.

$$(\nabla\times(\nabla\phi)) = \left(\frac{\partial(\nabla\phi)_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(\nabla\phi)_2}{\partial x_3}, \frac{\partial(\nabla\phi)_1}{\partial x_3} - \frac{\partial(\nabla\phi)_3}{\partial x_1}, \frac{\partial(\nabla\phi)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial(\nabla\phi)_1}{\partial x_2}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right), \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3\partial x_2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3\partial x_1} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2\partial x_1}\right) = (0,0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_i}$$

(para campos continuos)

En las definiciones (*) y (**) de la divergencia y el rotacional, observamos que estas se pueden pensar como el producto punto y el producto cruz, respectivamente, del operador ∇ con el campo vectorial $\vec{A}$, ya que tienen similares propiedades algebraicas.

Tenemos que $\nabla\times(\nabla\phi)$, es de la misma forma que $\vec{A}\times(\vec{A}\phi)$, pero: $\vec{A}\times(\vec{A}\phi) = (\vec{A}\times\vec{A})\phi = 0$. Entonces haciendo $\vec{A} = \nabla$, debemos tener que $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$, tal como habíamos demostrado.

De igual manera:

(b) $\nabla\bullet(\nabla\times\vec{B}) = 0$

ya demostramos que $\vec{A}\bullet(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$ y en consecuencia tenemos: $\nabla\bullet(\nabla\times\vec{B}) = 0$

(c) $\nabla\times(\nabla\times\vec{C}) = ?$

Este producto es de la misma forma que: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\bullet\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$

Haciendo $\vec{A} = \vec{B} = \nabla$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{C}) = (\nabla\bullet\vec{C})\nabla - (\nabla\bullet\nabla)\vec{C} = ?$, el operador ∇ debe tener, a la derecha, un campo sobre el cual "operar". Entonces reacomodando los términos:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)\vec{C}\Rightarrow\nabla\times\left(\nabla\times\vec{C}\right)=\nabla\left(\nabla\bullet\vec{C}\right)-\left(\nabla\bullet\nabla\right)\vec{C}=\nabla\left(\nabla\bullet\vec{C}\right)-\nabla^2\vec{C}$$

$$\Rightarrow\nabla\times\left(\nabla\times\vec{C}\right)=\nabla\left(\nabla\bullet\vec{C}\right)-\nabla^2\vec{C}$$

Se pueden aplicar el álgebra vectorial al álgebra del operador ∇, pero teniendo cuidado en observar sobre quien "opera", por ejemplo: $(\nabla\psi)\times(\nabla\phi)=?$, podríamos estar tentados a decir que es igual a cero, puesto que es del tipo: $\left(\vec{A}r\right)\times\left(\vec{A}s\right)=rs\left(\vec{A}\times\vec{A}\right)=0$; pero en este ejemplo los dos operadores ∇ no son iguales, el primero opera sobre ψ y el otro opera sobre una función diferente ϕ. Y si bien representamos a ambos con el mismo símbolo ∇, deben considerarse como dos operadores diferentes. Claramente la dirección de $(\nabla\psi)$ depende de ψ y no hay razón para que sea paralela a $(\nabla\phi)$. En general $(\nabla\psi)\times(\nabla\phi)\neq 0$. Afortunadamente, no tendremos que utilizar este tipo de expresiones en el curso.

Lo que hemos dicho no cambia el hecho de que $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ para cualquier campo escalar o $\nabla\bullet\left(\nabla\times\vec{B}\right)=0$ para cualquier campo vectorial, por que aquí los dos operadores ∇ actúan sobre la misma función.

El inciso **(a)** $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ implica el siguiente teorema:

Si $\nabla\times\vec{A}=0\Rightarrow\exists\phi$ tal que $\vec{A}=\nabla\phi$

El inciso **(b)** $\nabla\bullet\left(\nabla\times\vec{B}\right)=0$ implica el siguiente teorema:

Si $\nabla\bullet\vec{D}=0\Rightarrow\exists\vec{C}$ tal que $\vec{D}=\nabla\times\vec{C}$

El vector de posición $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)$ y $d\vec{r}=\left(dx_1,dx_2,dx_3\right)$

Además, $\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)$ por lo que: $d\vec{r}\bullet\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}dx_3$

Pero por definición de diferencial total $d\phi=\sum_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}dx_3$

$\therefore$ $\boxed{d\phi=d\vec{r}\bullet\nabla\phi}$ . . . (***)

este resultado es invariante ante transformaciones de coordenadas ortogonales.

➢ Transformación de coordenadas ortogonales

Elemento de volumen.

$$dV = \frac{\partial\overbrace{(x_1, x_2, x_3)}^{\substack{coordenadas \\ cartesianas}}}{\partial\underbrace{(x_1', x_2', x_3')}_{\substack{nuevas \\ coordenadas}}} dx_1' dx_2' dx_3'$$

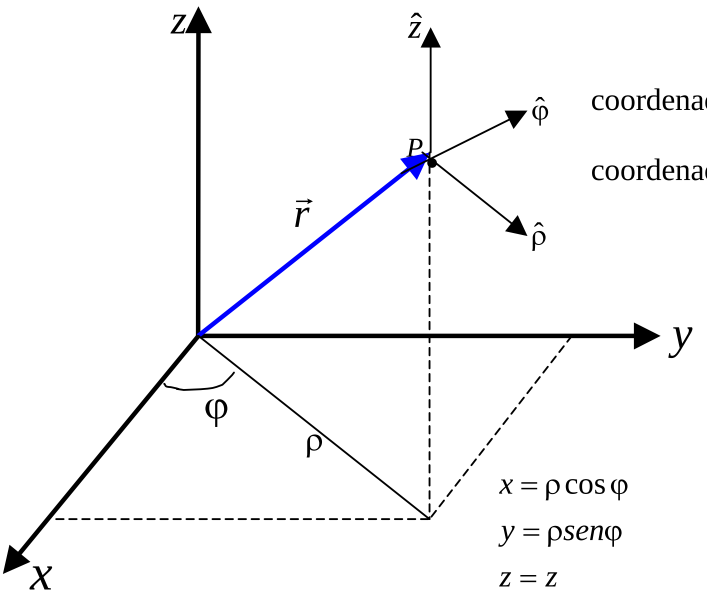
Jacobiano (representa el cambio del área al transformar un sistema de coordenadas a otro)

$$\text{Jacobiano} = J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1', x_2', x_3')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3'} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3'} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3'} \end{vmatrix}$$

Para un sistema de coordenadas ortogonal los vectores unitarios se definen como $\hat{e}_j = \dfrac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_j'}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_j'}\right|}$

donde $\vec{r}$ se pone en coordenadas cartesianas

Coordenadas cilíndricas.



coordenadas cartesianas $P = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

coordenadas cilíndricas $P = (x_1', x_2', x_3') = (\rho, \varphi, z)$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho_1, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho sen\varphi$$
$$z = z$$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho sen\varphi & 0\\ sen\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\varphi\left(\rho\cos\varphi\right)+\rho sen\varphi\left(sen\varphi\right)=\rho$$

$$\therefore \boxed{dV=\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz}$$

vector de posición: $\vec{r}=\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x,y,z\right)=\left(\rho\cos\varphi,\rho sen\varphi,z\right)$

- vectores unitarios cilíndricos:

$$\hat{\rho}=\hat{e}_\rho=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right|}=\frac{\left(\cos\varphi,sen\varphi,0\right)}{\sqrt{\cos^2\varphi+sen^2\varphi}}=\hat{x}\cos\varphi+\hat{y}sen\varphi$$

$$\hat{\varphi}=\hat{e}_\varphi=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|}=\frac{\left(-\rho sen\varphi,\rho\cos\varphi,0\right)}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2 sen^2\varphi}}=-\hat{x}sen\varphi+\hat{y}\cos\varphi$$

$$\hat{z}=\hat{e}_z=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|}=\frac{\left(0,0,1\right)}{1}=\hat{z}$$

estos tres vectores son perpendiculares, además $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ **no** son constantes dependen de φ, el único vector unitario constante es $\hat{z}$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\varphi}\\ \hat{z}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & sen\varphi & 0\\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{matriz\ de\ transformación}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}\Rightarrow$$ obteniendo la transpuesta de la matriz de transformación

llegamos a:

$$\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -sen\varphi & 0\\ sen\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\varphi}\\ \hat{z}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\hat{x}=\hat{\rho}\cos\varphi-\hat{\varphi}sen\varphi\\ \hat{y}=\hat{\rho}sen\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi\\ \hat{z}=\hat{z}\end{cases}$$

$$\hat{e}_i \bullet \hat{e}_j = \delta_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho}\bullet\hat{\rho} = \hat{\varphi}\bullet\hat{\varphi} = \hat{z}\bullet\hat{z} = 1 \\ \hat{\rho}\bullet\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\bullet\hat{z} = \hat{z}\bullet\hat{\rho} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k \varepsilon_{ijk} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho}\times\hat{\varphi} = \hat{z}; \quad \hat{z}\times\hat{\rho} = \hat{\varphi}; \quad \hat{\varphi}\times\hat{z} = \hat{\rho} \\ \hat{\rho}\times\hat{\rho} = \hat{z}\times\hat{z} = \hat{\varphi}\times\hat{\varphi} = 0 \end{cases} \qquad \ldots \text{(A)}$$

Ahora el vector de posición en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\vec{r} = (\rho, \varphi, z) = \rho\hat{\rho} + \varphi\hat{\varphi} + z\hat{z}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}}{\partial x'_j} dx'_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| \hat{\rho} d\rho + \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| \hat{\varphi} d\varphi + \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| \hat{z} dz = \hat{\rho} d\rho + \rho\hat{\varphi} d\varphi + \hat{z} dz$$

$$\Rightarrow \underline{d\vec{r} = \hat{\rho} d\rho + \rho\hat{\varphi} d\varphi + \hat{z} dz = (d\rho, \rho d\varphi, dz)}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \textit{elemento} \\ \textit{de}\ \text{superficie} \end{matrix} \begin{cases} ds_\rho = \rho d\varphi dz \\ ds_\varphi = d\rho dz \ \Rightarrow d\vec{s} = (\rho d\varphi dz, d\rho dz, \rho d\rho d\varphi) = \hat{\rho}\rho d\varphi dz + \hat{\varphi} d\rho dz + \hat{z}\rho d\rho d\varphi \\ ds_z = \rho d\rho d\varphi \end{cases}$$

Un campo escalar $\phi = \phi(\rho, \varphi, z) \Rightarrow d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$

además $d\vec{r} = \hat{\rho} d\rho + \rho\hat{\varphi} d\varphi + \hat{z} dz$

Ahora de la ecuación (***) sabemos que: $d\phi = d\vec{r} \bullet \nabla\phi$

$$\Rightarrow \quad \nabla\phi = \hat{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \text{(gradiente en coordenadas cilíndricas)}$$

$$\Rightarrow \textit{nabla} = \nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

---

sea un campo vectorial $\vec{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$ $\Rightarrow$ la divergencia en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla \bullet \vec{A} = \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}\right) =$$

$$= \hat{\rho} \bullet \left(\hat{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + A_\rho\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + A_\varphi\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} + \hat{z}\frac{\partial A_z}{\partial \rho} + A_z\frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho}\right) +$$

$$+ \hat{\varphi} \bullet \frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} + A_\rho\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} + \hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\varphi\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} + A_z\frac{\partial \hat{z}}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+ \hat{z} \bullet \left(\hat{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial z} + A_\rho\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} + \hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + A_\varphi\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z\frac{\partial \hat{z}}{\partial z}\right)$$

Usando el hecho que: $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\rho}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\rho}=\frac{\partial\hat{z}}{\partial\rho}=\frac{\partial\hat{z}}{\partial\varphi}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}=\frac{\partial\hat{z}}{\partial z}=\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial z}=0,$

$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi}=\hat{\varphi}, \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}=-\hat{\rho}, \text{ y } \hat{e}_i \bullet \hat{e}_j=\delta_{ij}$

$$\Rightarrow \nabla\bullet\vec{A}=\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(A_\rho+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

De manera similar, el rotacional en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_\rho\hat{\rho}+A_\varphi\hat{\varphi}+A_z\hat{z}\right)=$$

$$=\hat{\rho}\times\left(\hat{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+A_\rho\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\rho}+\hat{z}\frac{\partial A_z}{\partial\rho}+A_z\frac{\partial\hat{z}}{\partial\rho}\right)+$$

$$+\hat{\varphi}\times\frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}+A_\rho\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}+A_z\frac{\partial\hat{z}}{\partial\varphi}\right)+$$

$$+\hat{z}\times\left(\hat{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial z}+A_\rho\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial z}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}+\hat{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial\hat{z}}{\partial z}\right)$$

Usando : $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi}=\hat{\varphi}, \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}=-\hat{\rho}, \text{ y } \hat{e}_i\times\hat{e}_j=\hat{e}_k\varepsilon_{ijk}$:

$$\nabla\times\vec{A}=\hat{z}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}-\hat{\varphi}\frac{\partial A_z}{\partial\rho}-\hat{z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)+\hat{z}\frac{1}{\rho}A_\varphi+\hat{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\hat{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{A}=\hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\hat{z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)$$

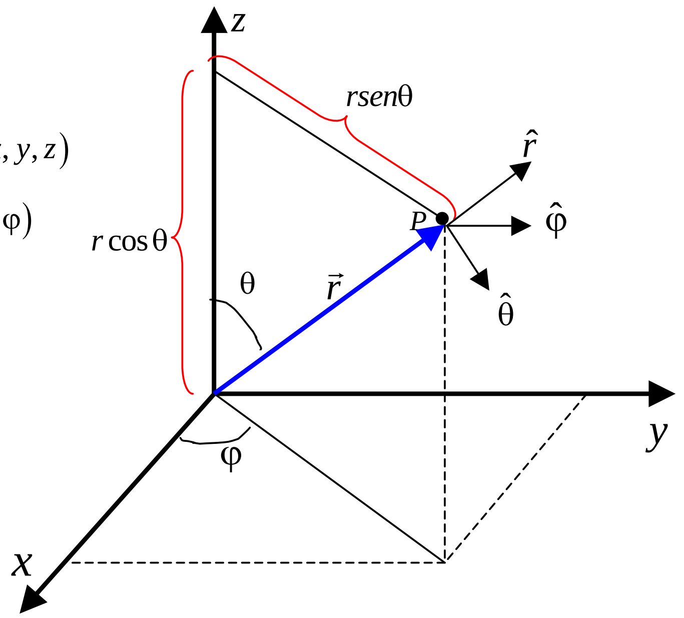
$$\Rightarrow \nabla\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}$$

el Laplaciano en coordenadas cilíndricas será: $\nabla^2\phi=\nabla\bullet\nabla\phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Coordenadas esféricas.

coordenadas cartesianas $P=(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$

coordenadas esféricas $P=(x_1',x_2',x_3')=(r,\theta,\varphi)$



$$x = rsen\theta\cos\varphi$$
$$y = rsen\theta sen\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}sen\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -rsen\theta sen\varphi\\ sen\theta sen\varphi & r\cos\theta sen\varphi & rsen\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -rsen\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=sen\theta\cos\varphi\left(r^2sen^2\theta\cos\varphi\right)+r\cos\theta\cos\varphi\left(rsen\theta\cos\theta\cos\varphi\right)+rsen\theta sen\varphi\left(rsen^2\theta sen\varphi+r\cos^2\theta sen\varphi\right)$$

$$=r^2sen\theta\cos^2\varphi\left(sen^2\theta+\cos^2\theta\right)+r^2sen\theta sen^2\varphi\left(sen^2\theta+\cos^2\theta\right)=r^2sen\theta$$

$$\therefore\quad \boxed{dV=r^2sen\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi}$$

vector de posición: $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)=(rsen\theta\cos\varphi, rsen\theta sen\varphi, r\cos\theta)$

- vectores unitarios esféricos:

$$\hat{r}=\hat{e}_r=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|}=\frac{(sen\theta\cos\varphi, sen\theta sen\varphi, \cos\theta)}{\sqrt{sen^2\theta\cos^2\varphi+sen^2\theta sen^2\varphi+\cos^2\theta}}=(sen\theta\cos\varphi, sen\theta sen\varphi, \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \hat{r}=\hat{x}sen\theta\cos\varphi+\hat{y}sen\theta sen\varphi+\hat{z}\cos\theta$$

$$\hat{\theta}=\hat{e}_{\theta}=\frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|}=\frac{r\left(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta sen\varphi,-sen\theta\right)}{r\sqrt{\cos^{2}\theta\left(\cos^{2}\varphi+sen^{2}\varphi\right)+sen^{2}\theta}}=\left(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta sen\varphi,-sen\theta\right)$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\hat{x}\cos\theta\cos\varphi+\hat{y}\cos\theta sen\varphi-\hat{z}sen\theta$$

$$\hat{\varphi}=\hat{e}_{\varphi}=\frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|}=\frac{r\left(-sen\theta sen\varphi,sen\theta\cos\varphi,0\right)}{r\sqrt{sen^{2}\theta sen^{2}\varphi+sen^{2}\theta\cos^{2}\varphi}}=\frac{\left(-sen\theta sen\varphi,sen\theta\cos\varphi,0\right)}{sen\theta}=\left(-sen\varphi,\cos\varphi,0\right)$$

$$\Rightarrow\hat{\varphi}=-\hat{x}sen\varphi+\hat{y}\cos\varphi$$

estos tres vectores son perpendiculares, además **no** son constantes.

$$\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\varphi}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}sen\theta\cos\varphi & sen\theta sen\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta sen\varphi & -sen\theta\\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}}_{matriz\ de\ transformación}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}\Rightarrow \text{obteniendo la transpuesta de la matriz de transformación}$$

llegamos a:

$$\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sen\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -sen\varphi\\ sen\theta sen\varphi & \cos\theta sen\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -sen\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\varphi}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\hat{x}=\hat{r}sen\theta\cos\varphi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\varphi}sen\varphi\\ \hat{y}=\hat{r}sen\theta sen\varphi+\hat{\theta}\cos\theta sen\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi\\ \hat{z}=\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}sen\theta\end{cases}$$

$$\hat{e}_i\bullet\hat{e}_j=\delta_{ij}\Rightarrow\begin{cases}\hat{r}\bullet\hat{r}=\hat{\varphi}\bullet\hat{\varphi}=\hat{\theta}\bullet\hat{\theta}=1\\ \hat{r}\bullet\hat{\varphi}=\hat{\varphi}\bullet\hat{\theta}=\hat{\theta}\bullet\hat{r}=0\end{cases}$$

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j=\hat{e}_k\varepsilon_{ijk}\Rightarrow\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{\varphi};\quad\hat{\theta}\times\hat{\varphi}=\hat{r};\quad\hat{\varphi}\times\hat{r}=\hat{\theta}$$

Ahora el vector de posición en coordenadas esféricas se expresa como: $\vec{r}=r\hat{r}$

$$\Rightarrow d\vec{r}=\sum_j\frac{\partial\vec{r}}{\partial x'_j}dx'_j=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}dr+\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|\hat{r}dr+\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|\hat{\theta}d\theta+\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|\hat{\varphi}d\varphi=\hat{r}dr+r\hat{\theta}d\theta+rsen\theta\hat{\varphi}d\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{d\vec{r}=\hat{r}dr+r\hat{\theta}d\theta+rsen\theta\hat{\varphi}d\varphi=\left(dr,rd\theta,rsen\theta d\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}elemento\\ de\ \text{superficie}\end{matrix}\begin{cases}ds_r=r^2sen\theta d\theta d\varphi\\ ds_\theta=rsen\theta drd\varphi\\ ds_\varphi=rdrd\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow d\vec{s}=\left(r^2sen\theta d\theta d\varphi,rsen\theta drd\varphi,rdrd\theta\right)=\hat{r}r^2sen\theta d\theta d\varphi+\hat{\theta}rsen\theta drd\varphi+\hat{\varphi}rdrd\theta$$

Un campo escalar $\phi=\phi(r,\theta,\varphi)\Rightarrow d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}dr+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi$

además $d\vec{r}=\hat{r}dr+r\hat{\theta}d\theta+rsen\theta\hat{\varphi}d\varphi$

Ahora de la ecuación (***) sabemos que: $d\phi=d\vec{r}\bullet\nabla\phi$

$\Rightarrow\quad \nabla\phi=\hat{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$ (gradiente en coordenadas esféricas)

$\Rightarrow nabla=\nabla=\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

---

sea un campo vectorial $\vec{A}=A_r\hat{r}+A_\theta\hat{\theta}+A_\varphi\hat{\varphi}$ $\Rightarrow$ la divergencia en coordenadas esféricas es

$$\nabla\bullet\vec{A}=\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\bullet\left(A_r\hat{r}+A_\theta\hat{\theta}+A_\varphi\hat{\varphi}\right)=$$

$$=\hat{r}\bullet\left(\hat{r}\frac{\partial A_r}{\partial r}+A_r\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}+A_\theta\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}\right)$$

$$+\frac{1}{r}\hat{\theta}\bullet\left(\hat{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+A_r\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}+\hat{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+A_\theta\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{rsen\theta}\hat{\varphi}\bullet\left(\hat{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+A_r\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}+\hat{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}+A_\theta\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}\right)$$

$$Usando:\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}=\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}=0,\quad\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}=\hat{\theta},\quad\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}=-\hat{r},\quad\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}=sen\theta\hat{\varphi},$$

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi}=\cos\theta\hat{\varphi},\quad\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}=-sen\theta\hat{r}-\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow\nabla\bullet\vec{A}=\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(A_r+\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{rsen\theta}\left(A_r sen\theta+A_\theta\cos\theta+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow\nabla\bullet\vec{A}=\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{A_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{A_r}{r}+\frac{A_\theta\cos\theta}{rsen\theta}+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=$$

$$\Rightarrow\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial A_r}{\partial r}+2A_r r\right)+\frac{1}{rsen\theta}\left(sen\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+A_\theta\cos\theta\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\Rightarrow\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta sen\theta\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Ahora, el rotacional en coordenadas esféricas:

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\times\left(A_r\hat{r}+A_\theta\hat{\theta}+A_\varphi\hat{\varphi}\right)=$$

$$=\hat{r}\times\left(\hat{r}\frac{\partial A_r}{\partial r}+A_r\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}+A_\theta\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\hat{\theta}\times\left(\hat{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+A_r\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}+\hat{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+A_\theta\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{rsen\theta}\hat{\varphi}\times\left(\hat{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+A_r\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}+\hat{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}+A_\theta\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi}+\hat{\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+A_\varphi\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}\right)$$

$$Usando:\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}=\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}=\hat{\theta},\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}=-\hat{r},\ \frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}=sen\theta\hat{\varphi},\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi}=\cos\theta\hat{\varphi},$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}=-sen\theta\hat{r}-\cos\theta\hat{\theta}\quad y\quad \hat{e}_i\times\hat{e}_j=\hat{e}_k\varepsilon_{ijk}$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{A}=\hat{\varphi}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\hat{\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(-\hat{\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\hat{\varphi}A_\theta+\hat{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{rsen\theta}\left(\hat{\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\hat{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}+A_\varphi\left(-\hat{\theta}sen\theta+\hat{r}\cos\theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{A}=\hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+\frac{A_\varphi\cos\theta}{rsen\theta}-\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)+\hat{\theta}\left(\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}-\frac{A_\varphi}{r}\right)+\hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}A_\theta\right)$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{A}=\frac{\hat{r}}{rsen\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi sen\theta\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)+\frac{\hat{\theta}}{r}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)+\frac{\hat{\varphi}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r^2sen\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & rsen\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & rsen\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

el Laplaciano en coordenadas esféricas será:

$$\nabla^2\phi=\nabla\bullet\nabla\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2sen^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

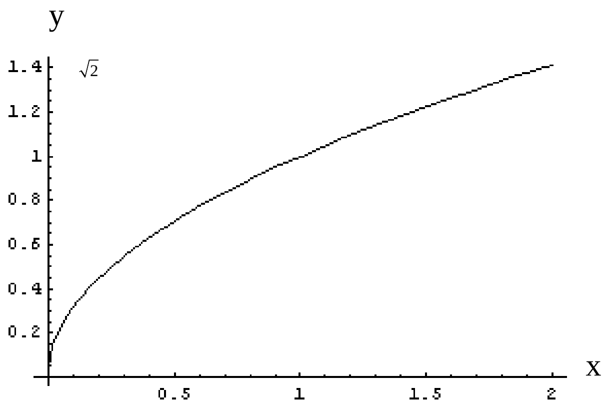
Integral de línea.

Sea $\vec{A}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que sea continuo sobre la trayectoria $c:[a,b]\to\mathbb{R}^3$.
Definimos $\int_c \vec{A}\bullet d\vec{r}$ la integral de línea de $\vec{A}$ a lo largo de *c*, como:

$$\int_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_a^b \vec{A}\big(c(t)\big)\bullet c'(t)dt$$

Ej. $\vec{A} = x^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z^2\hat{z}$

$c \to parabola \;\; y^2 = x \;\; entre \;\; (0,0,0) \;\; \text{y} \;\; (2,\sqrt{2},0)$



fijando x:

$$c = \left(x,\sqrt{x},0\right) \Rightarrow c(t) = \left(t,\sqrt{t},0\right)$$

$$c' = \left(1,\frac{1}{2}x^{-1/2},0\right) \Rightarrow c'(t) = \left(1,\frac{1}{2}t^{-1/2},0\right)$$

$$\vec{A}\big(c(t)\big) = t^2\hat{x} + t\hat{y}$$

$$\vec{A}\big(c(t)\big)\bullet c'(t) = t^2 + t\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) = t^2 + \frac{1}{2}t^{1/2}$$

$$\int_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_0^2 \left(t^2 + \frac{1}{2}t^{1/2}\right)dt = \underline{\frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Fijando y:

$$c = \left(y^2,y,0\right) \Rightarrow c(t) = \left(t^2,t,0\right) \Rightarrow c'(t) = \left(2t,1,0\right)$$

$$\vec{A}\big(c(t)\big) = t^4\hat{x} + t^2\hat{y} \quad ; \quad \vec{A}\big(c(t)\big)\bullet c'(t) = 2t^5 + t^2$$

$$\Rightarrow \int_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2t^5 + t^2\right)dt = \left.\frac{t^6}{3} + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \underline{\frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

De otra manera: $\vec{A} = x^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z^2\hat{z} = \left(x^2,y^2,z^2\right)$

$$\int_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_c \left(x^2,y^2,z^2\right)\bullet\left(dx,dy,dz\right) = \int_c x^2dx + y^2dy + z^2dz$$

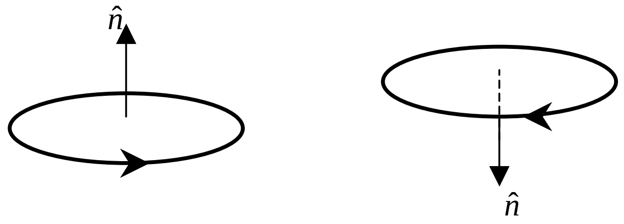
Pero: $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = x \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ 2ydy = dx \Rightarrow dy = \dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases} \end{cases}$

$$\int_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_0^2 x^2dx + \int_0^2 x\left(\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right) = \int_0^2 x^2dx + \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{2}dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^{3/2}}{3}\right]_0^2 = \underline{\frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

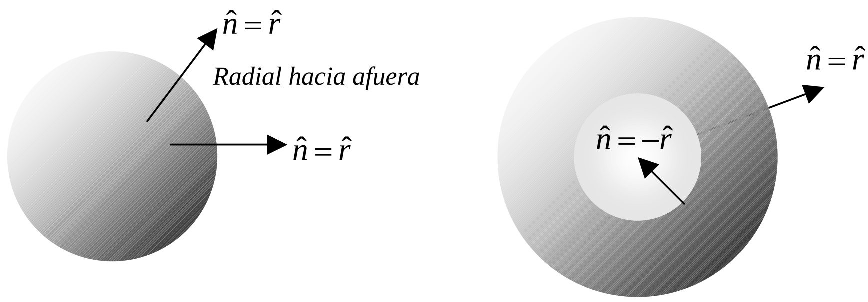
Integral de superficie.

$$\int_s \vec{A}\bullet d\vec{s} = \int_s \vec{A}\bullet\hat{n}ds$$ donde $\hat{n} \equiv vector$ unitario, normal a la superficie S

superficie abierta



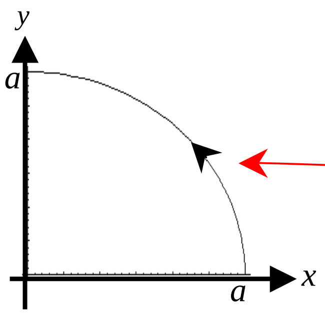
Superficie cerrada



Ej. Sea $\vec{A} = yz\hat{x} + zx\hat{y} + xy\hat{z}$

$S \rightarrow$ primer cuadrante de un circulo de radio a

$$x^2 + y^2 = a^2$$



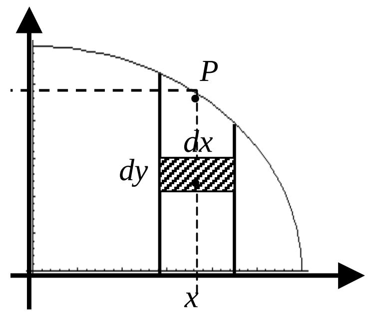
la superficie es $\perp$ a z $\therefore \hat{n} = \hat{z}, -\hat{z}$

tomando $\hat{n} = \hat{z}$

$$\int_s \vec{A}\bullet d\vec{s} = \int_s \vec{A}\bullet\hat{z}ds = \int_s xydxdy$$

Integrando primero sobre "*y*" con *x* = constante,
luego sobre todos los posibles valores de *x*

$$P = \left(x, \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$



$$\int_s \vec{A}\bullet d\vec{s} = \int_0^a xdx \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} ydy = \int_0^a xdx \left(\frac{1}{2}y^2\right)_{y=0}^{(a^2-x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)_0^a = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{8} = \frac{1}{8}a^4$$

Teorema de la divergencia.

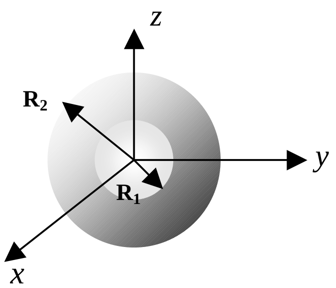
Sea $\vec{A}(\vec{r})$ un campo vectorial con segundas derivadas parciales continuas y *V* un volumen con una superficie cerrada *S(V)* entonces:

$$\int_V \nabla\bullet\vec{A}dV = \oint_{S(V)} \vec{A}\bullet d\vec{s} \to \textit{flujo}$$

<u>*Comentario*</u>. El flujo rotacional a través de una superficie cerrada es cero:

$$\oint_{S(V)} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\bullet d\vec{s} = \int_V \nabla\bullet\left(\nabla\times\vec{A}\right)dV = 0 \Rightarrow \oint_{S(V)} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\bullet d\vec{s} = 0 \Rightarrow \nabla\times\vec{A} = 0$$

Ej. Sea $\vec{A} = \frac{k}{r^n}\hat{r}$, comprobar el Teorema de la divergencia considerando el volumen entre dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 , $R_1 < R_2$



$$d\vec{s} = \left(r^2 sen\theta d\theta d\varphi, rsen\theta drd\varphi, rdrd\theta\right)$$

$$\int_s \vec{A}\bullet d\vec{s} = \int_s \vec{A}\bullet\hat{n}ds$$

$$\left.\begin{matrix} S_1 \to R_1 : \hat{n} = -\hat{r} \\ S_2 \to R_2 : \hat{n} = \hat{r} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \oint_s \vec{A}\bullet\hat{n}ds = \int_{S(r=R_1)} -A_r ds_r + \int_{S(r=R_2)} A_r ds_r$$

$$\oint_s \vec{A}\bullet d\vec{s} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{k}{R_1^n} R_1^2 sen\theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{k}{R_2^n} R_2^2 sen\theta d\theta d\varphi = -\frac{4\pi k}{R_1^{n-2}} + \frac{4\pi k}{R_2^{n-2}} = \underline{4\pi k\left[\frac{1}{R_2^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}}\right]}$$

Ahora, por otro lado:

$$\nabla\bullet\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{k}{r^n}\right) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-n+2}\right) = \frac{k}{r^2}\left(\left(-n+2\right)r^{(-n+1)}\right) = \left(-n+2\right)kr^{-(n+1)}$$

$$\int_V \nabla\bullet\vec{A}dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \left(-n+2\right)kr^{-(n+1)}r^2 sen\theta drd\theta d\varphi = 4\pi\left(-n+2\right)k\int_{R_1}^{R_2} r^{(-n+1)}dr = 4\pi\left(-n+2\right)k\left.\frac{r^{-n+2}}{\left(-n+2\right)}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla\bullet\vec{A}dV = 4\pi k\left[\frac{1}{R_2^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}}\right]$$

$$\therefore \oint_s \vec{A}\bullet d\vec{s} = \int_V \nabla\bullet\vec{A}dV$$

Teorema de Stokes.

Sea $\vec{A}$ un campo vectorial con al menos segundas derivadas continuas y sea S un área orientada de contorno C entonces se cumple que:

$$\oint_c \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_s \left(\nabla \times \vec{A} \right) \bullet d\vec{s}$$

<u>*Comentario*</u>.

Para un campo vectorial conservativo se sabe que $\exists$ un campo escalar ϕ tal que $\vec{A} = \nabla\phi$

$\Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \; por \;\; el \;\; Teo.Stokes : \oint_c \vec{A} \bullet d\vec{r} = 0$ (independencia del camino)

En la otra dirección si $\oint_c \vec{A} \bullet d\vec{r} = 0$, para cualquier camino cerrado C

$\Rightarrow \int_s \left(\nabla \times \vec{A} \right) \bullet d\vec{s} = 0$ para una superficie S cualquiera, con contorno C.

$\Rightarrow \nabla \times \vec{A} = 0$ (no tiene vórtices)

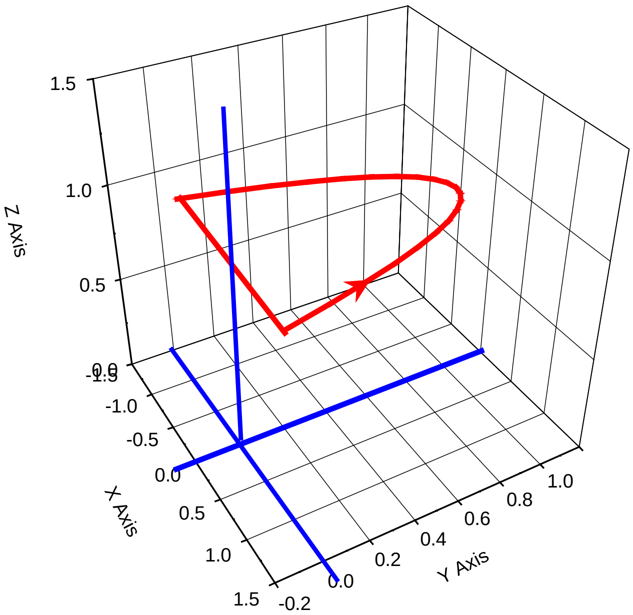
Ej. Dado $\vec{A} = xyz\hat{x} + x^2 y\hat{y}$, comprobar el Teo. Stokes para un camino cerrado sobre el plano z = 1, dada por la curva $y = 1 - x^2$ y la intersección con $y = 0$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2 y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \hat{y}xy + \hat{z}\left(2xy - xz\right)$$

$$z = 1 \Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \hat{y}xy + \hat{z}\left(2xy - x\right)$$

$$d\vec{s} = \hat{n}ds = \hat{z}dxdy$$



$$\int_s \left(\nabla \times \vec{A} \right) \bullet d\vec{s} = \int_1^{-1} \int_0^{y=1-x^2} \left(2xy - x\right) dydx = 2\int_0^1 dx \left[2x\frac{y^2}{2} - xy \right]_0^{y=1-x^2} = 2\int_0^1 \left[x\left(1-x^2\right)^2 - x\left(1-x^2\right) \right] dx$$

$$\Rightarrow \int_s \left(\nabla \times \vec{A}\right)\bullet d\vec{s} = 2\int_0^1 \left[x\left(1-2x^2+x^4\right) - x + x^3 \right] dx = 2\int_0^1 \left(-x^3+x^5\right) dx = 2\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{x^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) = 2\left(\frac{-3+2}{12}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\oint_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_a^b \vec{A}\left(c(t)\right)\bullet c'(t)dt = \underbrace{\int_{y=0} \vec{A}\bullet d\vec{r}}_{\substack{si\ y=0 \\ \vec{A}=0}} + \int_{\substack{y=1-x^2 \\ x>0}} \vec{A}\bullet d\vec{r} - \int_{\substack{y=1-x^2 \\ x<0}} \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_1^0 \vec{A}\bullet d\vec{r} - \int_0^{-1} \vec{A}\bullet d\vec{r}$$

$$\vec{A} = xyz\hat{x} + x^2 y\hat{y} \overset{\overset{z=1}{\uparrow}}{=} xy\hat{x} + x^2 y\hat{y}$$

$$c = \left(x, 1-x^2, 1\right) \Rightarrow c(t) = \left(t, 1-t^2, 1\right) \Rightarrow c'(t) = \left(1, -2t, 0\right)$$

$$\vec{A}\left(c(t)\right) = t\left(1-t^2\right)\hat{x} + t^2\left(1-t^2\right)\hat{y}$$

$$\vec{A}\left(c(t)\right)\bullet c'(t) = t\left(1-t^2\right) - 2t^3\left(1-t^2\right) = t - 3t^3 + 2t^5$$

$$\therefore \oint_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_1^0 \left(t-3t^3+2t^5\right)dt - \int_0^{-1} \left(t-3t^3+2t^5\right)dt = \left(\frac{t^2}{2}-\frac{3t^4}{4}+\frac{2t^6}{6}\right)\Bigg|_1^0 - \left(\frac{t^2}{2}-\frac{3t^4}{4}+\frac{2t^6}{6}\right)\Bigg|_0^{-1}$$

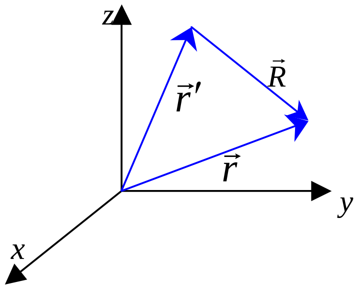
$$= \left(\frac{6t^2-9t^4+4t^6}{12}\right)\Bigg|_1^0 - \left(\frac{6t^2-9t^4+4t^6}{12}\right)\Bigg|_0^{-1} = -\frac{1}{12}-\frac{1}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \int_s \left(\nabla \times \vec{A}\right)\bullet d\vec{s} = \oint_c \vec{A}\bullet d\vec{r}$$

Funciones de coordenadas relativas

Constantemente se encuentran funciones que dependen exclusivamente de las diferencias entre coordenadas, es decir que son funciones de las combinaciones $x-x', y-y', z-z'$ estas combinaciones son simplemente las componentes del vector de posición relativa $\vec{R}$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$
$$\vec{r}\,' = (x', y', z')$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$$



Las funciones de este tipo tienen propiedades que permiten simplificar muchas expresiones.

Sea f una función de este tipo, f podría ser un escalar o la componente de un vector.

$$f\left(\vec{R}\right)= f\left(x-x', y-y', z-z'\right)= f\left(X,Y,Z\right)$$

Por regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x'}=-\frac{\partial f}{\partial X}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f\left(\vec{R}\right)}{\partial x}=-\dfrac{\partial f\left(\vec{R}\right)}{\partial x'}$ existen expresiones similares para derivadas en y y en z

$$\nabla' = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z'} \qquad \therefore \qquad -\nabla' f\left(\vec{R}\right)=\nabla f\left(\vec{R}\right)$$

$\Rightarrow \nabla$ y ∇' pueden intercambiarse cuando se manejan funciones de coordenadas relativas intercambiando el signo.

Si un vector $\vec{A}$ es función solamente de coordenadas relativas, tenemos que:

$$\vec{A}=\vec{A}\left(\vec{R}\right)=\left(A_x(\vec{R}), A_y(\vec{R}), A_z(\vec{R})\right)\Rightarrow \begin{cases} \nabla \bullet \vec{A}=-\nabla' \bullet \vec{A} \\ \nabla\times\vec{A}=-\nabla'\times\vec{A}\end{cases}$$

Ahora el operador Laplaciano $\left(\nabla^2=\nabla\bullet\nabla=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ no cambia, ya que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial x'}\right)=-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x'}\left(-\frac{\partial f}{\partial x'}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

de forma similar para las derivadas con respecto a y y z

$$\therefore \quad \nabla'^2 f=\nabla^2 f$$

Ej. El vector de posición $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=(x-x')\hat{x}+(y-y')\hat{y}+(z-z')\hat{z}$

$\Rightarrow R=\left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}= f\left(\vec{R}\right)$ ejemplo de función de coordenadas relativas

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \underbrace{\frac{x-x'}{R}}_{\hat{R}_x} = -\frac{\partial R}{\partial x'} \qquad \therefore \quad \nabla R = -\nabla' R = \frac{\vec{R}}{R} = \hat{R}$$

Se encuentran resultados similares para funciones de R:

$$\frac{\partial g(R)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{dg}{dR}\hat{R}_x$$, de manera que $$\nabla g(R) = -\nabla' g(R) = \frac{dg(R)}{dR}\hat{R}$$

en particular $\nabla\left(R^n\right) = -\nabla'\left(R^n\right) = nR^{n-1}\hat{R}$

Si $n=-1$: $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

la componente en x es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\left(x-x'\right)}{R^3},$$ derivando de nuevo: $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3\left(x-x'\right)^2}{R^5}$$

similarmente para y y z:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3\left(y-y'\right)^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3\left(z-z'\right)^2}{R^5}$$

$$\therefore \quad \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{3}{R^3} + \frac{3R^2}{R^5} = 0 \Rightarrow \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right) = 0 \quad (\text{para } R \neq 0)$$

Como $\nabla^2 = \nabla\bullet\nabla$ y $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$, entonces

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = 0 = \nabla\bullet\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla\bullet\left(\frac{\hat{R}}{R^2}\right) = -\nabla\bullet\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) \Rightarrow \nabla\bullet\left(\frac{\hat{R}}{R^2}\right) = \nabla\bullet\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla'\bullet\left(\frac{\hat{R}}{R^2}\right) = \nabla'\bullet\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 0$$