

Fuentes I: haces gaussianos.

Versión 2.0

Héctor Cruz Ramírez¹
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
¹hector.cruz@ciencias.unam.mx

septiembre 2017

Índice

1. Objetivos	1
2. Teoría	2
3. Haces gaussianos y lentes	3
4. Experimento	4
5. Criterios para calcular el ancho	4
5.1. Caso I	4
5.1.1. Con la definición $FWe^{-1}M$	5
5.1.2. Con la definición $FWe^{-2}M$	5
5.1.3. Con la definición FWHM	6
5.1.4. Relación entre definiciones	6
5.2. Caso II	6
5.2.1. Con la definición $FWe^{-1}M$	7
5.2.2. Con la definición $FWe^{-2}M$	7
5.2.3. Con la definición FWHM	7
5.2.4. Relación entre definiciones	8
6. Pormenores de la práctica	8
7. Agradecimientos	8

1. Objetivos

En estas notas GB representa al haz gaussiano (amplitud compleja) y I será el modulo cuadrado de GB, esto es $I = |GB|^2$ [1, 2, 3]. I es el patrón de



intensidad que puede ser medido mediante una cámara *CCD* (*charge-coupled device*).

Los objetivos de la práctica son los siguientes:

1. Obtener imágenes con un arreglo de sensores de luz bidimensional mediante el software de *national instruments* [4].
2. Con cada imagen obtenida del patrón de intensidad del *GB* el alumno debe implementar un algoritmo que *localize* el haz gaussiano y que mida el diámetro de la sección transversal con algún criterio (FWHM o $FWe^{-1}M$ o $FWe^{-2}M$).
3. Obtener una secuencia de imágenes a lo largo de la dirección de propagación del *GB* para deducir el radio del cinturón del mismo y la localización de este.
4. Caracterizado el haz gaussiano de un haz láser, debe formar un nuevo haz gaussiano pero con un radio del cinturón de $W_0 = 30\mu\text{m}$ y la misma longitud de onda. El diseño óptico lo tendrá que hacer el estudiante.

2. Teoría

La representación analítica del BG es [3]

$$\text{BG}(\vec{x}) = \frac{A}{q(z)} \exp\left(-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}\right) \exp(-ikz), \quad (1)$$

donde A es una constante, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la magnitud de vector de propagación (λ es la longitud de onda), además

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad (2)$$

y $q = q(z)$ es el factor- q dado por [3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{z + iz_R} \\ &= \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde z_R es el rango de Rayleigh, y se establecen las siguientes relaciones

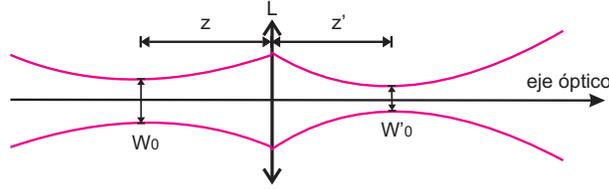


Figura 1: Esquema de la propagación de haces gaussianos a través de una lente de distancia focal f .

$$\begin{aligned}
 W(z) &= W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \\
 R(z) &= z \left[1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right], \\
 \zeta(z) &= \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right), \\
 W_0 &= \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}},
 \end{aligned} \tag{4}$$

y donde W_0 es el radio del cinturón. Es importante notar que la Ecuación (1) el cinturón está en el origen de coordenadas. Los parámetros que caracterizan el BG son: W_0 , λ , z_R , de los cuales sólo dos son independientes; pero, tendremos que considerar un desplazamiento z_0 cuando el cinturón no este centrado en el origen. En estas notas consideraremos los parámetros (W_0, λ, z_0) como los que definen al haz gaussiano. Hay que tener claro que la Ecuación (1) está en términos del campo eléctrico.

3. Haces gaussianos y lentes

Consideramos un haz gaussiano (W_0, λ, z) . Ver Figura (1). Este GB se propaga hasta incidir con una lente positiva (L) de distancia focal f . En este caso z sería la distancia entre la lente y la posición del cinturón del GB. Entonces, el nuevo haz gaussiano, GB', que se transmite después de la lente tendrá los parámetros (W'_0, λ', z') , con z' igual a la distancia entre la lente y la nueva posición del cinturón. Tendremos que se cumplen las siguientes relaciones [3]

$$\begin{aligned}
 W'_0 &= M W_0, \\
 (z' - f) &= M^2(z - f), \\
 2z'_R &= M^2(2z_R), \\
 2\theta'_0 &= \frac{2\theta_0}{M}, \\
 M &= \frac{M_r}{\sqrt{1+r^2}}, \\
 r &= \frac{z_R}{z-f}, \\
 M_r &= \left| \frac{f}{z-f} \right|;
 \end{aligned} \tag{5}$$

y claramente $\lambda = \lambda'$.

4. Experimento

El procedimiento experimental es el siguiente

1. Alinear el sistema óptico con un láser y dos diafragmas.
2. Tomar varias imágenes con arreglo bidimensional de sensores a lo largo de la propagación del GB.
3. Con cada imagen obtener el ancho en campo eléctrico del perfil transversal en un corte en x y un corte en y . El final se tendrá un conjunto de puntos $\{(z_i, W_i)\}$, donde z_i es la distancia de propagación y W_i es el radio de la sección transversal en esa distancia.
4. Realizar la regresión por mínimos cuadrados de $W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z-z_0}{z_R}}$ para obtener los parámetros (W_0, λ, z_0) del haz GB.
5. Hacer un diseño óptico para obtener un haz GB con un $W_0 = 30\mu\text{m}$.
6. Implementar experimentalmente el diseño óptico y medir W_0 .

5. Criterios para calcular el ancho

5.1. Caso I

Si el campo eléctrico es proporcional (se considera otro caso más abajo)

$$E(\rho, t) \propto \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{W_0^2} \right\}, \tag{6}$$



entonces la intensidad

$$I(\rho, t) \propto \exp \left\{ -\frac{2\rho^2}{W_0^2} \right\}. \quad (7)$$

El ancho de $I(\vec{\rho}, t)$ es lo que se mide en el laboratorio, p. ej, con una cámara CCD. En lo siguiente encontraremos W_0 en relación con la definición el ancho adoptada.

5.1.1. Con la definición FWe^{-1}M

Tenemos que por la definición de FWe^{-1}M

$$\begin{aligned} I(\rho_{\pm}, t) = I_0 e^{-1} &\Rightarrow \exp \left\{ -\frac{2\rho_{\pm}^2}{W_0^2} \right\} = e^{-1} \\ &\Rightarrow \rho_{\pm} = \pm \frac{W_0}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \text{FWe}^{-1}\text{M} = \rho_+ - \rho_- \\ &= \frac{2W_0}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \text{HWe}^{-1}\text{M} = \frac{W_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Por lo tanto

$$W_0 = \sqrt{2} \times \text{HWe}^{-1}\text{M}. \quad (9)$$

5.1.2. Con la definición FWe^{-2}M

Tenemos que por la definición de FWe^{-2}M

$$\begin{aligned} I(\rho_{\pm}, t) = I_0 e^{-2} &\Rightarrow \exp \left\{ -\frac{2\rho_{\pm}^2}{W_0^2} \right\} = e^{-2} \\ &\Rightarrow \rho_{\pm} = \pm W_0 \\ &\Rightarrow \text{FWe}^{-2}\text{M} = \rho_+ - \rho_- \\ &= 2W_0 \\ &\Rightarrow \text{HWe}^{-2}\text{M} = W_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Por lo tanto

$$W_0 = \text{HWe}^{-2}\text{M}. \quad (11)$$

5.1.3. Con la definición FWHM

Tenemos que por la definición de FWHM

$$\begin{aligned} I(\rho_{\pm}, t) = I_0 2^{-1} &\Rightarrow \exp\left\{-\frac{2\rho_{\pm}^2}{W_0^2}\right\} = 2^{-1} \\ &\Rightarrow \rho_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\ln(2)}W_0}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \text{FWHM} = \rho_+ - \rho_- \\ &= 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}W_0 \\ &\Rightarrow \text{HWHM} = \sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}W_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Por lo tanto

$$W_0 = \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}}\text{HWHM}. \tag{13}$$

5.1.4. Relación entre definiciones

Por lo anterior

$$\begin{aligned} W_0 &= \sqrt{2} \times \text{HWe}^{-1}\text{M} = \text{HWe}^{-2}\text{M} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}}\text{HWHM} \end{aligned} \tag{14}$$

5.2. Caso II

Si el campo eléctrico es proporcional

$$E(\rho, t) \propto \exp\left\{-\frac{2\rho^2}{W_0^2}\right\}, \tag{15}$$

entonces la intensidad

$$I(\rho, t) \propto \exp\left\{-\frac{4\rho^2}{W_0^2}\right\}. \tag{16}$$

5.2.1. Con la definición FWe^{-1}M

Tenemos que por la definición de FWe^{-1}M

$$\begin{aligned}
 I(\rho_{\pm}, t) = I_0 e^{-1} &\Rightarrow \exp\left\{-\frac{4\rho_{\pm}^2}{W_0^2}\right\} = e^{-1} \\
 &\Rightarrow \rho_{\pm} = \pm \frac{W_0}{2} \\
 &\Rightarrow \text{FWe}^{-1}\text{M} = \rho_+ - \rho_- \\
 &= W_0 \\
 &\Rightarrow \text{HWe}^{-1}\text{M} = \frac{W_0}{2}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Por lo tanto

$$W_0 = 2 \times \text{HWe}^{-1}\text{M}. \tag{18}$$

5.2.2. Con la definición FWe^{-2}M

Tenemos que por la definición de FWe^{-2}M

$$\begin{aligned}
 I(\rho_{\pm}, t) = I_0 e^{-2} &\Rightarrow \exp\left\{-\frac{4\rho_{\pm}^2}{W_0^2}\right\} = e^{-2} \\
 &\Rightarrow \rho_{\pm} = \pm \frac{W_0}{\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow \text{FWe}^{-2}\text{M} = \rho_+ - \rho_- \\
 &= \frac{2W_0}{\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow \text{HWe}^{-2}\text{M} = \frac{W_0}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Por lo tanto

$$W_0 = \sqrt{2} \times \text{HWe}^{-2}\text{M} \tag{20}$$

5.2.3. Con la definición FWHM

Tenemos que por la definición de FWHM

$$\begin{aligned}
 I(\rho_{\pm}, t) = I_0 2^{-1} &\Rightarrow \exp\left\{-\frac{4\rho_{\pm}^2}{W_0^2}\right\} = 2^{-1} \\
 &\Rightarrow \rho_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\ln(2)}W_0}{2} \\
 &\Rightarrow \text{FWHM} = \rho_+ - \rho_- \\
 &= \sqrt{\ln(2)}W_0 \\
 &\Rightarrow \text{HWHM} = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{2} W_0.
 \end{aligned} \tag{21}$$



Por lo tanto

$$W_0 = \frac{2}{\sqrt{\ln(2)}} \text{HWHM}. \quad (22)$$

5.2.4. Relación entre definiciones

Por lo anterior

$$\begin{aligned} W_0 &= 2 \times \text{HWe}^{-1}M = \sqrt{2} \times \text{HWe}^{-2}M \\ &= \frac{2}{\sqrt{\ln(2)}} \text{HWHM} \end{aligned} \quad (23)$$

6. Pormenores de la práctica

La práctica es de tres sesiones de laboratorio.

7. Agradecimientos

Estas notas fueron realizadas con el apoyo de los proyectos PAPIME PE106415 (version 1) y PE105917 (version 2). Agradecemos a los estudiantes Samuel Corona Aquino, Javier Alejandro López, Alfaro Jorge Arturo Monroy Ruz y Francisco Javier Morelos Medina por su contribución a la elaboración de estas notas.

Referencias

- [1] E. Hecht, "Optics," Addison-Wesley; 4 edition (2001).
- [2] B.D. Guenther, "Modern Optics," Oxford University Press; 2 edition (2015).
- [3] B.E.A Saleh y M.C. Teich, "Fundamentals of photonics," Wiley-Interscience; 2 edition (2007).
- [4] <http://www.ni.com>