VARIACIÓN DE FUNCIONES

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

EJEM. La suma de dos números es 20. Obtener dichos números de tal manera que su producto sea máximo.

Sol.

$$x + y = 20$$

$$y = 20 - x ....(\text{a})$$

$$P = xy \quad sea\ máximo$$

$$Sustituyendo\ (a)$$

$$P = x(20 - x)$$

$$P = 20x - x^2$$

$$P(x) = -x^2 + 20x$$

$$P'(x) = -2x + 20$$

$$-2x + 20 = 0$$

$$x = 10$$

$$P''(x) = -2 < 0$$

$$\therefore Se\ tiene\ un\ máximo\ cuando$$

$$x = 10$$

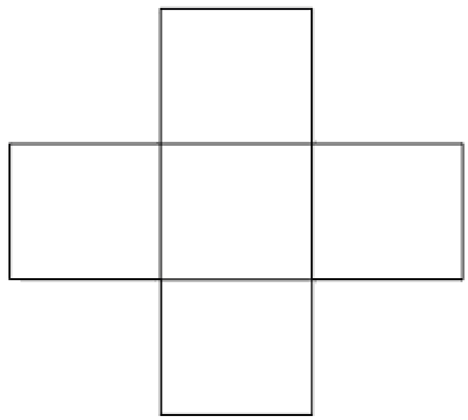
$$y = 10$$

EJEM. Se quiere construir una caja rectangular con base cuadrada sin tapa. Calcular el volumen de la caja que se puede obtener con 1,200 cm² de material y la mayor capacidad posible.

$$A = L^2 + 4LH \ldots\ldots(1)$$

$$= 1200cm^2$$

$$V = L^2 H \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$



$$Despejando \;\; de \;\; 1$$

$$H = \frac{1200 - L^2}{4L}$$

$$Sustituyendo \;\; en \;\; 2$$

$$V = L^2\left(\frac{1200 - L^2}{4L}\right)$$

$$= \frac{1200L^2 - L^4}{4L}$$

$$= 300L - \frac{L^3}{4}$$

$$V(L) = 300L - \frac{L^3}{4}$$

Derivando

$$V'(L) = 300 - \frac{3}{4}L^2$$

$$= 300 - \frac{3}{4}L^2 = 0$$

$$L^2 = \frac{(-4)(-300)}{3}$$

$$= 400$$

$$L = \pm 20$$

$$V''(L) = -\frac{4}{6}L = -\frac{3}{2}L$$

Sust. 20 *en la* 2*a. derivada*

$$V''(20) = -\frac{3}{2}(20) = -30 < 0 \quad \therefore \textit{Se tiene un máximo}$$

$$V = 20^2\left(\frac{1200 - 20^2}{4(20)}\right)$$

$$\therefore V = 4000cm^3$$

EJEMP. Analizar la variación de la siguiente función

$$y = \frac{12x}{x^2+9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2+9\right)(12) - 12x(2x)}{\left(x^2+9\right)^2}$$

$$= \frac{12x^2+108-24x^2}{\left(x^2+9\right)^2}$$

$$= \frac{-12x^2+108}{\left(x^2+9\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(x^2+9\right)^2(-24x) - \left(-12x^2+108\right)\left(2\left(x^2+9\right)(2x)\right)}{\left(\left(x^2+9\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+9\right)\left[\left(x^2+9\right)(-24x) - \left(-12x^2+108\right)(4x)\right]}{\left(x^2+9\right)^4}$$

$$= \frac{-24x^3-216x+48x^3-432x}{\left(x^2+9\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24x^3-648x}{\left(x^2+9\right)^3}$$

Valores críticos:

$$-12x^2+108=0$$

$$-12x^2=-108$$

$$x^2=\frac{-108}{-12}$$

$$x^2=9$$

$$x=3$$

$$x=-3$$

Puntos de inflexión:

$$24x^3-648x=0$$

$$x\left(24x^2-648\right)=0$$

$$x(24)\left(x^2-27\right)=0$$

$$x=0$$

$$x=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$x=-\sqrt{27}=-3\sqrt{3}$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$\left(-\infty,-3\sqrt{3}\right)$	Existe	$-$	$-$	La función es decreciente, cóncava hacia abajo. $PI\left(-3\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$
$\left(-3\sqrt{3},-3\right)$	Existe	$-$	$+$	La función es decreciente, cóncava hacia arriba. Mínimo $P\left(-3,-2\right)$
$\left(-3,0\right)$	Existe	$+$	$+$	La función es creciente, cóncava hacia arriba. $PI\left(0,0\right)$
$\left(0,3\right)$	Existe	$+$	$-$	La función es creciente, cóncava hacia abajo. Máximo $P\left(3,2\right)$
$\left(3,3\sqrt{3}\right)$	Existe	$-$	$-$	La función es decreciente, cóncava hacia abajo. $PI\left(3\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$
$\left(3\sqrt{3},\infty\right)$	Existe	$-$	$+$	La función es decreciente, cóncava hacia arriba.