LA RECTA

Una recta queda definida en el espacio si se conocen:

1) Un punto de ella y la dirección de la recta, definiéndose ésta con un vector; o bien
2) Dos puntos de la recta; o
3) Dos planos no paralelos que la contengan.

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UNA RECTA

Una recta puede ser representada de las siguientes formas:

REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

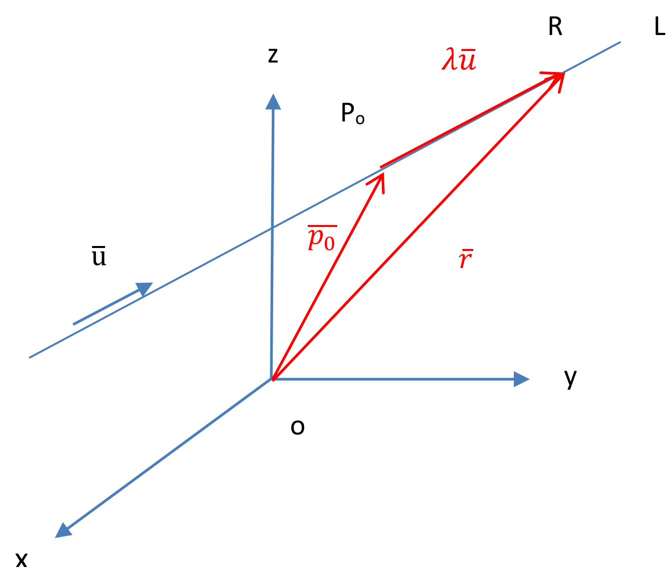
Para determinar una ecuación vectorial de una recta se necesitan como datos las coordenadas de un punto de ella (o el vector de posición de dicho punto) y un vector que indique la dirección de la recta, conocido como vector director.

Sea el punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$, con vector de posición

$\bar{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, un punto de la recta L y sea el vector $\bar{u} = (a, b, c)$ un vector director de L.

Cualquier punto R que pertenezca a L puede obtenerse como la suma del vector $\bar{p}_0$ más un vector con la dirección de $\bar{u}$ y con la magnitud necesaria $(\lambda\bar{u})$ para alcanzar al punto R, es decir, $\bar{r} = \bar{p}_0 + \lambda\bar{u} \quad \lambda \in R$.

Gráficamente:



Entonces, la ecuación vectorial de L queda

$$\bar{r} = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(a, b, c) \quad \lambda \epsilon R$$

$$\bar{r} = (x_o, y_o, z_o) + (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \quad \lambda \epsilon R$$

$$\bar{r} = (x_o + \lambda a, y_o + \lambda b, z_o + \lambda c) \quad \lambda \epsilon R$$

REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

Una vez conocida la ecuación vectorial de la recta L es fácil determinar su correspondiente ecuación paramétrica, por igualdad de vectores de la ecuación vectorial.

Como el vector $\bar{r}$ representa un punto cualquiera de L, $\bar{r}$ = (x, y, z), entonces

$$(x, y, z) = (x_o + \lambda a, y_o + \lambda b, z_o + \lambda c) \quad \lambda \epsilon R$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$L: \begin{cases} x = x_o + \lambda a \\ y = y_o + \lambda b \qquad \lambda \epsilon R \\ z = z_o + \lambda c \end{cases}$$

Conviene señalar que una recta NO tiene una sola ecuación vectorial ya que existe una infinidad de vectores directores $\bar{u}$; análogamente, la representación paramétrica tampoco es única.

Además, nótese que cualquier ecuación vectorial de una recta y sus correspondientes ecuaciones paramétricas tienen UN solo parámetro.

REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE LA RECTA

Como se vio previamente, existen dos formas de representación cartesiana de una recta: la forma simétrica y la general.

a) Forma simétrica de las ecuaciones de la recta L.-

Se parte de las ecuaciones paramétricas de una recta.

$$L: \begin{cases} x = x_o + \lambda a \\ y = y_o + \lambda b \\ z = z_o + \lambda c \end{cases} \qquad \lambda \epsilon R$$

Si las tres componentes del vector director (a, b, c) son diferentes de cero, puede despejarse el parámetro de cada ecuación e igualarse. Así,

$$L: \{\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Componentes nulas en un vector director

Si en cualquier vector director de una recta una de sus componentes es nula, esto significa que dicho vector es paralelo al plano coordenado de las variables cuyas componentes son diferentes de cero.

Si cualquier vector director de una recta tiene dos componentes nulas, ese vector es paralelo al eje coordenado de la variable para la cual el vector director tiene componente no nula.

Si un vector director tuviera sus tres componentes nulas, indicaría una dirección no determinada.

b) Forma general de las ecuaciones de la recta.-
Puede escribirse de la siguiente manera:

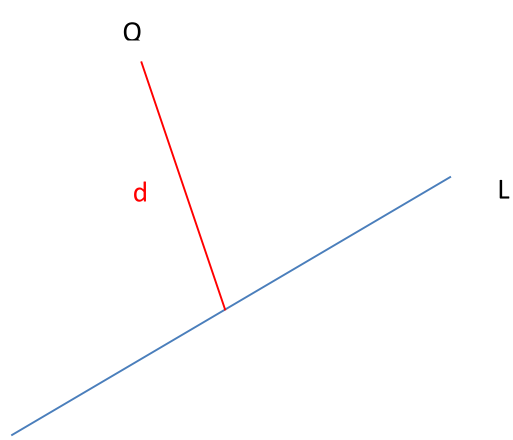
$$L: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones cartesianas representa un plano, por lo que los puntos que satisfagan simultáneamente a los dos planos constituyen la recta de intersección de dichos planos.

Nota.- También existe una infinidad de parejas de ecuaciones cartesianas de una recta.

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

Es la distancia mínima medida perpendicularmente del punto a la recta.



Para calcular la distancia entre un punto Q y una recta L se utiliza la expresión

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p})\ x\ \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

donde $\bar{q}$ es el vector de posición del punto Q,

$\bar{p}$ es el vector de posición de un punto P cualquiera de la recta L, y

$\bar{u}$ es un vector director de L.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Es el ángulo que forman sus vectores directores:

$$\theta = \text{ang}\cos\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

donde $\bar{u}$ es un vector director de una de las rectas y $\bar{v}$ es un vector director de la otra.

En realidad, dos rectas forman dos ángulos, los cuales son suplementarios, es decir, suman 180º.

CONDICIONES DE PERPENDICULARIDAD, PARALELISMO Y COINCIDENCIA ENTRE DOS RECTAS

Sean las rectas L y M con vectores directores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, respectivamente.

1.- L y M son perpendiculares $\leftrightarrow$ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

2.- L y M son paralelas si $\bar{u} = \lambda\bar{v}$, $\lambda \varepsilon R$, $\lambda \neq 0$ ó

$$\bar{u} \text{ x } \bar{v} = \bar{0}$$

3.- L y M son coincidentes si cumplen las condiciones de paralelismo, y un punto cualquiera de L pertenece también a M. Es decir, se trata de la misma recta representada con dos diferentes expresiones.

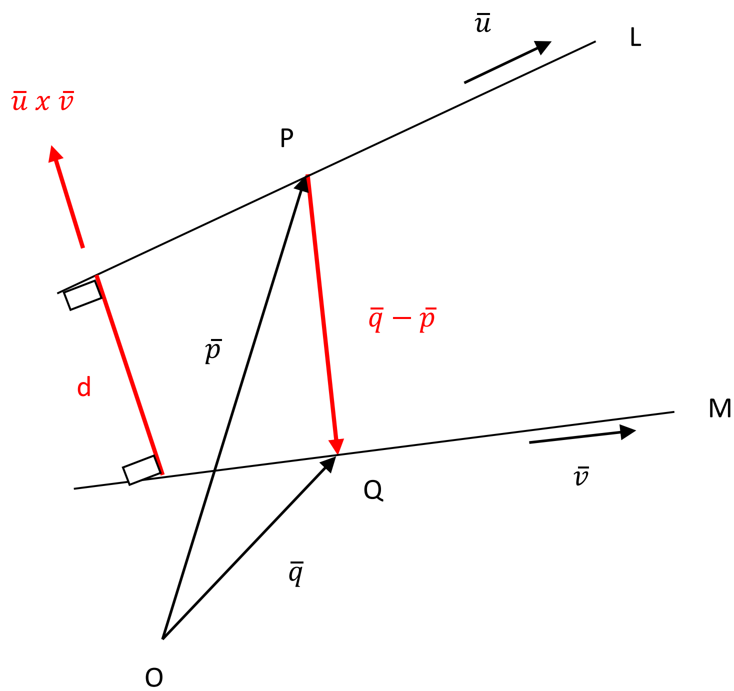
INTERSECCIÓN ENTRE DOS RECTAS

Cuando dos rectas en el espacio se intersectan se dice que se cortan, y si no hay intersección entonces se cruzan.

Para determinar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas que se cortan, debe trabajarse simultáneamente con sus expresiones analíticas. Para mayor facilidad, se recomienda usar las expresiones paramétricas de ambas rectas.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Se llama distancia entre dos rectas a la mínima distancia entre ellas. Si las rectas se cortan, la mínima distancia es cero; pero si son paralelas o se cruzan, la distancia mínima es la que se mide perpendicularmente a ambas. Gráficamente:



La distancia es igual al módulo de la proyección del vector $\bar{q}-\bar{p}$ en la dirección del vector $\bar{u}\,x\,\bar{v}$, es decir, es igual al valor absoluto de la componente escalar del vector $\bar{q} - \bar{p}$ en la dirección de $\bar{u} \times \bar{v}$. Simbólicamente:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u} \times \bar{v}|}{|\bar{u} \times \bar{v}|}$$

Si las rectas son paralelas, lo aconsejable es calcular la distancia entre ellas utilizando la expresión para obtener la distancia de un punto de ellas a la otra recta.

EL PLANO

La posición de un plano queda determinada si se conoce:

1) Un punto de él y dos vectores directores no paralelos, o
2) Tres puntos no alineados del plano, o
3) Una recta contenida en él y un punto del plano que no pertenezca a la recta, o
4) Dos rectas que se cortan, contenidas en el plano
5) Dos rectas paralelas que pertenezcan al plano
6) Un punto del plano y un vector perpendicular a él (vector normal).

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UN PLANO

Un plano puede representarse analíticamente de las siguientes formas:

(archivo representación analítica de un plano)

REPRESENTACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Para establecer una ecuación vectorial del plano P se requiere contar con las coordenadas de un punto A que pertenezca al plano, y con las componentes de dos vectores directores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ paralelos a un plano, pero no paralelos entre sí.

$$\bar{r} = \bar{a} + m\bar{u} + n\bar{v} \quad \text{m,n ε R}$$

Como en la recta, existe una infinidad de ecuaciones vectoriales para un mismo plano.

Nótese que las ecuaciones vectoriales de un plano contienen dos parámetros, a diferencia de las de la recta en las que interviene un solo parámetro.

Lo representado en la figura es sólo un segmento del plano, ya que su extensión es infinita.

REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DEL PLANO

Para establecer las tres ecuaciones paramétricas del plano basta, como en la recta, con usar el concepto de igualdad entre vectores.

Así, si $\bar{r}$ es el vector de posición del punto R(x, y, z), $\bar{a}$ es el vector de posición del punto A(x_o, y_o, z_o), $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, se tiene que

$$\bar{r} = \bar{a} + m\bar{u} + n\bar{v} \quad m,n \in R$$

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + m(u_1, u_2, u_3) + n(v_1, v_2, v_3) \quad m,n \in R$$

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + (mu_1, mu_2, mu_3) + (nv_1, nv_2, nv_3) \quad m,n \in R$$

$$(x, y, z) = (x_o + mu_1 + nv_1, y_o + mu_2 + nv_2, z_o + mu_3 + nv_3) \quad m,n \in R$$

$$\pi: \begin{cases} x = x_o + mu_1 + nv_1 \\ y = y_o + mu_2 + nv_2 \quad m,n \in R \\ \end{cases}$$

$$z = z_{o} + mu_3 + nv_3$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano π.

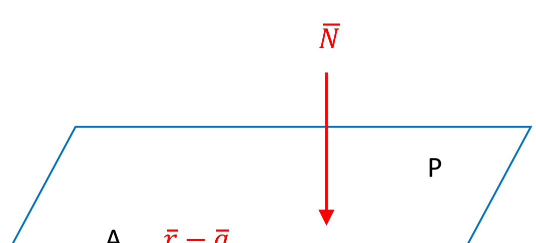
REPRESENTACIÓN CARTESIANA DEL PLANO

Para establecer la representación cartesiana del plano se pueden eliminar los parámetros usando las tres ecuaciones paramétricas. El resultado es una ecuación.

Otra manera sería la siguiente: como se estableció previamente (ver condición 6) la localización de un plano se determina si se conoce un punto de él y un vector perpendicular al plano (vector normal).

Sea el plano P de la figura. De dicho plano se conoce el punto A o su vector de posición $\bar{a}$ y un vector normal $\bar{N}$.

Como el vector normal es perpendicular al plano P, cualquier segmento dirigido que tenga su punto origen en A y su extremo en cualquier punto R que pertenezca al plano también será perpendicular a $\bar{N}$, es decir, $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{N} = 0$ que es la ecuación normal del plano.



Del desarrollo de esta ecuación puede obtenerse la ecuación cartesiana del plano.

Así, si el punto A tiene por vector de posición $\bar{a} = (x_o, y_o, z_o)$, el vector normal es $\bar{N} = (A, B, C)$ y el vector de posición del punto R es $\bar{r} = (x, y, z)$, entonces

$[(x, y, z)$-$(x_o, y_o, z_o)]\cdot$ (A, B, C) = 0

(x - x_O, y - y_o, z - z_o) · (A, B, C) = 0

A(x - x_O) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0

Ax - A x_O + By - B y_o+ Cz - C z_o = 0

Ax + By + Cz - A x_O- B y_o- C z_o = 0

Si - A x_O- B y_o- C z_o = -$(x_o, y_o, z_o)\cdot(A, B, C)$ = D

Ax + By + Cz + D = 0

que es la ecuación cartesiana del plano

Si en la ecuación cartesiana D = 0, significa que el plano contiene al origen.

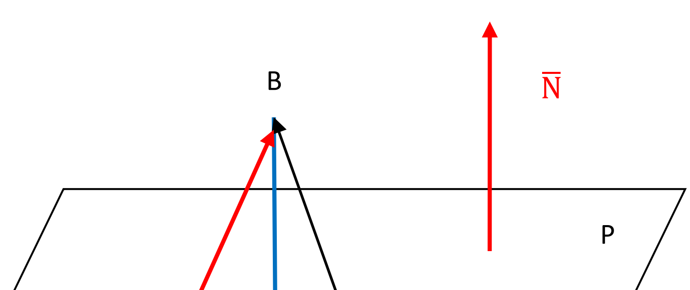
Si uno de los coeficientes A, B o C es nulo y los otros dos no, el plano tiene un vector normal paralelo a un plano coordenado, por lo que el plano será perpendicular a dicho plano coordenado.

Si dos de los coeficientes A, B o C son nulos, el vector normal al plano es paralelo a un eje coordenado, por lo que el plano será paralelo al plano coordenado que es perpendicular al vector normal.

Si los tres coeficientes A, B y C valieran cero, el vector normal sería nulo e indicaría una dirección no determinada.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Es la distancia más corta entre un punto y un plano. Se mide perpendicularmente al plano. Gráficamente:



De la figura se observa que la distancia del punto B al plano es igual al módulo de la proyección del vector $\bar{b} - \bar{a}$ en la dirección del vector $\bar{N}$. Esta distancia es igual al valor absoluto de la componente escalar de $\bar{b} - \bar{a}$ en la dirección de $\bar{N}$, es decir,

$$d = \frac{\left|\left(\bar{b} - \bar{a}\right) \cdot \bar{N}\right|}{|\bar{N}|}$$

INTERSECCIÓN ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA

La forma de determinar la intersección entre un plano y una recta es hacer simultáneas sus representaciones analíticas.

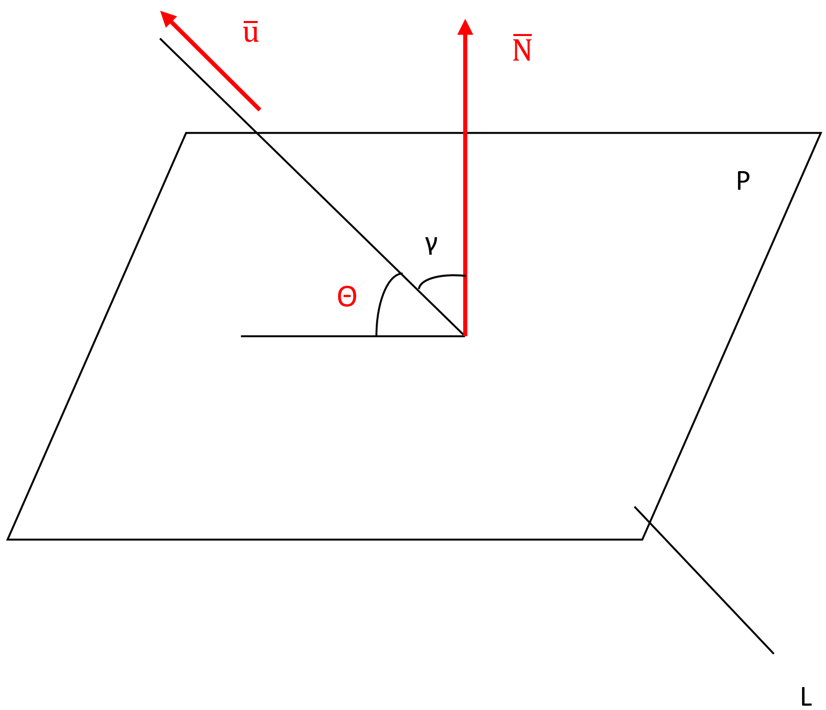
Es conveniente trabajar con la ecuación cartesiana del plano y con las ecuaciones paramétricas de la recta, ya que al sustituir los valores de las variables x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano, el problema se reduce a una ecuación con una incógnita (el parámetro).

También se puede trabajar con la ecuación cartesiana del plano y con la ecuación general de la recta (obteniéndose un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas).

Si el sistema tiene una solución (sistema compatible determinado), el plano y la recta tienen un punto de intersección; si el sistema tiene infinidad de soluciones (sistema compatible indeterminado), la recta está contenida en el plano; y si el sistema no tiene solución (sistema incompatible), el plano y la recta son paralelos.

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Es el ángulo que forma la recta con su proyección perpendicular sobre el plano. Gráficamente:



$$\gamma = \text{ang}\cos\frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|}$$

como $\gamma + \Theta = 90^{o} \rightarrow \Theta = 90^{o} - \gamma$, o bien,

como $\gamma + \Theta = 90^{o} \rightarrow \cos\gamma = \text{sen}\,\Theta$

$$\therefore\quad \Theta = \text{ang sen}\,\frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|}$$

Donde $\overline{\mathrm{N}}$ es un vector normal al plano y $\overline{\mathrm{u}}$ es un vector director de la recta.

CONDICIONES DE PERPENDICULARIDAD, PARALELISMO Y CONTINENCIA ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA

Sean el plano P con vector normal $\overline{\mathrm{N}}$ y la recta L con vector director $\overline{\mathrm{u}}$. Entonces, si:

1.- $\overline{\mathrm{N}} = \lambda\overline{\mathrm{u}}$ $\quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \varepsilon R$ ó $\overline{\mathrm{N}} \times \overline{\mathrm{u}} = \overline{0}$, la recta y el plano son perpendiculares.

2.- $\overline{\mathrm{N}} \cdot \overline{\mathrm{u}} = 0$, la recta y el plano son paralelos.

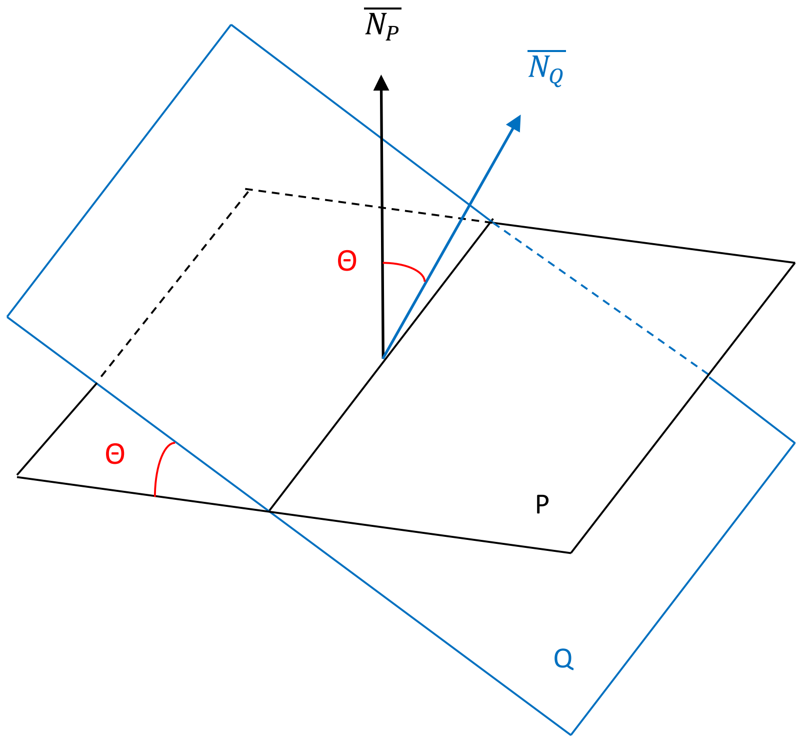
3.- $\overline{\mathrm{N}} \cdot \overline{\mathrm{u}} = 0$ y un punto de la recta pertenece al plano, la recta está contenida en el plano.

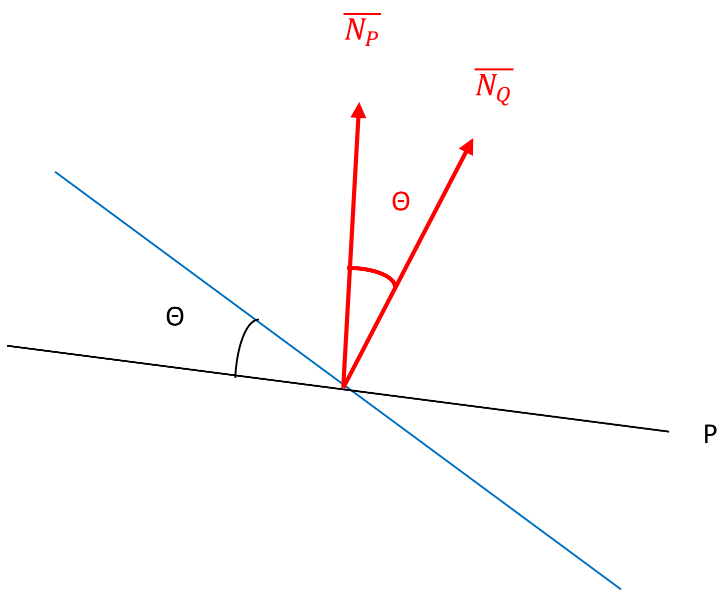
RELACIONES ENTRE PLANO Y PLANO

Dos planos en el espacio sólo pueden ser paralelos o cortarse.

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Sean los planos P y Q mostrados en las siguientes figuras





El ángulo Θ formado por los planos es el formado por sus vectores normales, es decir,

$$\Theta = \text{ang}\cos\frac{\overline{N}_P \cdot \overline{N}_Q}{|\overline{N}_P||\overline{N}_Q|}$$

CONDICIONES DE PERPENDICULARIDAD, PARALELISMO Y COINCIDENCIA ENTRE DOS PLANOS

Sean los planos P y Q con vectores normales $\overline{N}_P$ y $\overline{N}_Q$, respectivamente. Entonces, si:

1.- $\overline{N}_P \cdot \overline{N}_Q = 0$, los planos son perpendiculares.

2.- $\overline{N}_P = \lambda\, \overline{N}_Q \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in R \quad$ ó $\quad \overline{N}_P \times \overline{N}_Q = \overline{0}$, los planos son paralelos.

3.- $\overline{N}_P = \lambda\, \overline{N}_Q \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in R \quad$ ó $\quad \overline{N}_P \times \overline{N}_Q = \overline{0}$, y un punto de P pertenece también a Q, se trata del mismo plano, es decir, los planos son coincidentes.

INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS

La intersección entre dos planos no paralelos es una recta.

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

La distancia entre dos planos paralelos puede obtenerse como la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro.