

CURVAS EN EL PLANO

Una curva es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que satisfacen alguna de las siguientes tres condiciones:

1. Una ecuación cartesiana del tipo

$$f(x, y) = 0$$

2. Una ecuación vectorial en la que interviene un parámetro.

$$\vec{r} = [x(t), y(t)] \quad t \in R$$

$$\vec{r} = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} \quad t \in R$$

3. Dos ecuaciones paramétricas con un solo parámetro.

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in R$$

Una ecuación vectorial de una curva es una regla matemática que **indica el desplazamiento** de un vector de posición para que su extremo “barra” la curva en toda su longitud.

Es común usar la letra t para representar el parámetro ya que en muchas aplicaciones el parámetro suele ser el tiempo.

Una vez obtenida la ecuación vectorial de una curva es fácil representarla de manera paramétrica, y viceversa.

A la elección del parámetro suele llamarse **parametrización**.

PARAMETRIZACIÓN

Para parametrizar curvas expresadas en forma cartesiana (en canónica u ordinaria) conviene recurrir indirectamente a la trigonometría.

Así, para parametrizar circunferencias y elipses se sugiere utilizar la identidad trigonométrica

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \alpha \in [0, 2\pi) \quad \text{o bien,}$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (preferentemente, ver ventaja de una parametrización sobre otra *)

donde el parámetro $\theta \in [0, 2\pi)$

Para parametrizar hipérbolas se usa la identidad

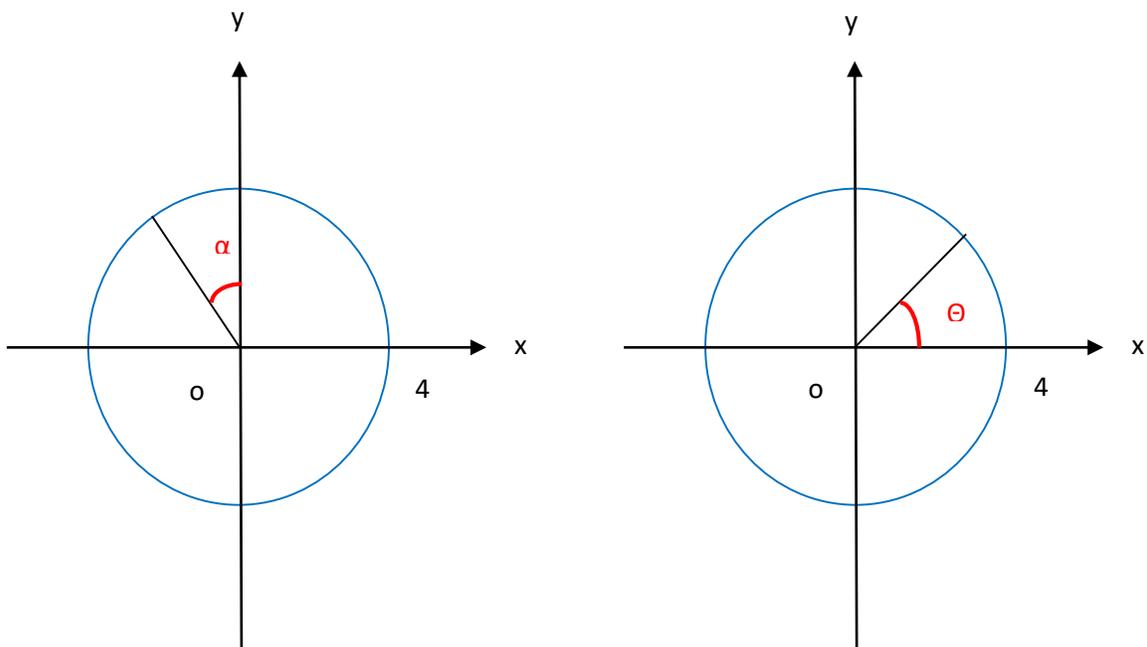
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$ (preferentemente) o bien,

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1 \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Para parametrizar parábolas se asigna el parámetro real a la variable elevada al cuadrado. Posteriormente se despeja la otra variable en función del mismo parámetro.

* VENTAJA DE UNA PARAMETRIZACIÓN SOBRE OTRA

La ventaja de una parametrización sobre otra radica en el hecho de que el ángulo Θ corresponde al que se mide desde el eje de las abscisas y hasta el radio vector del punto en estudio, mientras que α es el ángulo medido a partir del eje de las ordenadas y hasta el radio vector que une al origen con el punto de estudio, ambos medidos en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Gráficamente:



CURVAS EN EL ESPACIO

Una curva es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que satisfacen alguna de las siguientes tres condiciones:

1. Dos ecuaciones cartesianas del tipo

$$f(x, y, z) = 0$$

2. Una ecuación vectorial en la que interviene un parámetro.

$$\vec{r} = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

3. Tres ecuaciones paramétricas con un parámetro.

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$