6.-ÁLGEBRA VECTORIAL

CANTIDAD ESCALAR

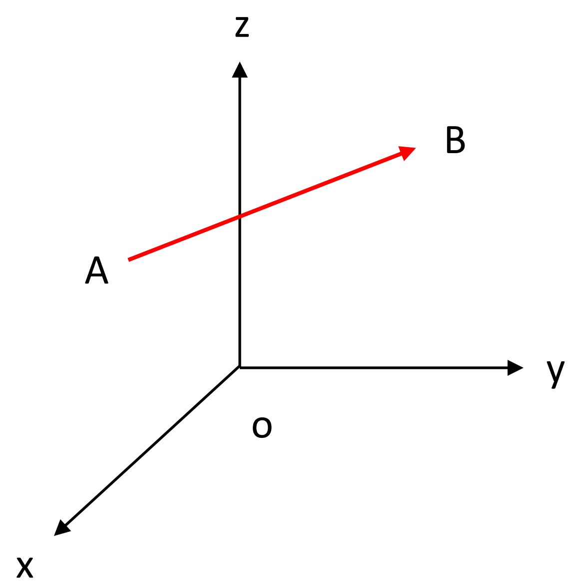
Es aquella que sólo posee magnitud.

CANTIDAD VECTORIAL

Es aquella que posee magnitud, dirección y sentido. A los vectores se les representa con una línea arriba de la letra (testa).

SEGMENTO DIRIGIDO

Es el segmento de recta en el que se asigna un punto inicial y un punto final. En forma gráfica un segmento se representa con una flecha. En la siguiente figura el punto inicial (origen) es A y el punto final (extremo) es B.



REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN VECTOR

Un vector tiene magnitud, dirección y sentido, pero no importa su posición en el espacio, por lo que puede representarse con el segmento dirigido que convenga (vectores libres).

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR

Para representar analíticamente a un vector se usa una terna ordenada de números reales $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a los cuales se les denomina componentes escalares del vector o números directores del vector.

COMPONENTES ESCALARES DE UN VECTOR

Sea el vector $\bar{v}$ = (v_1, v_2, v_3). Si dicho vector se representa por el segmento dirigido $\overline{AB}$ donde su punto inicial es $A(a_1, a_2, a_3)$ y su punto final $B(b_1, b_2, b_3)$, las componentes escalares del vector $\bar{v}$ son $v_1 = b_1 - a_1$, $v_2 = b_2 - a_2$ y $v_3 = b_3 - a_3$.

VECTOR NULO

Se llama vector nulo o vector cero a $\bar{0}$ = (0, 0, 0). El vector nulo tiene magnitud nula y no tiene definida su dirección ni su sentido.

VECTOR DE POSICIÓN

Se llama vector de posición de un punto P $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ aquel que tiene su origen en el origen de coordenadas y su punto extremo en el punto P, por lo que las componentes escalares del vector de posición del punto P son iguales a las coordenadas de P, es decir, $\bar{p}$ = $(p_1,\ p_2,\ p_3)$.

MAGNITUD O MÓDULO DE UN VECTOR

La magnitud, módulo o norma de un vector es el "tamaño" de cualquier segmento dirigido que lo representa. La determinación del módulo puede hacerse por métodos gráficos; en forma analítica se obtiene de la siguiente manera:

$$|\bar{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + \ {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

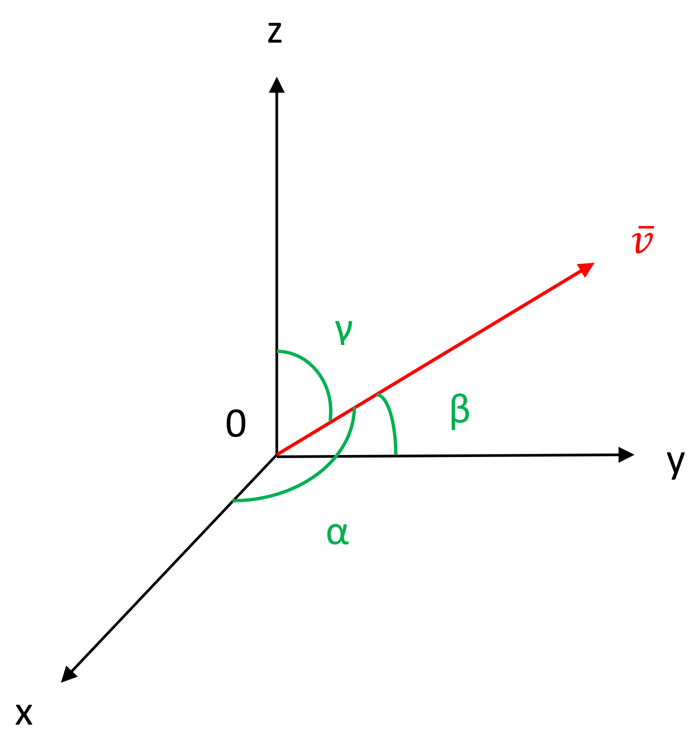
donde a_1, a_2 y a_3 son las componentes escalares del vector.

VECTOR UNITARIO

Un vector es unitario si su módulo es igual a la unidad. Los vectores unitarios i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) y k = (0, 0, 1) son muy útiles en el álgebra vectorial y son tan conocidos que se permite dejar de escribir la línea superior arriba de las letras i, j o k.

ÁNGULOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Son los que forma un segmento dirigido que representa a dicho vector con los ejes coordenados. Los ángulos directores varían entre 0^o y 180^o, y permiten determinar la dirección y sentido de un vector.



COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Son los cosenos de sus ángulos directores. Se obtienen de la siguiente manera:

$$\cos \propto = \frac{a_1}{|\bar{a}|} \qquad \cos \beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} \qquad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}$$

Un coseno director puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de que su ángulo director correspondiente sea agudo, obtuso o recto, respectivamente.
Si un coseno director es igual a 1, el ángulo director es 0^o, y si el coseno director es -1, el ángulo director es 180^o.
Los vectores unitarios i, j, k tienen la dirección y el sentido de los ejes de las abscisas, de las ordenadas y de las cotas, respectivamente.
Un vector nulo no tiene dirección y su sentido es indeterminado.

TEOREMA

Sea el vector no nulo $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$. Entonces sus cosenos directores cumplen con

$$\sqrt{cos^2 \propto\ + cos^2\beta\ +\ cos^2\gamma} = 1$$

COROLARIO.- Un vector unitario tiene por componentes escalares sus cosenos directores.

IGUALDAD DE VECTORES

Dos vectores $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $\bar{b}$ = $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ son iguales si y sólo si $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

ADICIÓN DE VECTORES

La adición de dos vectores es la operación entre

$\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $\bar{b}$ = $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ /

$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

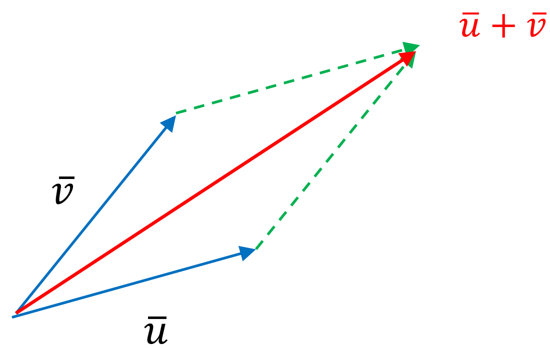
PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Sean los vectores $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b}$ = $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ y $\bar{c}$ = $(c_1,\ c_2,\ c_3)$

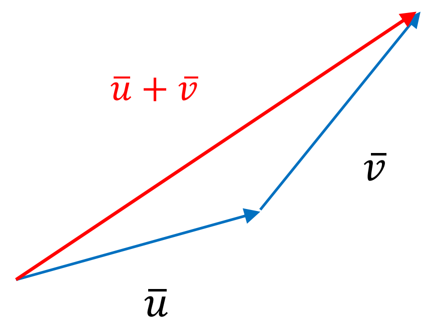
1) cerradura $\bar{a} + \bar{b}$ es un vector
2) asociatividad $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$
3) ∃ elemento idéntico $\exists\ \bar{0} = (0, 0, 0)\ /\ \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$
4) ∃ elementos inversos $\forall\ \bar{a}\ \exists\ -\bar{a}\ /\ \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$
5) conmutatividad $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA ADICIÓN DE VECTORES

1.- Regla del paralelogramo.



2.- Regla del triángulo.



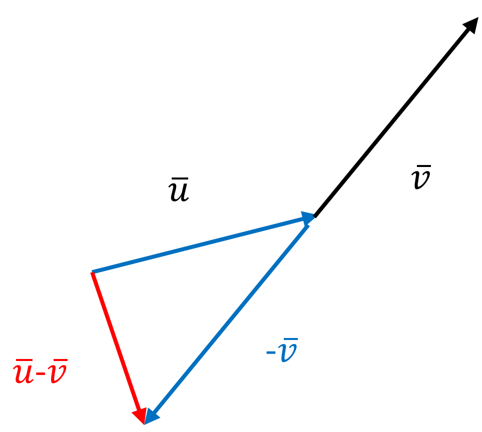
RESTA DE VECTORES

Sean los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Se llama resta a la operación $\bar{a}$ - $\bar{b}$ = $\bar{a}$ + (-$\bar{b}$) donde (-$\bar{b}$) es el inverso aditivo de $\bar{b}$.

Sean $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA RESTA DE VECTORES



MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sean el vector $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ y el escalar α ε R. Se llama multiplicación de un vector por un escalar (multiplicación por un escalar) a la operación

$$\alpha\bar{a} = (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3)$$

PROPIEDADES DE LA MULT. POR UN ESCALAR

Sean los vectores $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ y los escalares α, β ε R

1) α $\bar{a}$ es un vector.
2) (α + β) $\bar{a}$ = α $\bar{a}$ + β $\bar{a}$
3) α ($\bar{a}$ + $\bar{b}$) = α $\bar{a}$ + α $\bar{b}$
4) α (β$\bar{a}$) = (αβ) $\bar{a}$
5) 1· $\bar{a}$ = $\bar{a}$

Otras propiedades.- Sean $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y α ε R

1) 0 $\bar{a}$ = $\bar{0}$
2) α $\bar{0}$ = $\bar{0}$

Además se cumple lo siguiente: sean $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ y α ε R. Entonces α $\bar{a}$

1) Tiene módulo |α||$\bar{a}$|
2) Si α > 0, el vector α $\bar{a}$ tiene la misma dirección y sentido que $\bar{a}$.
3) Si α < 0, el vector α $\bar{a}$ tiene la misma dirección, pero sentido opuesto que $\bar{a}$.

VECTOR UNITARIO

Sea el vector no nulo $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$. Un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\bar{a}$ es

$$\bar{u} = \frac{1}{|\bar{a}|}(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

REPRESENTACIÓN TRINÓMICA DE UN VECTOR

Consiste en la utilización de los vectores unitarios i, j, k, y las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar.

Sea $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ → $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Existen dos maneras diferentes de multiplicar vectores:

1) producto escalar.
2) producto vectorial.

PRODUCTO ESCALAR

Sean los vectores $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$. Se llama producto escalar, producto interno o producto punto de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ a $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Nota.- Esta operación no tiene interpretación o significado geométrico, aunque tiene diversas aplicaciones.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean los vectores $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b}$ = $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\bar{c}$ = $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ y el escalar λ ε R. Entonces

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$
2) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$
3) $\lambda\, \bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda\, (\bar{a} \cdot \bar{b})$
4) $\bar{a} \cdot \bar{a} > 0$ si $\bar{a} \neq \bar{0}$

Corolario para la propiedad 4.- Sea el vector $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, entonces $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$

TEOREMA

Sean los vectores $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b}$ = $(b_1,\ b_2,\ b_3)$; entonces $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \Theta$, donde Θ es el ángulo que forman dos segmentos dirigidos, con sus orígenes concurrentes que representan a los vectores.

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Sean los vectores no nulos $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$

$$\cos \Theta = \frac{\bar{a}\ \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

$$\Theta = \text{ang cos} \frac{\bar{a}\ \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

Si el producto punto es positivo, el cos Θ también es positivo y entonces Θ es agudo.

Si el producto interno es negativo, el cos Θ también lo es y entonces Θ es obtuso.

Si el producto escalar es nulo, el cos Θ también y el ángulo que se forma es recto.

De esta última conclusión se tiene la condición de perpendicularidad entre dos vectores.

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD DE DOS VECTORES (ORTOGONALIDAD)

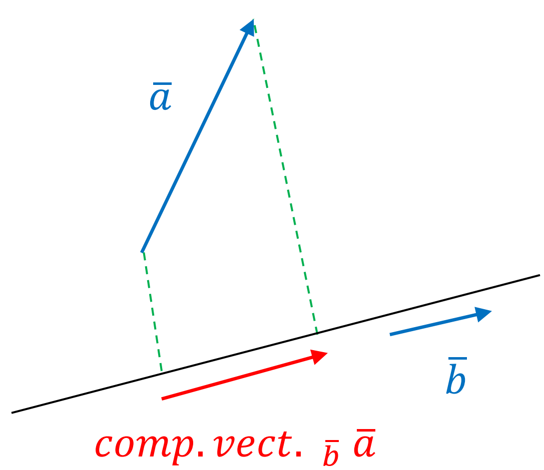
Dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares $\leftrightarrow$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS VECTORES

Dos vectores no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos si $\bar{a} = \lambda\, \bar{b}$ con $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$; es decir, si existe proporcionalidad entre ellos.

COMPONENTE VECTORIAL Y COMPONENTE ESCALAR DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO

Se llama componente vectorial de un vector $\bar{a}$ en la dirección del vector $\bar{b}$ a la proyección perpendicular (sombra) de $\bar{a}$ sobre la dirección de $\bar{b}$. Se denota $comp.vect._{\bar{b}}\, \bar{a}$



A la componente vectorial también se le llama proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$. Su notación es $proy._{\bar{b}}\ \bar{a}$

La expresión para obtener la proyección con módulo, dirección y sentido es

$$comp.vect._{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\ \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Donde al escalar $\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$ se le conoce como la componente escalar de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$. Simbólicamente,

$$comp.esc._{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Si la componente escalar es positiva, la $proy._{\bar{b}}\ \bar{a}$ y el vector $\bar{b}$ tienen el mismo sentido; si es nula, son ortogonales (perpendiculares); y si es negativa, tienen sentidos opuestos.

PRODUCTO VECTORIAL

Sean los vectores $\bar{a}$ = $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $\bar{b}$ = $(b_1,\ b_2,\ b_3)$.
Se llama producto vectorial o producto cruz a

$$\bar{a}\ x\ \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\ i - (a_1b_3 - a_3b_1)\ j + (a_1b_2 - a_2b_1)\ k$$

El resultado es un vector, de ahí el nombre de producto vectorial. Algunos autores representan al producto vectorial con la notación $\bar{a} \wedge \bar{b}$.

Una manera práctica de recordar la definición anterior consiste en el “pseudodeterminante”

$$\bar{a}\ x\ \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

calculado utilizando el método de desarrollo por cofactores (según el primer renglón).

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO VECT.

Sean los vectores $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ y el escalar λ ε R. Entonces

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ anticonmutatividad
2) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ distr. por la izq.
3) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ distr. por la der.
4) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}) = \lambda\,(\bar{a} \times \bar{b})$ asociatividad
5) $\bar{0} \times \bar{a} = \bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}$ caso particular

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO VECT.

Sean los vectores no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Entonces

1) $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}|$ sen Θ, donde Θ es el ángulo que forman los vectores factores.
2) $\bar{a} \times \bar{b}$ es un vector perpendicular tanto a $\bar{a}$ como a $\bar{b}$
3) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$ son paralelos.

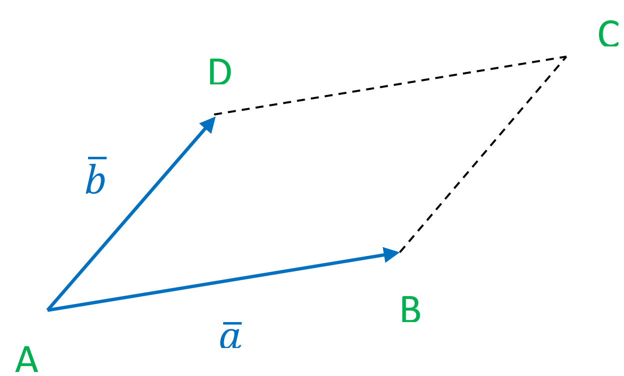
Observaciones a las propiedades.-

a) El producto vectorial de dos vectores es perpendicular al plano en el que se alojan los dos factores.

b) El producto vectorial de dos vectores no nulos puede ser el vector cero, por lo que la propiedad 3 anterior constituye otra condición de paralelismo.

APLICACIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL EN EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

Sea el paralelogramo ABCD mostrado en la figura



El área del paralelogramo está dada por Área = $|\bar{a} \times \bar{b}|$ donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos vectores que se alojan en dos lados no paralelos del paralelogramo.

Si los vectores están alojados en las diagonales de un paralelogramo, el área se obtiene mediante la expresión Área = $\frac{1}{2}\,|\bar{a} \times \bar{b}|$

PRODUCTO MIXTO O TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$. Se llama producto mixto o triple producto escalar a $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}$

En la notación $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}]$ no se escriben los operadores porque esto carece de importancia.

Observaciones.-

1) El resultado de este producto es un escalar, por lo que
2) Debe efectuarse primero el producto vectorial.

Para calcular el producto mixto se obtiene el determinante:

$$[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

A fin de visualizar mejor las operaciones a realizar para calcular este determinante pueden escribirse los renglones 1 y 2 abajo del tercero, o bien, las columnas 1 y 2 a la derecha de la tercera.

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO MIXTO

Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Entonces:

1) $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = -[\bar{a}\ \ \bar{c}\ \ \bar{b}]$
2) $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = [\bar{b}\ \ \bar{c}\ \ \bar{a}] = [\bar{c}\ \ \bar{a}\ \ \bar{b}]$
3) $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = 0$ si alguno de los tres vectores es el vector nulo.

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO MIXTO

Sean los vectores no nulos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Entonces:

1) $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = 0 \leftrightarrow$ los tres vectores están alojados en un plano.
2) El valor absoluto de $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}]$ es igual al volumen del paralelepípedo que tiene alojados en tres lados concurrentes a uno de sus vértices a los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$.