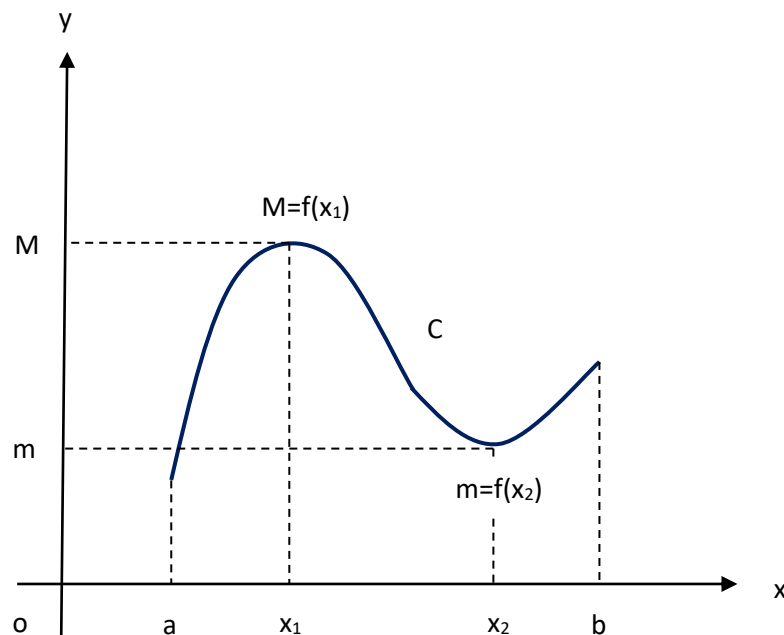


VARIACIÓN DE FUNCIONES

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces entre todos los valores de $f(x)$ en ese intervalo, existe un valor $M = f(x_1)$ llamado máximo absoluto, que no es superado por ningún otro valor de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y un valor $m = f(x_2)$, llamado mínimo absoluto, que no supera a ninguno de los valores de $f(x)$ en el intervalo. Esto es

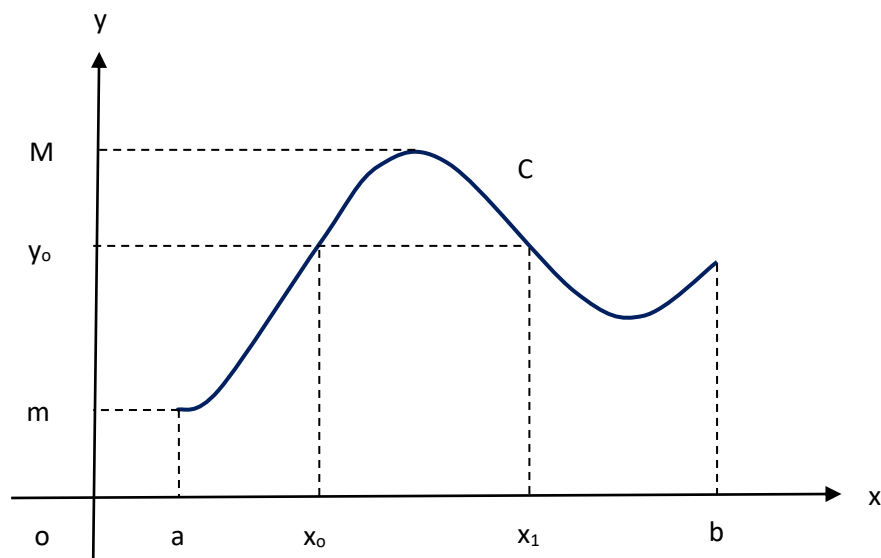
$$m = f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) = M$$



Para el caso particular de la función constante $y = k$, se tiene que $M = m = k$.

TEOREMA DE BOLZANO

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea y_0 un valor de $f(x)$ tal que $m \leq y_0 \leq M$. Entonces, cuando menos para un valor x_0 de x en el intervalo $[a, b]$ se tiene que $y_0 = f(x_0)$.



TEOREMA DE ROLLE

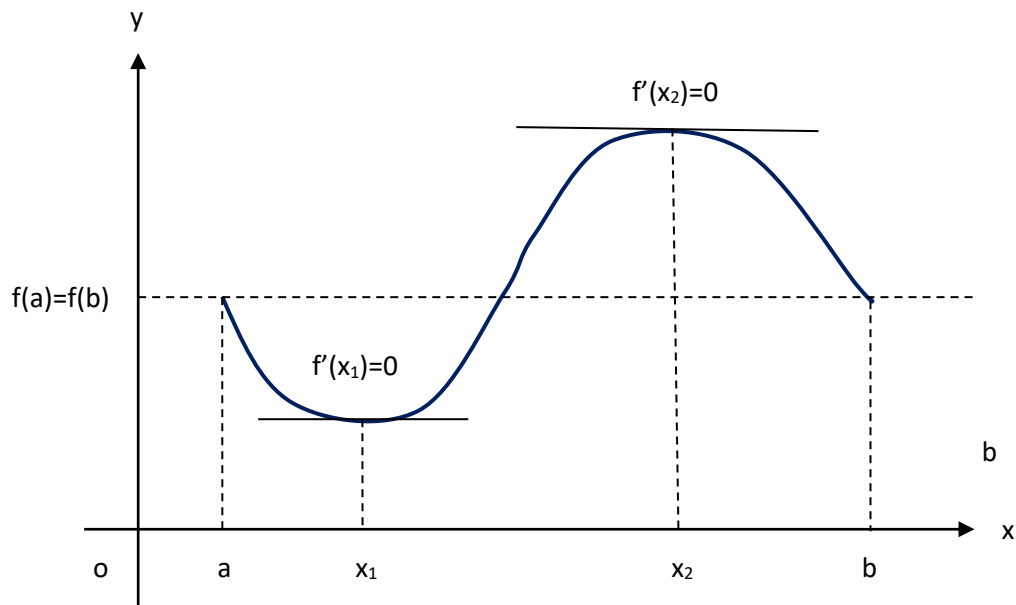
Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

- 1.- $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- 2.- $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b)
- 3.- $f(a) = f(b)$

Entonces existe por lo menos un valor x_1 en (a, b) para el cual $f'(x_1) = 0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE ROLLE

El teorema indica que existe por lo menos un punto de la gráfica de $y = f(x)$, en el intervalo (a, b) en donde la tangente a ella es paralela al eje de las abscisas, es decir, de pendiente cero. Gráficamente:



TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

- 1.- $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- 2.- $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b) .

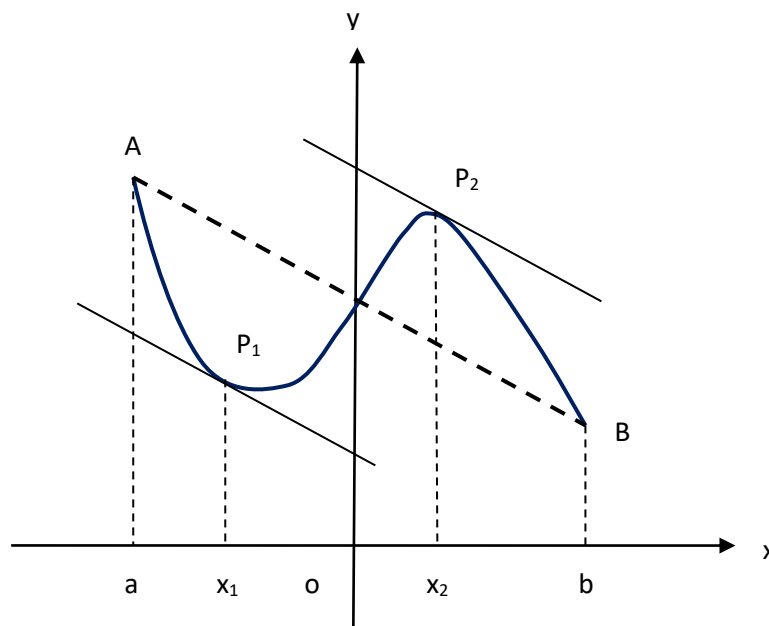
Entonces existe por lo menos un valor x_1 en (a, b) para

el cual $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TVMCD

El teorema establece que existe cuando menos un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva entre los puntos A y B en el cual la recta tangente es paralela a la secante que pasa por los puntos A y B.

Este teorema puede verificarse en más de un punto del arco $\widehat{AB}$, como se muestra en la siguiente figura:



Corolario 1.- Una función $y = f(x)$ cuya derivada es nula en un intervalo, es necesariamente una función constante.

Corolario 2.- Si dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ tienen sus derivadas iguales en un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo.

FUNCIONES CRECIENTES Y FUNCIONES DECRECIENTES

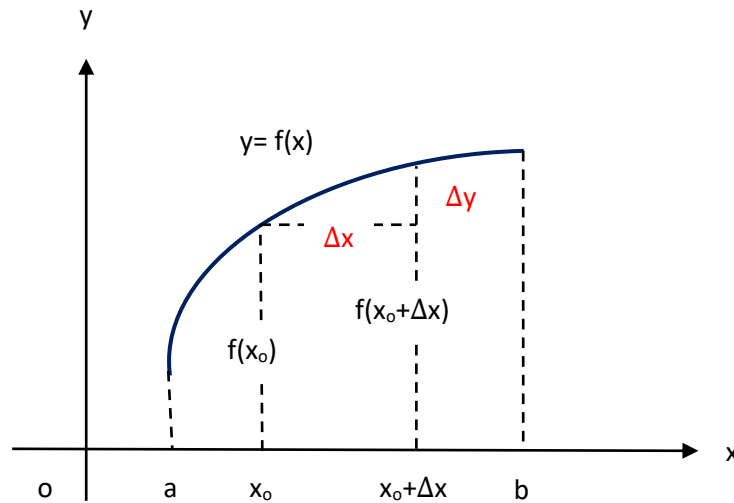
Una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo cerrado $[a, b]$ si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es positivo en el intervalo. Es decir, si

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

siendo x_0 y $x_0 + \Delta x$ dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$.

Nótese que $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \leftrightarrow \Delta x > 0, \Delta y > 0$, o bien que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \leftrightarrow \Delta x < 0, \Delta y < 0$$

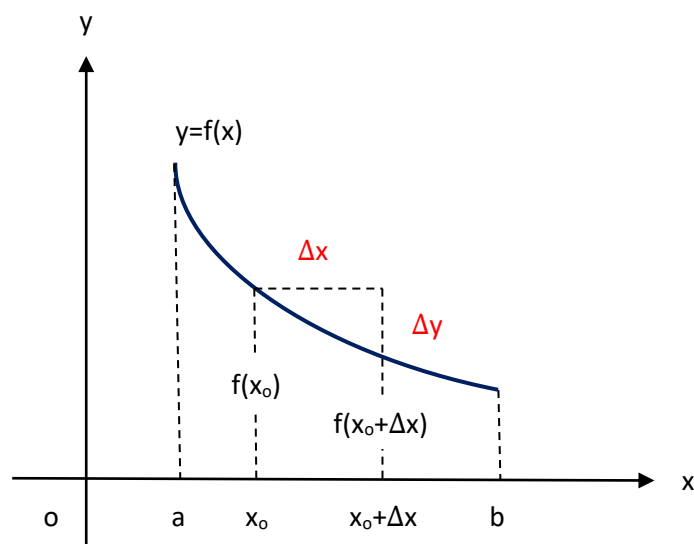


Una función $y = f(x)$ es decreciente en un intervalo $[a, b]$ si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es **negativo** en el intervalo. Esto es, si

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$$

siendo x_0 y $x_0 + \Delta x$ dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$.

Se observa que $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \Leftrightarrow \Delta x > 0, \Delta y < 0$, o bien que $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \Leftrightarrow \Delta x < 0, \Delta y > 0$



Para condicionar analíticamente la existencia de una función creciente o de una decreciente, se presentan los siguientes teoremas:

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y tal que $f'(x) > 0$ en (a, b) . Entonces la función es creciente en $[a, b]$.

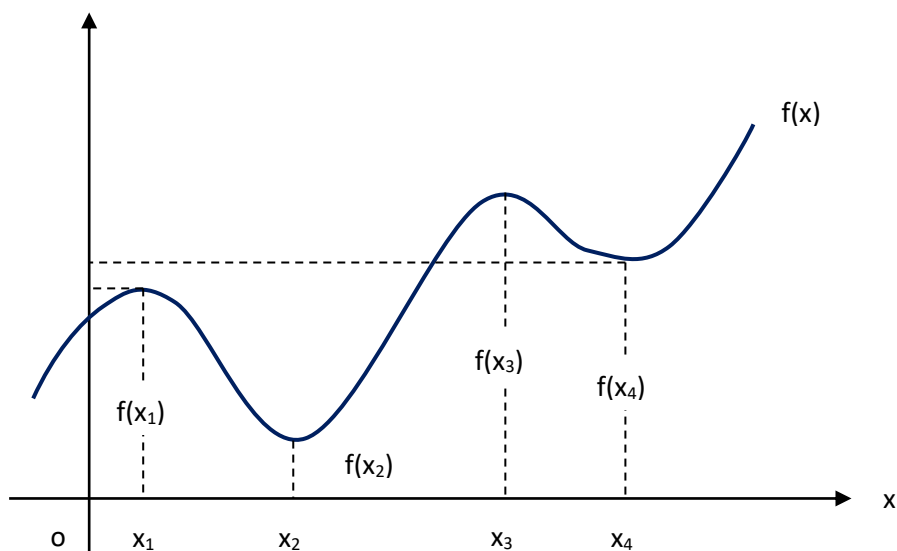
Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y tal que $f'(x) < 0$ en (a, b) . Entonces la función es decreciente en $[a, b]$.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

$f(x_0)$ es un valor máximo relativo de la función continua $y = f(x)$, si existe un entorno $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ para el cual $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ cuando $|\Delta x| < \xi$.

$f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de la función continua $y = f(x)$, si existe un entorno $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ para el cual $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ cuando $|\Delta x| < \xi$.

Una misma función puede tener más de un máximo relativo y más de un mínimo relativo y aún puede suceder que un máximo relativo sea menor que un mínimo relativo.



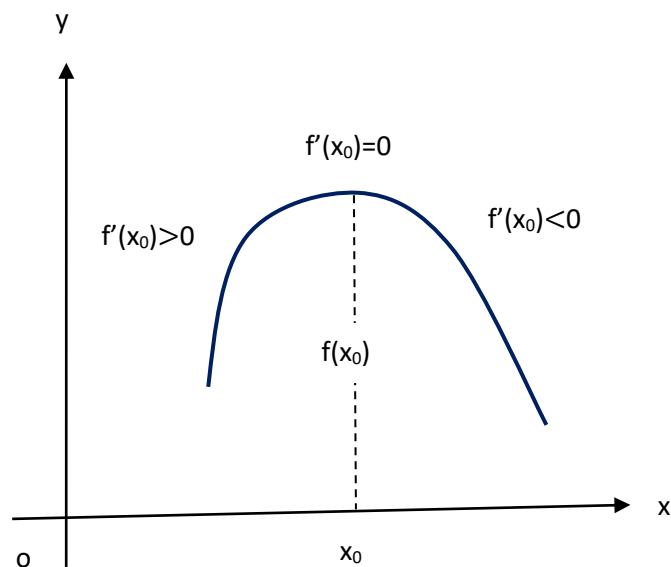
TEOREMA

Sea la función continua $y = f(x)$ y un entorno $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$ del valor x_0 en el cual se tiene que

$$f'(x_0 + \Delta x) > 0 \quad \text{si } \Delta x < 0 \quad \text{y}$$

$$f'(x_0 + \Delta x) < 0 \quad \text{si } \Delta x > 0$$

Entonces, $f(x_0)$ es un valor máximo relativo de la función $f(x)$.



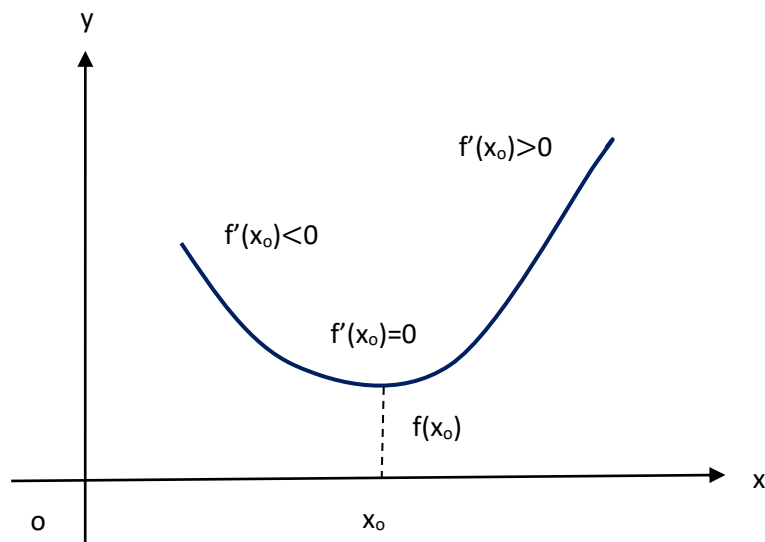
TEOREMA

Sea la función continua $y = f(x)$ y un entorno $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$ del valor x_0 en el cual se tiene que

$$f'(x_0 + \Delta x) < 0 \quad \text{si } \Delta x < 0 \quad \text{y}$$

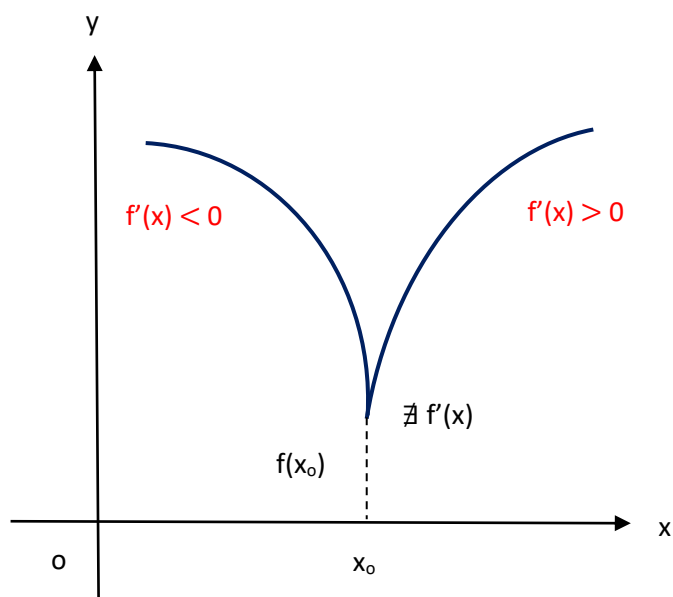
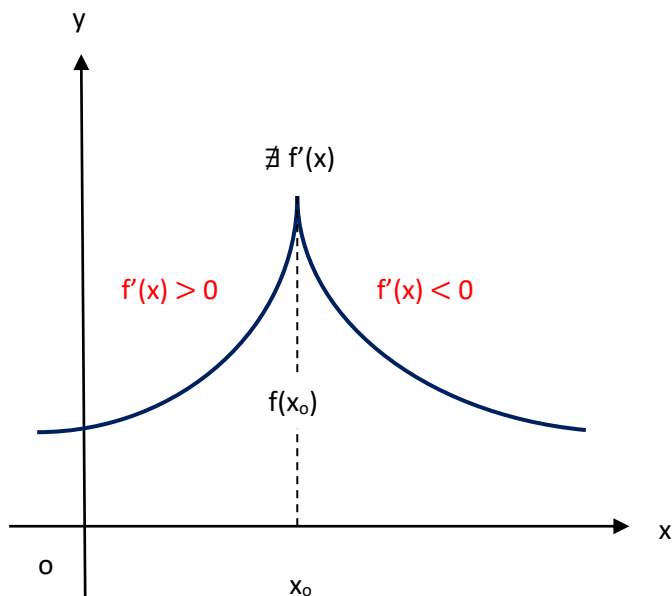
$$f'(x_0 + \Delta x) > 0 \quad \text{si } \Delta x > 0$$

Entonces, $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de la función $f(x)$.



Si el cambio de signo de la derivada $f'(x)$ es de $(+)$ a $(-)$ se trata de un máximo relativo; si es de $(-)$ a $(+)$ se tiene un mínimo relativo.

La derivada puede cambiar de signo pasando por el valor cero o cambiando bruscamente de un valor positivo a uno negativo o viceversa.



Para determinar los máximos y mínimos relativos de una función se utiliza el siguiente criterio.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA DETERMINAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

- 1) Obtener la derivada $f'(x)$.
- 2) Determinar los valores de x que anulan o hacen discontinua a la derivada. Estos valores comúnmente se conocen como valores críticos de x .
- 3) Investigar el cambio de signo de la derivada para cada valor crítico de x , deduciendo si se trata de un máximo relativo o de un mínimo relativo según sea el cambio de $(+)$ a $(-)$ o de $(-)$ a $(+)$, respectivamente.

Nota.- Si la derivada no cambia de signo en un punto, la función $f(x)$ no tiene máximo ni mínimo relativo.

Otra forma de analizar una función para máximos y mínimos relativos incluye la utilización de la segunda derivada de la función, como se indica en los siguientes teoremas:

Si la función $f(x)$ es derivable en x_0 , además $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ presenta un máximo relativo para $x = x_0$.

Si la función $f(x)$ es derivable en x_0 , además $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = x_0$.

Con base en los teoremas anteriores se presenta el siguiente:

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA DETERMINAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

- 1) Obtener la primera y segunda derivadas de la función.
- 2) Determinar los valores críticos que anulan la primera derivada.
- 3) Calcular el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores críticos obtenidos, deduciendo que si para un valor crítico $x = x_0$ se tiene que $f'(x_0) = 0$, entonces $f(x_0)$ es máximo

relativo si $f''(x_0) < 0$, y es mínimo relativo si $f''(x_0) > 0$.

En el caso en que $f'(x_0) = 0$ ó $f''(x_0)$ no exista, este criterio no es aplicable, teniéndose el recurso de aplicar el criterio de la primera derivada.

PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS (OPTIMACIÓN)

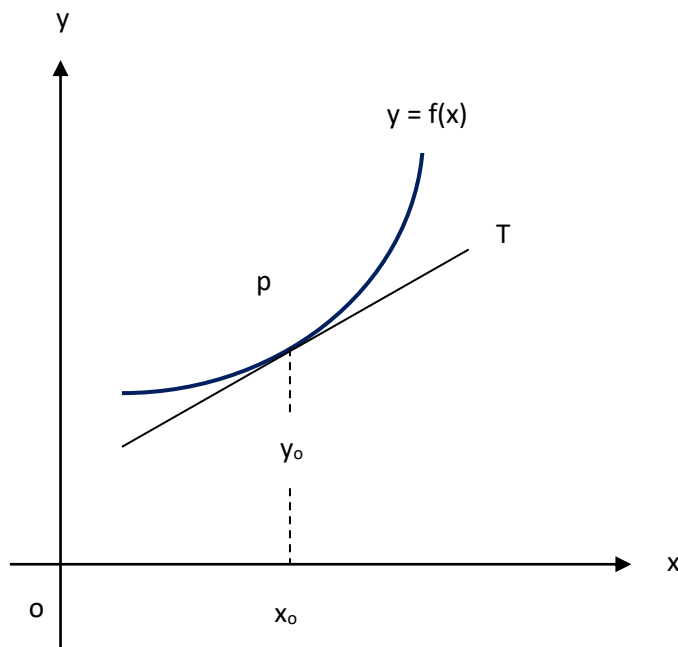
No hay regla aplicable en la solución de problemas de máximos y mínimos, pero en la mayoría de ellos puede seguirse el siguiente orden:

- 1) Determinar la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener, trazando un croquis cuando convenga.
- 2) Si la expresión resultante contiene más de una variable, las condiciones del problema proporcionarán suficientes relaciones entre las variables para que la función pueda expresarse en términos de una sola variable.
- 3) A la función resultante se le aplican los criterios vistos anteriormente para el cálculo de máximos y mínimos.

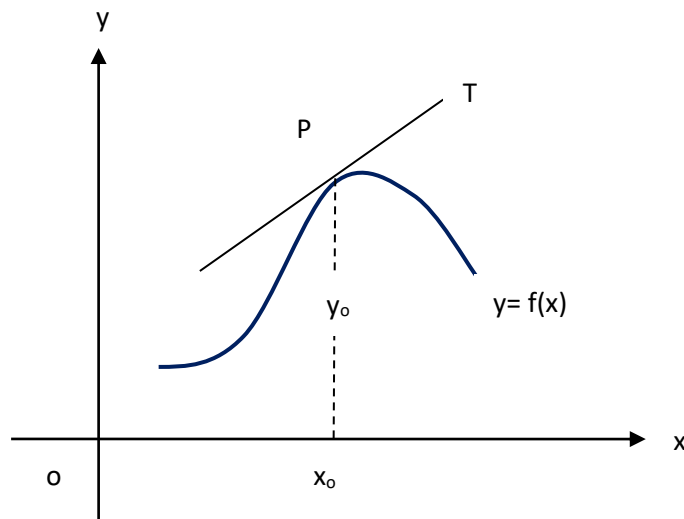
- 4) En los problemas prácticos, muchas veces se ve con facilidad cuáles de los valores críticos darán un máximo o un mínimo, por lo que no siempre es necesario aplicar completo el paso anterior.
- 5) Conviene construir la gráfica de la función para comprobar el resultado obtenido

CONCAVIDAD DE UNA CURVA

La curva $y = f(x)$ que es continua en el punto $P(x_0, y_0)$ es cóncava hacia arriba en el punto P si existe un entorno de P en el cual todos los puntos de la curva, excepto el punto P se encuentran en la región superior de la tangente a la misma en P .



La curva $y = f(x)$ que es continua en el punto $P(x_0, y_0)$ es cóncava hacia abajo en este punto P si existe un entorno de P en el cual todos los puntos de la curva, con excepción del punto P , se encuentran en la región inferior de la tangente a la curva en dicho punto.

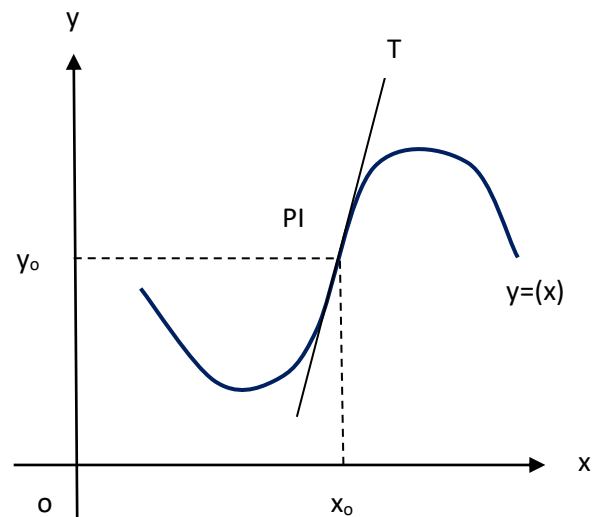
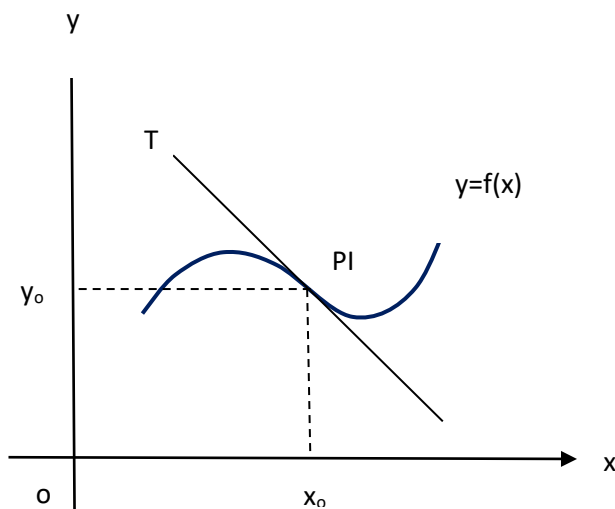


Si la ecuación de la curva es $y = f(x)$, tiene segunda derivada y se cumple que $f''(x) > 0$, entonces la curva es cóncava hacia arriba en el punto $P(x_0, y_0)$.

Si la curva tiene ecuación $y = f(x)$, esta función tiene segunda derivada y se cumple que $f''(x) < 0$, entonces la curva tiene su concavidad hacia abajo en el punto $P(x_0, y_0)$.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

El punto de inflexión de una curva es aquel en el cual cambia el sentido de la concavidad de la misma.



En el punto de inflexión la segunda derivada cambia de signo.

Para encontrar los puntos de inflexión de una curva $y = f(x)$ siguen los siguientes pasos:

- 1.- Calcular la segunda derivada $f''(x)$.
- 2.- Determinar los valores que anulen o hagan discontinua a $f''(x)$.
- 3.- Si al pasar x por dichos valores hay un cambio de signo de $f''(x)$, entonces la curva tiene un punto de inflexión para el valor de x considerado.
- 4.- Si el cambio de signo es de (+) a (-), la curva cambia su concavidad de hacia arriba a hacia abajo.
- 5.- Si el cambio es de (-) a (+), la concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba.

Otra forma más rápida de calcular un punto de inflexión se infiere del siguiente teorema:

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva, para $x = x_0$ se tiene que $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces el punto $P(x_0, y_0)$ de la curva es un punto de inflexión.

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

En geometría analítica, el análisis o discusión de la ecuación de una curva incluye la obtención de:

- 1) Intersecciones con los ejes coordenados.
- 2) Simetría con los ejes coordenados y al origen.
- 3) Determinación de asíntotas verticales y horizontales.
- 4) Extensión de la curva (valores reales de x para los cuales " y " es real y valores reales de " y " para los cuales x es real).

Con los conceptos vistos en este capítulo, se tienen elementos para determinar, además:

- 5) Intervalos de la función donde es creciente o decreciente.
- 6) Máximos y mínimos relativos y absolutos.
- 7) Concavidad y puntos de inflexión en la gráfica.