MATRIZ

Una matriz de orden (tamaño) mxn sobre el campo de los complejos es un arreglo rectangular de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

con m renglones y n columnas, donde los $a_{ij} \in C$ son sus elementos.

Comúnmente se representa a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. En forma abreviada, la matriz anterior puede expresarse como

$$A = (a_{ij}) \text{ donde } \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Los subíndices i, j indican, respectivamente, el renglón y la columna en que se encuentra el elemento a_{ij}

IGUALDAD DE MATRICES

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo orden, entonces

$$A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$$

MATRIZ ESCALONADA (ESCALÓN)

Una matriz es escalonada si el número de ceros anteriores al primer elemento no nulo de cada renglón aumenta al pasar de renglón en renglón (puede suceder que el último o últimos renglones sean todos ceros).

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES POR RENGLÓN

Pueden ser de tres tipos:

1) Intercambio de dos renglones.
2) Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$.

3) Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$ y suma del resultado a otro renglón de la matriz.

Utilizando transformaciones elementales por renglón es posible transformar cualquier matriz en una matriz escalonada.

EQUIVALENCIA DE MATRICES

Dos matrices son equivalentes si cualquiera de ellas puede obtenerse a partir de la otra efectuando un número finito de transformaciones elementales por renglón.

RANGO DE UNA MATRIZ

Si se transforma una matriz A en una matriz escalonada B, el número de renglones con al menos un elemento distinto de cero se llama rango de la matriz de A y se representa con R(A). El mismo rango se le asigna a la matriz B.

MATRICES ELEMENTALES

El resultado de efectuar un número finito de transformaciones elementales por renglón a una matriz A de orden mxn puede también obtenerse si se premultiplica A por una cierta matriz cuadrada de orden m (matriz elemental).

A las matrices $I_m{}^{(i,j)}$, $I_m{}^{k(i)}$, $I_m{}^{k(i,j)}$ se les llama matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales 1, 2 y 3, respectivamente.

Cada transformación elemental puede llevarse a cabo si se premultiplica la matriz dada por la matriz elemental que se obtiene efectuando en I la misma transformación elemental.

ADICIÓN DE MATRICES

Sean A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) dos matrices del mismo orden mxn. La suma A + B de dichas matrices es una nueva matriz C = (c_{ij}) de orden mxn tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Sean A, B y C tres matrices del mismo orden mxn. Se cumple siempre que:

1) (A + B) + C = A + (B + C) asociatividad
2) A + B = B + A conmutatividad
3) $\exists$ 0 = (c_{ij}), $c_{ij} = 0$ $\forall$ i, j de orden mxn llamada matriz nula tal que A + 0 = 0 + A = A
4) $\forall$ A = (a_{ij}) de orden mxn $\exists$ - A = $(-a_{ij})$ de orden mxn llamada simétrica de A tal que A + (-A) = (-A) + A = 0
5) A (B + C) = AB + AC distributividad

SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Se define a partir de la suma de matrices como $A - B = A + (-B)$. Para que dos matrices sean conformables para la resta deben serlo para la suma.

PRODUCTO POR UN ESCALAR

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de orden mxn y $\alpha \varepsilon C$ un escalar. El producto α por A es la matriz $\alpha A = (\alpha\, a_{ij})$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO POR UN ESCALAR

Sean A y B dos matrices del mismo orden y α, β dos números complejos. Se cumple siempre que:

1) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
2) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
3) $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$
4) $1 \cdot A = A$

PRODUCTO DE MATRICES

Para que el producto AB pueda efectuarse, el número de columnas n de la matriz A debe ser el mismo que el número de renglones de la matriz B. Simbólicamente

Sean $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n)$

y $B = (b_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, p)$

dos matrices de orden mxn y nxp respectivamente.

El producto AB es una matriz

$$C = (c_{ij}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m \text{ y } j = 1, 2, \ldots, p)$$

de orden mxp cuyos elementos están dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B se dice que las matrices A y B son conformables para la multiplicación.

En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Incluso en muchas ocasiones se tiene que dos matrices A y B son conformables para multiplicarse en ese orden mientras que no son conformables para multiplicarse en el orden contrario.

Para el caso del producto AB se dice que A premultiplica a B o bien que B postmultiplica a A.

ASOCIATIVIDAD EN LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La multiplicación de matrices, cuando puede efectuarse, es asociativa. Simbólicamente

Sean $A = (a_{ij})_{mxn}$ $B = (b_{jk})_{nxp}$ $C = (c_{kl})_{pxq}$

tres matrices de orden mxn, nxp y pxq, respectivamente

$$(AB)C = A(BC)$$

MATRIZ CUADRADA

Si una matriz A es de orden nxn, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

MATRIZ IDENTIDAD

Se llama matriz identidad de orden n a la matriz cuadrada de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz puede expresarse en forma abreviada como

$$I_n = (\delta_{ij}) \qquad \text{donde} \qquad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

TEOREMA

Para toda matriz A de orden mxn se tiene que

$$I_m A = A$$

$$A I_n = A$$

MATRIZ INVERSA

Si A y P son dos matrices cuadradas de orden n tal que $PA = AP = I_n$, a la matriz P se le llama matriz inversa de A.

Si A es una matriz de orden mxn, existe su inversa si y sólo si $m = n = R(A)$. Una matriz cuadrada de orden n y rango menor que n no tiene inversa.

Si una matriz A tiene inversa, se dice que es NO singular y a su inversa se le representa con A^{-1}.

La inversa de una matriz es única y el producto de dos matrices no singulares es otra matriz no singular.

A las matrices que no tienen inversa se les llama matrices singulares.

La inversa de una matriz A no singular puede obtenerse si se aplica a la matriz identidad I la misma secuencia de transformaciones elementales por renglón que se utilizan para transformar la matriz A en la matriz I.

MATRICES TRIANGULARES

Sea A = (a_{ij}) una matriz de orden nxn con elementos en C.

1) A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$
2) A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

PROPIEDADES.- Si A y B son dos matrices triangulares superiores (o inferiores) del mismo orden y α ε C, entonces

1) A + B es triangular superior (o inferior)
2) α A es triangular superior (o inferior)
3) AB es triangular superior (o inferior)

MATRIZ DIAGONAL

Sea A = (a_{ij}) una matriz de orden nxn con elementos en C. Se dice que A es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y se representa con diag $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

PROPIEDADES.- Si A y B son dos matrices diagonales tales que A = diag $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ y B = diag $(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$ y α ε C, entonces

1) A + B = diag $(a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, \ldots, a_{nn} + b_{nn})$
2) α A = diag $(\alpha a_{11}, \alpha a_{22}, \ldots, \alpha a_{nn})$
3) AB = diag $(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$
4) A^{-1} = diag $(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}})$ si A es no singular

MATRIZ ESCALAR

Es un caso particular de matriz diagonal en el que todos los elementos de la diagonal principal son iguales al escalar α. Puede expresarse como α I.

TRAZA DE UNA MATRIZ

Sea A = (a_{ij}) una matriz de orden nxn con elementos en C. Se llama traza de A y se representa con tr A al número $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

PROPIEDADES.- Si A y B son dos matrices cuadradas con elementos en C y α ε C

1) tr (A + B) = tr A + tr B
2) tr (αA) = α (tr A)
3) tr (AB) = tr (BA)

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz A de orden mxn. Se llama transpuesta de A y se representa mediante A^T a la matriz de orden nxm cuyos renglones son las columnas de A y cuyas columnas son los renglones de A, esto es, si A = (a_{ij}), entonces A^T = (a_{ji}).

Se cumple además que $(AB)^T = B^T A^T$

MATRICES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS

Sea A una matriz de nxn con elementos en C

1) A es simétrica si A^T= A
2) A es antisimétrica si A^T= -A ó A = -A^T

Nota.- Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica deben ser nulos.

PROPIEDADES.- Si A y B son dos matrices simétricas (o antisimétricas) de orden nxn y $\alpha \in C$, entonces

1) A + B es simétrica (o antisimétrica)
2) α A es simétrica (o antisimétrica)

Si A es una matriz de nxn con elementos en C, entonces

1) A + A^T es simétrica
2) A - A^T es antisimétrica

MATRIZ CONJUGADA

Sea A = (a_{ij}) una matriz de mxn con elementos en C. Se llama conjugada de A a la matriz de mxn $\overline{A} = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = \overline{a_{ij}}$

PROPIEDADES.- Si A y B son dos matrices con elementos en C y $\alpha \varepsilon$ C

1) $(\overline{\overline{A}}) = A$
2) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$
3) $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$ si A + B puede obtenerse
4) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ si AB puede efectuarse

MATRICES REALES E IMAGINARIAS

Sea A una matriz de mxn con elementos en C

1) A es real si $\overline{A} = A$
2) A es imaginaria si $\overline{A} = -A$ o $A = -\overline{A}$

PROPIEDADES.- Si A y B son dos matrices reales (o imaginarias), entonces

1) A + B es real (o imaginaria), si A + B puede efectuarse
2) AB es real, si AB puede obtenerse

Si A es una matriz de mxn con elementos en C, entonces

1) A + $\overline{\mathrm{A}}$ es real
2) A - $\overline{\mathrm{A}}$ es imaginaria

MATRIZ CONJUGADA-TRANSPUESTA

Sea A una matriz de mxn con elementos en C. Se llama conjugada-transpuesta de A y se representa con A^*, a la matriz de nxm definida por $\mathrm{A}^* = \overline{(\mathrm{A})}^{\,\mathrm{T}} = \overline{(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})}$

PROPIEDADES.- Sean A y B dos matrices con elementos en C y α ε C

1) $(\mathrm{A}^*)^* = \mathrm{A}$
2) $(\alpha \mathrm{A})^* = \overline{\alpha}\, \mathrm{A}^*$
3) $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^* = \mathrm{A}^* + \mathrm{B}^*$ si A + B puede obtenerse
4) $(\mathrm{AB})^* = \mathrm{B}^*\mathrm{A}^*$ si AB puede efectuarse

MATRICES HERMITIANAS Y ANTIHERMITIANAS

Sea A una matriz de nxn con elementos en C

1) A es hermitiana si $A^* = A$
2) A es antihermitiana si $A^* = -A$ ó $A = -A^*$

Nota.- Los elementos de la diagonal principal de una matriz hermitiana deben ser números reales.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz antihermitiana deben ser números imaginarios o el cero.

PROPIEDADES.-

1) Si A y B son dos matrices hermitianas (o antihermitianas) de nxn, entonces A + B es hermitiana (o antihermitiana).

Si A es una matriz de mxn con elementos en C

2) A A^* es hermitiana.
3) A^*A es hermitiana.
4) A + A^* es hermitiana, si A es cuadrada.
5) A - A^* es antihermitiana, si A es cuadrada.

MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz A no singular es ortogonal si $A^T = A^{-1}$

MATRIZ UNITARIA

Una matriz A no singular es unitaria si $A^* = A^{-1}$

POTENCIA ENÉSIMA

Sean A una matriz de mxm con elementos en C y n ε N. Se llama potencia enésima de A y se representa con A^n, a la matriz definida por

$$A^{o} = I_m$$

$$A^{n} = A\,A^{n-1} \text{ para } n \geq 1$$

PROPIEDADES.- Si A es una matriz cuadrada con elementos en C y m, n ε N, entonces

1) $A^{m}A^{n} = A^{m+n}$
2) $(A^{m})^{n} = A^{mn}$

ECUACIONES MATRICIALES

Este tipo de ecuaciones puede resolverse empleando las propiedades de las operaciones y matrices que se han definido, siempre y cuando la ecuación haya sido planteada correctamente.

Debe tenerse cuidado al despejar una incógnita de una ecuación matricial, ya que existen diferencias entre las propiedades de las operaciones con matrices y con números reales.

La principal diferencia entre matrices y números reales es que mientras se puede sumar o multiplicar dos números cualesquiera, no siempre se puede con matrices.

Suponiendo que se pueden efectuar las operaciones indicadas, las principales diferencias entre las propiedades de las operaciones con números y matrices son:

1) La multiplicación de números es conmutativa; la de matrices, no.
2) El desarrollo matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ es en general falso. El desarrollo correcto es $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
3) El producto de dos números diferentes de cero nunca es cero, pero el producto de dos matrices diferentes de la matriz nula puede ser igual a cero (matriz nula).
4) La ley cancelativa para el producto se verifica en los números, pero no en las matrices. Esto es, si $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$

$$ab = ac \quad \rightarrow \quad b = c$$

pero en las matrices

$$\text{si } AB = AC \nRightarrow B = C$$

Nota.- Aunque $AB = AC \nRightarrow B = C$

sí se cumple que si $B = C \rightarrow AB = AC \quad \forall A$