PRODUCTO INTERNO

1.-

Sea V un espacio vectorial sobre C. Un producto interno en V es una función de VxV en C que asigna a cada pareja ordenada $(\bar{u},\bar{v})$ de vectores de V un escalar $(\bar{u}\mid\bar{v})\in C$, llamado el producto de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que satisface las siguientes propiedades

i) $(\bar{u}\mid\bar{v})=(\bar{v}\mid\bar{u})$

ii) $(\bar{u}\mid\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}\mid\bar{v})+(\bar{u}\mid\bar{w})$

iii) $(\alpha\bar{u}\mid\bar{v})=\alpha(\bar{u}\mid\bar{v})$

iv) $(\bar{u}\mid\bar{u})>0$ si $\bar{u}\neq\bar{0}$

2.-

Sea V un espacio vectorial sobre C y sea $(\bullet\mid\bullet)$ un producto interno en V; entonces, $\forall\bar{u},\bar{v}\in V$ y $\alpha\in C$:

i) $(\bar{u}\mid\alpha\bar{v})=\alpha(\bar{u}\mid\bar{v})$

ii) $(\bar{u}\mid\bar{u})\in R$

iii) $(\bar{0}\mid\bar{u})=0=(\bar{u}\mid\bar{0})$

iv) $(\bar{u}\mid\bar{u})=0\Leftrightarrow\bar{u}=\bar{0}$

3.-

TEOREMA (Desigualdad de Cauchy-Schuarz)

Sea V un espacio vectorial sobre C y sea $(\bullet\mid\bullet)$ un producto interno en V; entonces, $\forall\bar{u},\bar{v}\in V$:

$$|(\bar{u}\mid\bar{v})|^2\leq(\bar{u}\mid\bar{u})(\bar{v}\mid\bar{v})$$

Donde $|(\bar{u}\mid\bar{v})|$ es el modulo de $(\bar{u}\mid\bar{v})$.

Además, la desigualdad se cumple si y solo si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes

No está en el temario actual

4.-

Sea V un espacio vectorial sobre C y sea $(\bullet|\bullet)$ un producto interno en V. Se llama norma de $\overline{v} \in V$, y se representa con $\|\overline{v}\|$, al número real no negativo definido por $\|\overline{v}\| = (\overline{v} \mid \overline{v})^{\frac{1}{2}}$

5.-

Si V es un espacio vectorial con producto interno, entonces $\forall \overline{u}, \overline{v} \in V$ y $\alpha \in C$:

i) $\|\overline{v}\| > 0$

ii) $\|\overline{v}\| = 0$ si y sólo si $\overline{v} = 0$

iii) $\|\alpha\overline{v}\| = |\alpha|\|\overline{v}\|$

iv) $\|\overline{u} + \overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$

6.-

Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sean $\overline{u}, \overline{v} \in V$. Se llama distancia de $\overline{u}$ a $\overline{v}$, y se representa con $d(\overline{u}, \overline{v})$, al número real definido por $d(\overline{u}, \overline{v})$ = $\|\overline{v} - \overline{u}\|$

7.-

Si V es un espacio vectorial con producto interno, entonces $\forall \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$:

i) $d(\overline{u}, \overline{v}) \geq 0$

ii) $d(\overline{u}, \overline{v}) = 0$ si y solo si $\overline{u} = \overline{v}$

iii) $d(\overline{u}, \overline{v}) = d(\overline{v}, \overline{u})$

iv) $d(\overline{u}, \overline{w}) \leq d(\overline{u}, \overline{v}) + d(\overline{v}, \overline{w})$

8.-

Sea V un espacio vectorial con producto interno real, y sea $\overline{u},\overline{v}$ dos vectores no nulos de V.Se llama ángulo entre $\overline{u}$ y $\overline{v}$ al número real θ, en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que

$$\cos\theta = \frac{(\overline{u} \mid \overline{v})}{\|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\|}$$

9.-

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores $\overline{u},\overline{v} \in V$ son ortogonales si $(\overline{u} \mid \overline{v}) = 0$

10.-

TEOREMA (DE PITAGORAS)

Sea V un espacio con producto interno y sean $\overline{u},\overline{v} \in V$. Si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales entonces

$$\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2$$

11.-

Sea V un espacio con producto interno y sea $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ ^un conjunto de vectores de V . Se dice que es un conjunto ortogonal cuando

$$(\overline{v}_i \mid \overline{v}_j) = 0 \ , \ \ \forall i \neq j$$

Si además $\|\overline{v}_i\|$=1 , $\forall \ i$ el conjunto S e ortogonal.

12.-

Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

13.-

Sea V un espacio con producto interno y sea $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\}$ una base ortogonal. Entonces, $\forall\ \bar{v}\in V$

$$(\bar{v})_B=(\alpha_i)\text{ , donde }\alpha_i=\frac{(\bar{v}\mid\bar{e}_i)}{(\bar{e}_i\mid\bar{e}_i)}$$

En particular, si B es una base ortonormal

$$\alpha_i=(\bar{v}\mid\bar{e}_i)$$

14.-

TEOREMA(Proceso de Gram-Schmidt)

Sea V un espacio con producto interno y sea $G=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,...,\bar{v}_n\}$ un generador de V. El conjunto $G_0=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,...,\bar{w}_n\}$ donde $\bar{w}_1=\bar{v}_1$

$$\bar{w}_i=\bar{v}_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{(\bar{v}_i\mid\bar{w}_k)}{(\bar{w}_k\mid\bar{w}_k)}\bar{w}_k\quad\text{, para i=2,3,. . . , n.}$$

Es un generador ortogonal de V.

15.-

Sea V u espacio con producto interno y sea S un subconjunto de V. Se dice que un vector $\bar{v}\in V$ es ortogonal al conjunto S si

$$(\bar{v}\mid\bar{u})=0\quad\forall\ \bar{u}\in S$$

El conjunto de todos los vectores de V ortogonales a S se denota con $S^\perp$; esto es : $S^\perp=\{\bar{v}\in V\mid(\bar{v}\mid\bar{u})=0,\forall\ \bar{u}\in S\}$

16.-

Sea V un espacio con producto interno y sea W un espacio de V de dimensión finita. Entonces, cualquier vector $\bar{v}\in V$ puede expresarse en forma única como

$$\overline{v} = \overline{w} + \overline{w}`$$

Donde $\overline{w} \in W$ y $\overline{w}` \in W^{\perp}$

17.-

Sean V un espacio con producto interno, W un subespacio de V de dimensión finita y $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ una base ortonormal de W.

Si $\overline{v} \in V$, el vector

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{v} \mid \overline{e}_i)\overline{e}_i$$

Se llama la proyección de $\overline{v}$ sobre W

18.-

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. Para cada vector $\overline{v} \in V$ existe uno y solo un vector $\overline{w}_0 \in W$ tal que

$$\|\overline{v} - \overline{w}_0\| < \|\overline{v} - \overline{w}\|, \ \overline{w} \in W \ , \ \overline{w} \neq \overline{w}_0$$

Dicho vector es la proyección de $\overline{v}$ sobre W

MÍNIMOS CUADRADOS

El concepto de mínimos cuadrados se emplea en sistemas de ecuaciones lineales de la forma que son *inconsistentes*, es decir, que no *Ax=b*

TEOREMA DE MÍNIMOS CUADRADOS:

Sea A una matriz de orden $m \times n$ y sea "b" en R^m. Entonces $Ax = b$ siempre tiene al menos una solución de mínimos cuadrados $\hat{x}$. Además:

1. $\hat{x}$ es una solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$, si y sólo si $\hat{x}$ es una solución de las ecuaciones normales:

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

2. "A" tiene columnas linealmente independientes si y sólo si $A^T A$ es invertible. En este caso, la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es única y está dada por:

$$\hat{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$