Serie de Producto interno   Sem. 2012-1

1.- En el espacio vectorial M de las matrices de nxn con elementos reales, se define la función $f : MxM \to \mathbb{R}$ como

$$f(A,B) = \det(A^T B) \quad \forall A, B \in M$$

Determinar si la función dada es un producto interno y en caso de no serlo, cuáles axiomas no se cumplen.

2.- Obtener la distancia entre los vectores $\overline{x} = (1+i, -i),\ \overline{y} = (2i, 1-i)$ para el producto interno en $\mathbb{C}^2$ definido por

$$(\overline{x} \,|\, \overline{y}) = x_1\, \overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2\,,\ \ \forall\, \overline{x} = (x_1, x_2),$$
$$\overline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$$

Donde $\overline{y}_i$ representa el conjugado de y_i para i = 1,2

3.- Sea V un espacio vectorial real y sean $\overline{u}$, $\overline{v} \in V$. Demostrar que si $\|\overline{u}+\overline{v}\| = \|\overline{u}-\overline{v}\|$ entonces $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales.

4.- Sea P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grano menor o igual a 2 con coeficientes reales, W el subespacio de P_2 generado por el conjunto $G = 1, x, x^2 - 1$, y el producto interno en P_2 definido por

$$p|q \ = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) \ \ \forall p, q \in P_2$$

Determinar una base ortonormal de W.

5.- Sea M_2 el espacio vectorial real de las matrices de 2x2 con elementos reales $W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de M_2, y el producto interno en M_2 definido por $A|B \ = ax + by + cz + dw \ \ \forall\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2$

a) Determinar el complemento ortogonal de W.

b) Expresar el vector $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ como E= F+H, donde $F \in W$ y $H \in W^{\perp}$

RRCH

6.- Sea M_2 el espacio vectorial real de las matrices de 2x2, W es el subespacio de M_2 generado por el conjunto $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, y el producto interno de M_2 definido por $(A|B)=tr\,(B^T A)\quad\forall\ A,B\in M_2$

Determinar el complemento ortogonal de W.

7.- Sea P_1 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales, W y el subespacio de P_1 generado por el conjunto $G=\{1+x,-3-3x\}$, y el producto interno en P_1 definido por

$$(p|q)=p(0)q(0)+p(1)q(1)\ \forall p(x)=a+bx,\ q(x)=c+dx\in P_1$$

Obtener el polinomio $r\in W$ que mejor se aproxime a $p(x)=2-4x$

8.- Determinar si la operación

$$(\overline{x}|\overline{y})=\sum_{k=1}^{4}x_k\sum_{k=1}^{4}y_k\quad\forall\,\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ \overline{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4$$

Es un producto interno en $\mathbb{R}^4$

9.- Obtener el polinomio $\overline{q}=ax^2-ax$ que mejor se aproxime al polinomio $\overline{p}=2x^2-6$ en el espacio real de los polinomios de grado menor o igual a dos, para el producto interno definido por:

$$(\overline{t}|\overline{v})=t(0)v(0)+t(1)v(1)+t(2)v(2)$$

10.- Sea V un espacio vectorial con producto interno complejo $(\bullet|\bullet)$ y sean $\overline{u},\overline{v}\in V$ tales $\|\overline{v}\|=2$ y $\overline{u}+\overline{v}$ es ortogonal a $\overline{v}-\overline{u}$. Determinar el conjunto de valores que pueden tomar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ de modo que $(\overline{u}|\overline{v})=\alpha+3\beta i$.

11.- ¿Para qué se utiliza el método de mínimos cuadrados?