Álgebra Lineal.
Serie de Transformaciones Lineales.
2009-2 Alumno: ______________________________

1.- Sean $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ una transformación lineal. A = $\{(0,i),(i,-1)\}$ una base de $\mathbb{C}^2$, B = $\{(1,0,0),(0,-1,1),(0,0,i)\}$ una base de $\mathbb{C}^3$ y $M_B^A(T) = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 1+i \\ -2 & i \end{pmatrix}$ la matriz asociada a T referida a las bases A y B. Determinar la regla de correspondencia.

2.- Sean el espacio vectorial real M de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y transformación T: M $\to \mathbb{R}$ tal que

$$T(A) = \operatorname{tr}(A) \quad \forall\, A \in M$$

en donde tr (A) es la traza de A. Determinar:

a) si la transformación T es lineal, y
b) el núcleo y recorrido de T.

3.- Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y el operador lineal $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que S(1,2) =(-1,4) y $S \circ S = I$, donde I es el operador identidad de $\mathbb{R}^2$. Determinar la matriz asociada a S respecto a la base canónica.

4.- Sea el operador lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por T(x,y,z) = (x+z, -y, -4x-z).
Determinar:
a) los valores característicos de T,
b) los espacios característicos de T y,
c) si es posible, una matriz diagonal asociada a T.

5.- Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que T(1,2) = (4,6) y cuyo núcleo es el conjunto N(T) = $\{(x,-2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
Determinar:

a) La regla de correspondencia de T.
b) Una base del recorrido de T.

6.- Sean el espacio vectorial real $P = \{ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $F: P \to P$ y cuya regla de correspondencia es

$$F(ax+b) = (a-2b)x + (b-2a) \quad \forall ax+b \in P$$

Determinar:

a) Una matriz M asociada a F.
b) Los espacios característicos de F.
c) Una matriz diagonal D asociada a F y la base a la que está referida.
d) Una matriz P tal que $P^{-1}MP = D$

RRCH

Álgebra Lineal.
Serie de Transformaciones Lineales.
2009-2 Alumno: ______________________________

7.- Sean los espacios vectoriales reales $P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ y

$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$, $D = \left\{ 3x^2 - 1, x + 1, 2x^2 + x \right\}$ una base de P_2 y la transformación lineal $F : P_2 \to M_2$ tal que

$$F(3x^2 - 1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\; F(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; F(2x^2 + x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtener:

a) el recorrido de F, y
b) la dimensión del núcleo de F.

8.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal tal que T(1, 0,0) = (0, 1, 0), T(0,1,0) = (0, 0, 1) y T (0,0,1) = (1, 0, 0)
Determinar si $T^{-1} = T \circ T$

9.- Sean el espacio vectorial complejo $P_1 = \left\{ ax + b \;\middle|\; a,b \in \mathbb{C} \right\}$ y el operador lineal $G : P_1 \to P_1$ cuya matriz asociada respecto a la base B = $\left\{ x + (3 - 2i), x + (3 + 2i) \right\}$ es $D = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$. Determinar la regla de correspondencia de G.

10.- Sea un operador lineal $S : P_2 \to P_2$ cuya matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores característicos de S.
b) Obtener el espacio característico asociado al mayor de los valores determinados en el inciso anterior.

11.- La matriz M(H) = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ representa la transformación H: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuyos valores característicos son $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Determinar, si existe, una matriz P diagonalizadora de M(H). En caso afirmativo dar la correspondiente matriz diagonal, en caso negativo justificar su respuesta.