2. CURVAS EN EL SISTEMA POLAR

Objetivo:

El alumno obtendrá ecuaciones en forma polar de curvas en el plano y determinará las características de éstas a partir de su ecuación en forma polar.

Contenido:

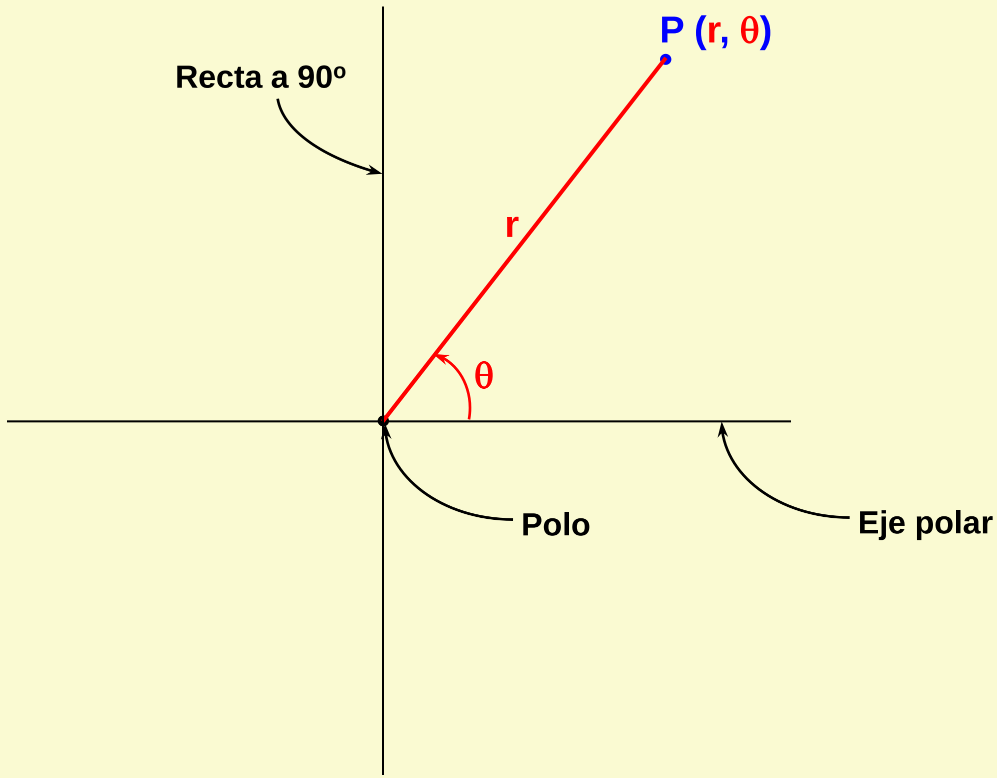
2.1 Sistema de coordenadas polares. Simetría de puntos en coordenadas polares.

2.2 Transformación de coordenadas cartesianas a polares y de polares a cartesianas.

2.3 Ecuaciones polares de curvas. Cardioides, lemniscatas, rosas de n pétalos.

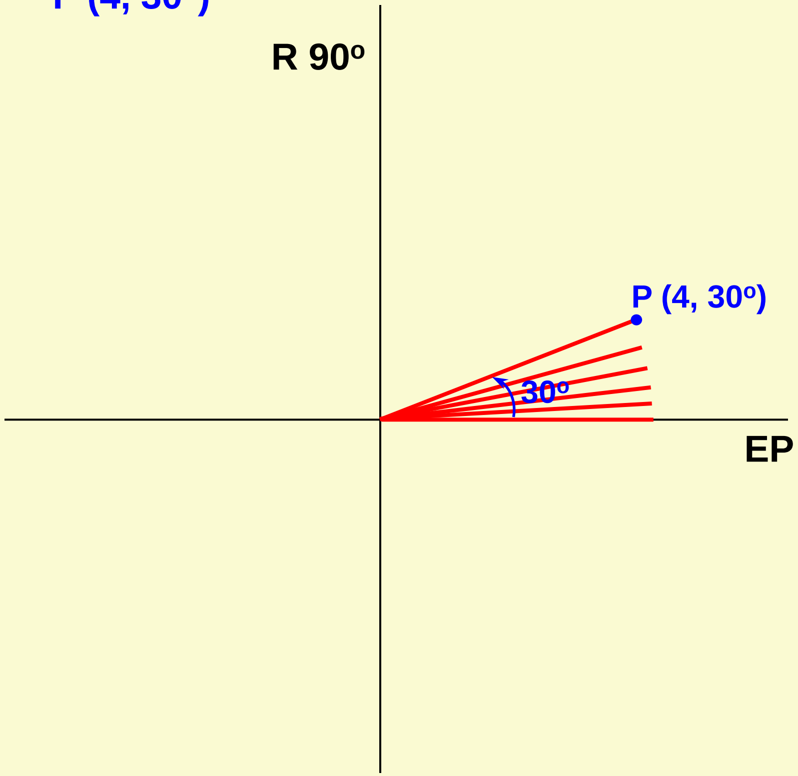
2.4 Análisis de una curva representada por una ecuación polar.

SISTEMA POLAR DE REFERENCIA



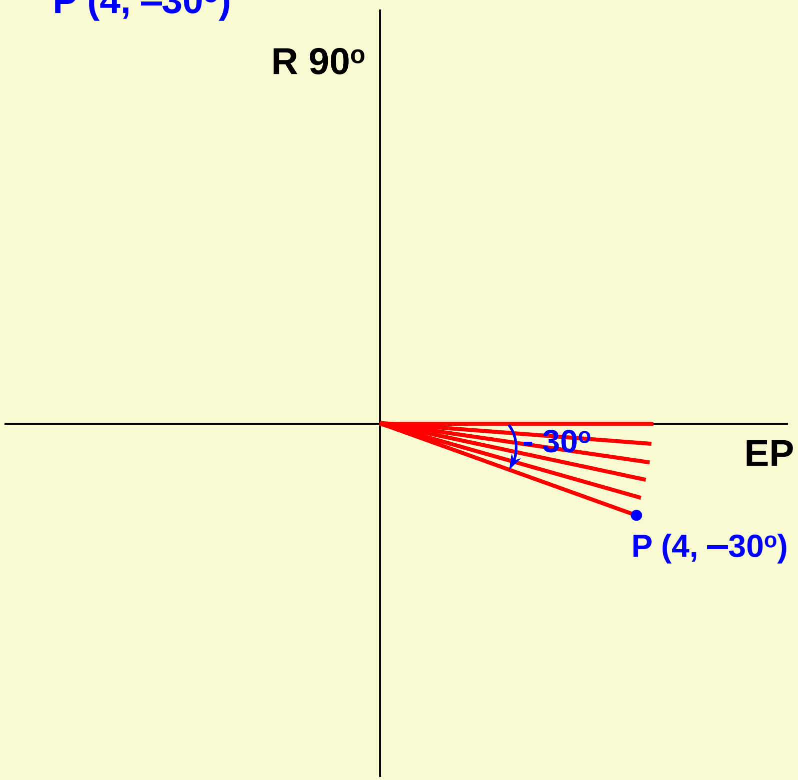
SISTEMA POLAR DE REFERENCIA

P (4, 30º)



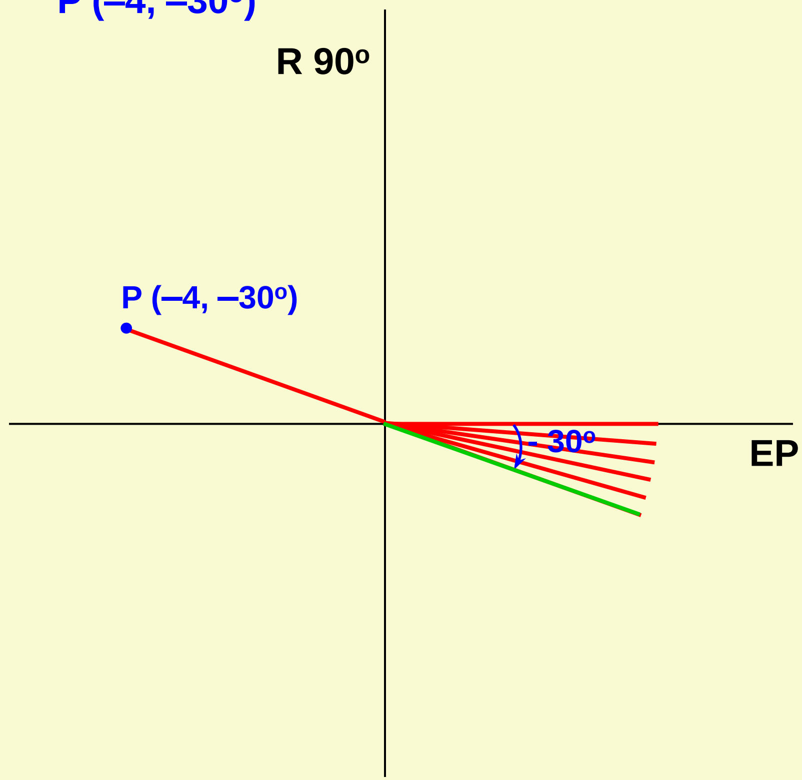
SISTEMA POLAR DE REFERENCIA

P (4, –30º)



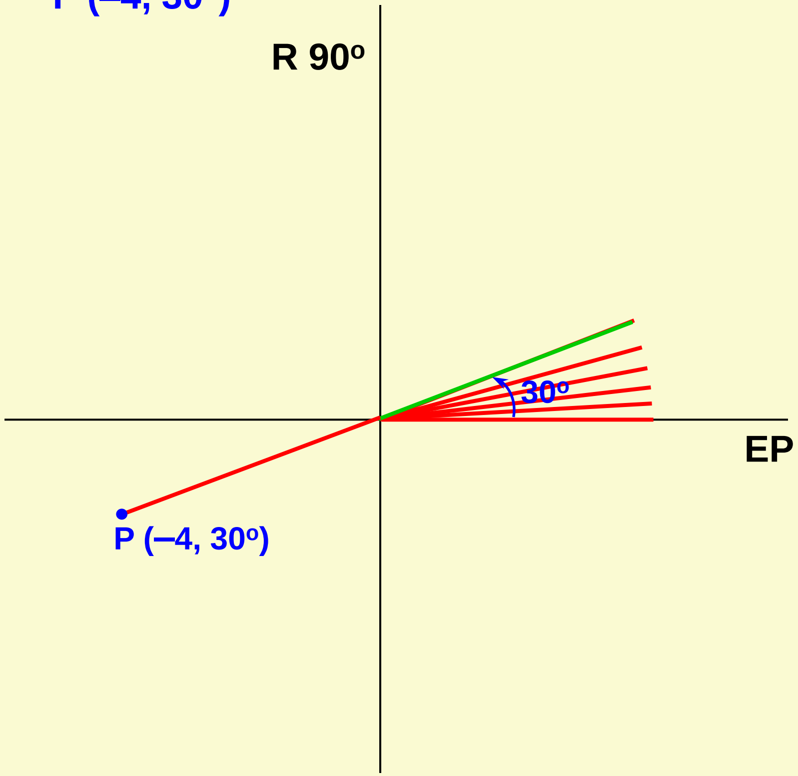
SISTEMA POLAR DE REFERENCIA

P (–4, –30º)



SISTEMA POLAR DE REFERENCIA

P (–4, 30º)

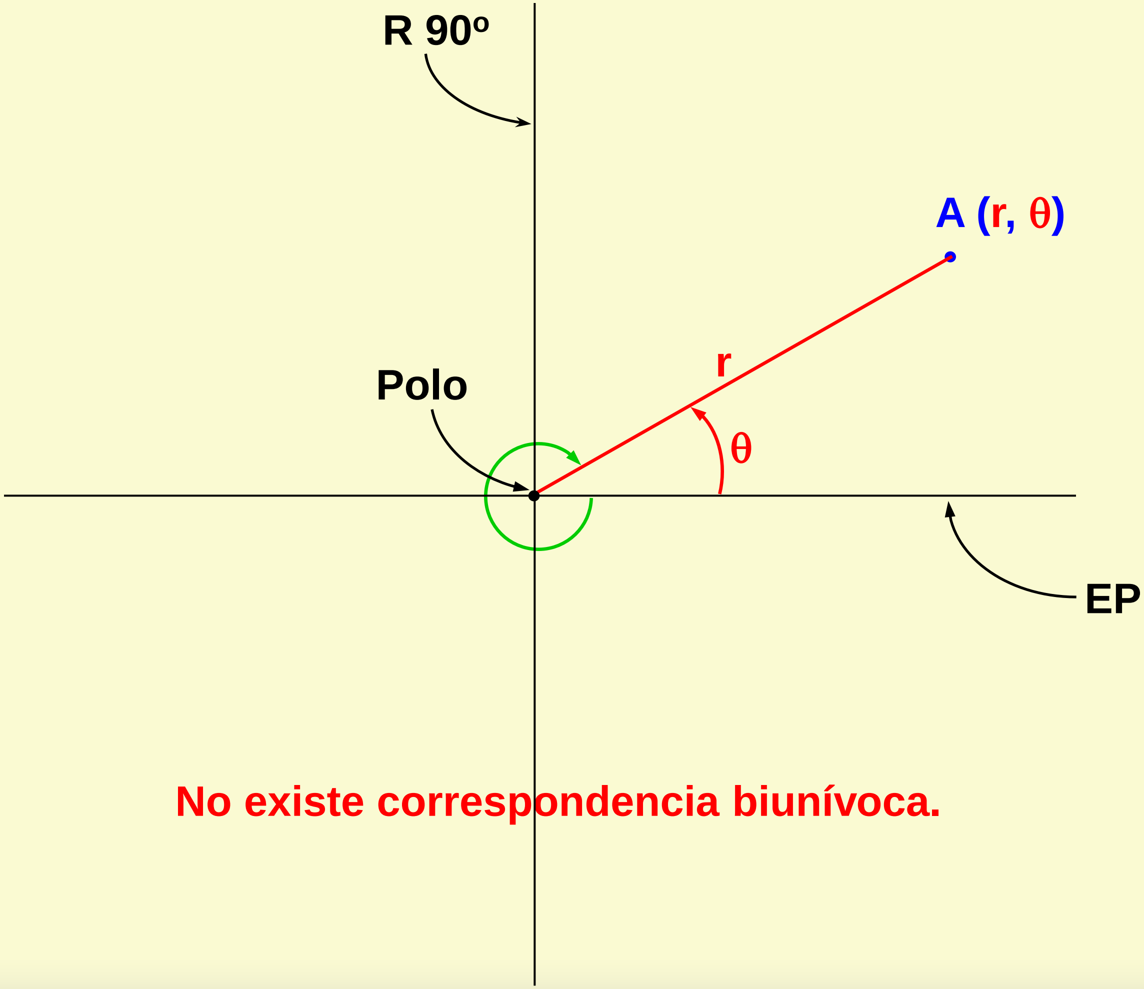


SISTEMA POLAR DE REFERENCIA

Para transformar un valor negativo de r en un valor positivo, se tienen que sumar 180º al valor de θ.

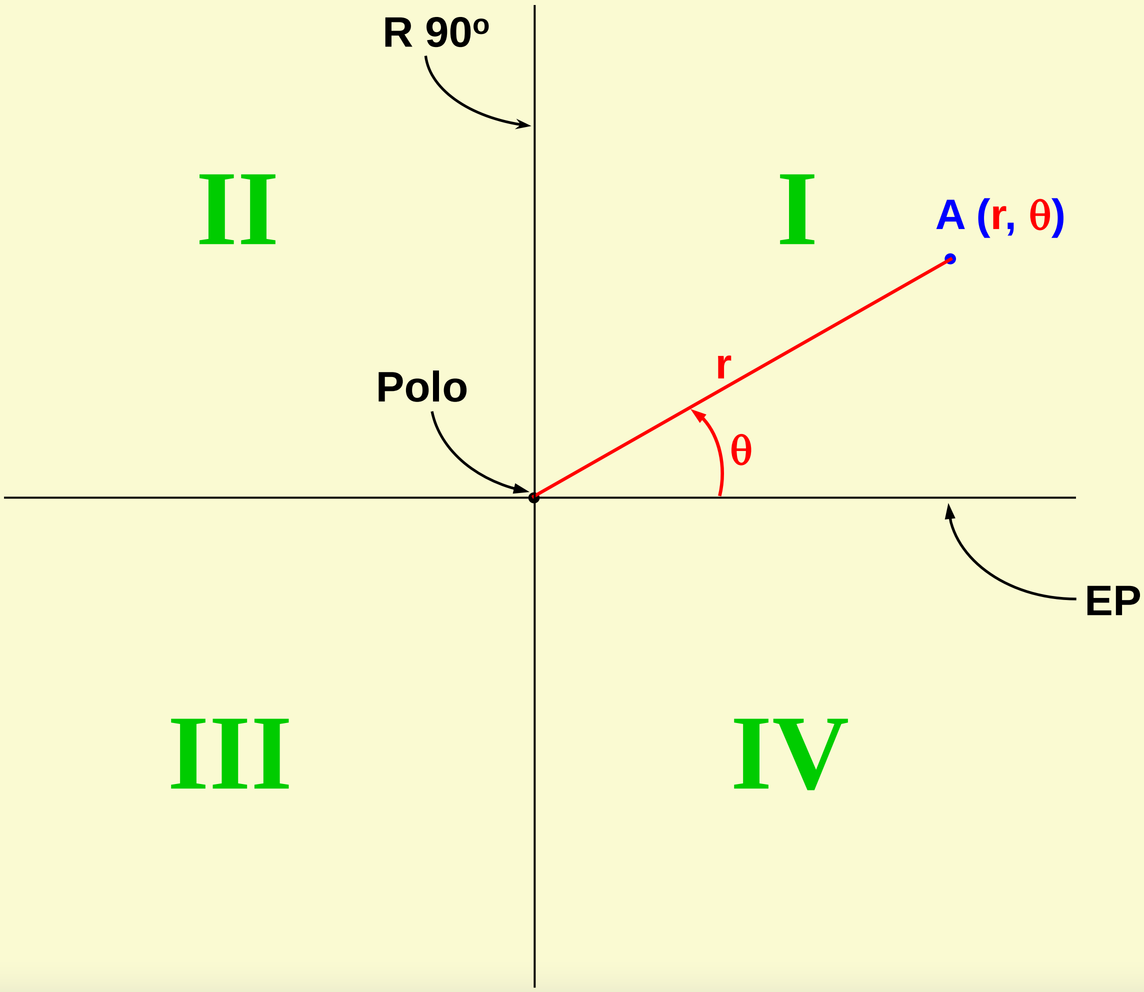
Para transformar un valor de θ negativo en uno positivo, se tienen que sumar n(360º) al valor de θ, donde n es un valor entero positivo

SISTEMA POLAR DE REFERENCIA

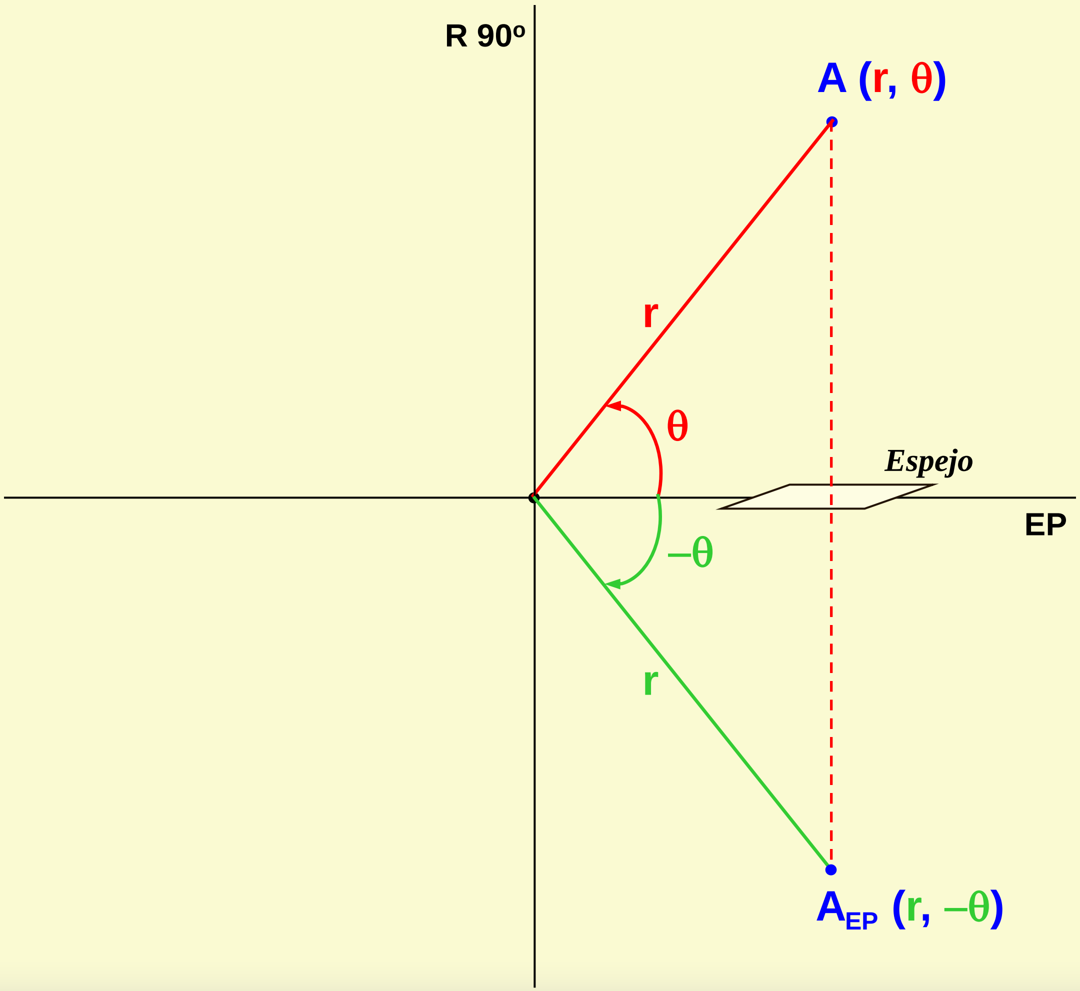


No existe correspondencia biunívoca.

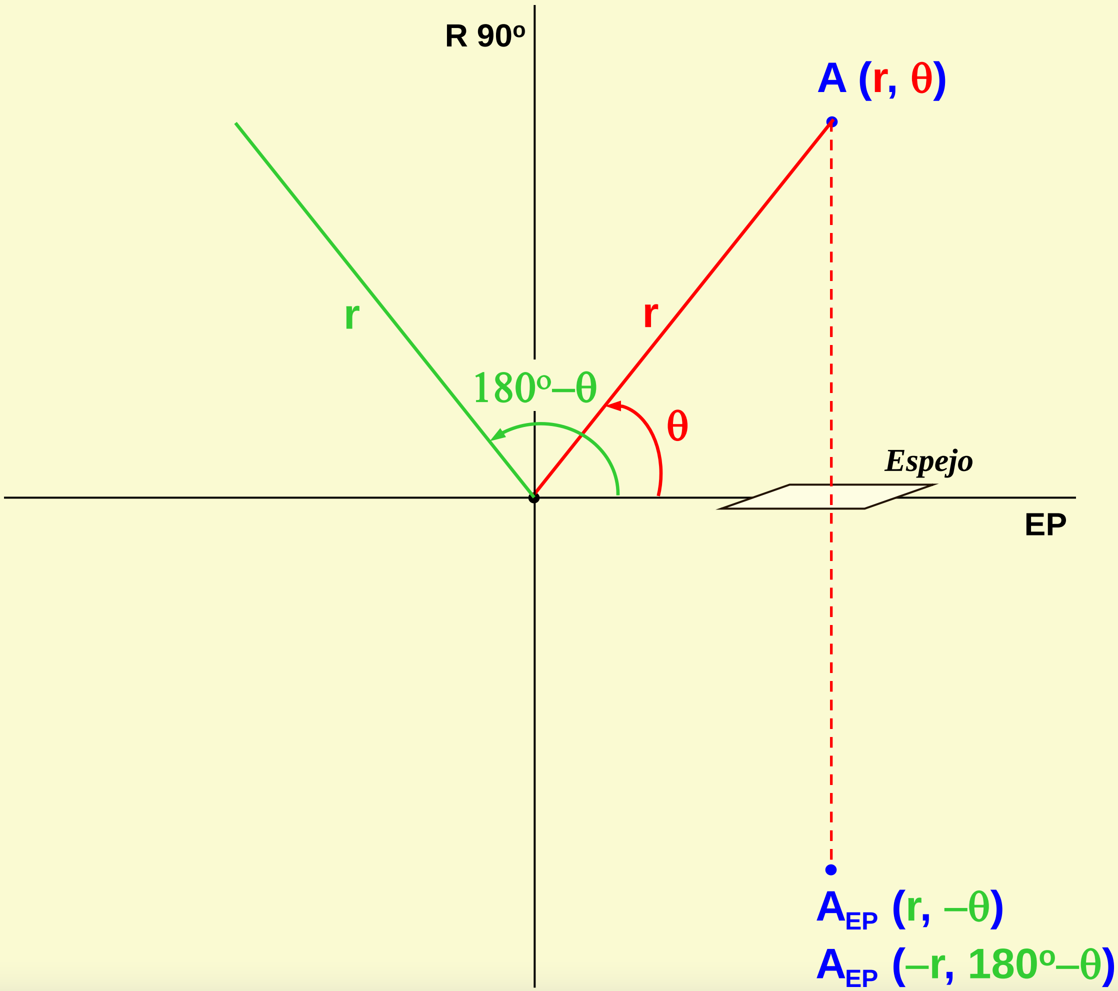
SISTEMA POLAR DE REFERENCIA



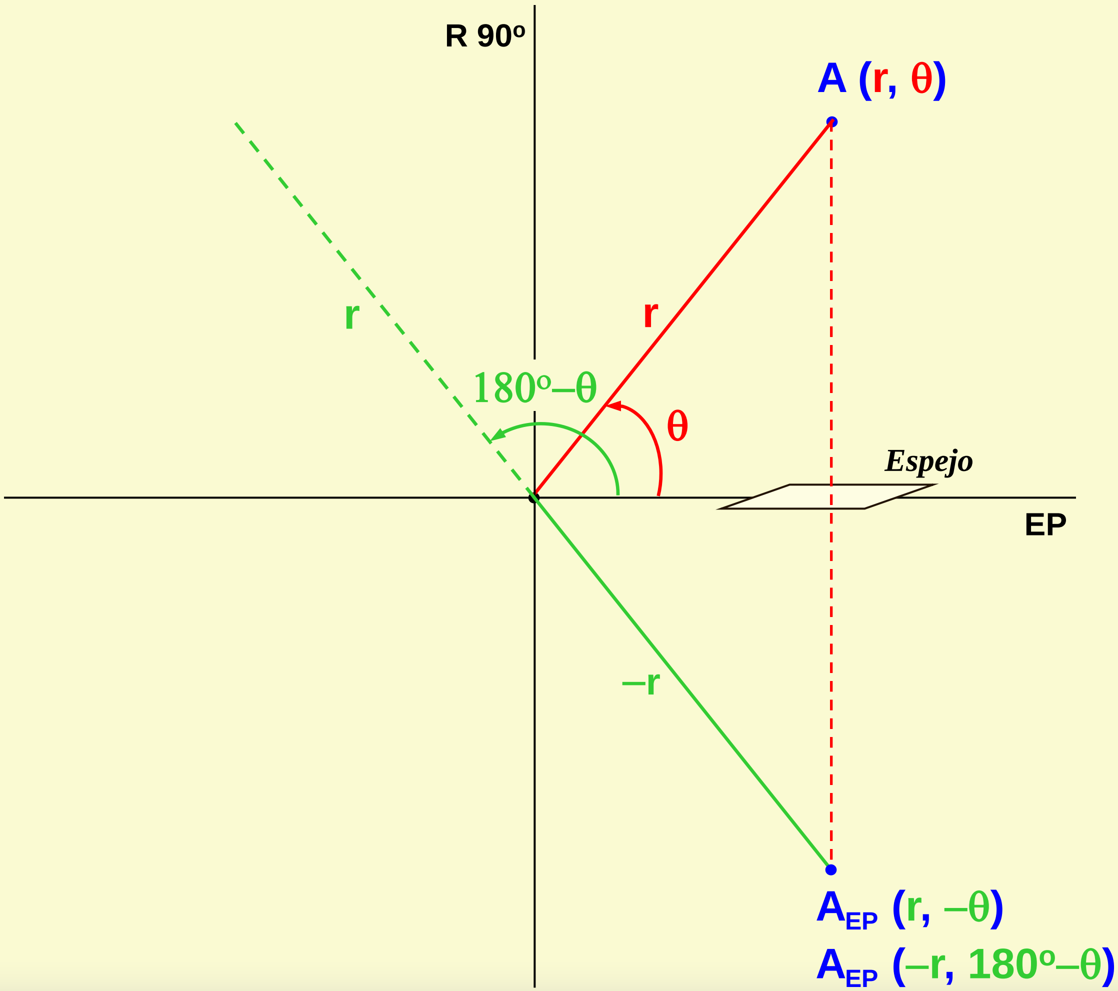
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



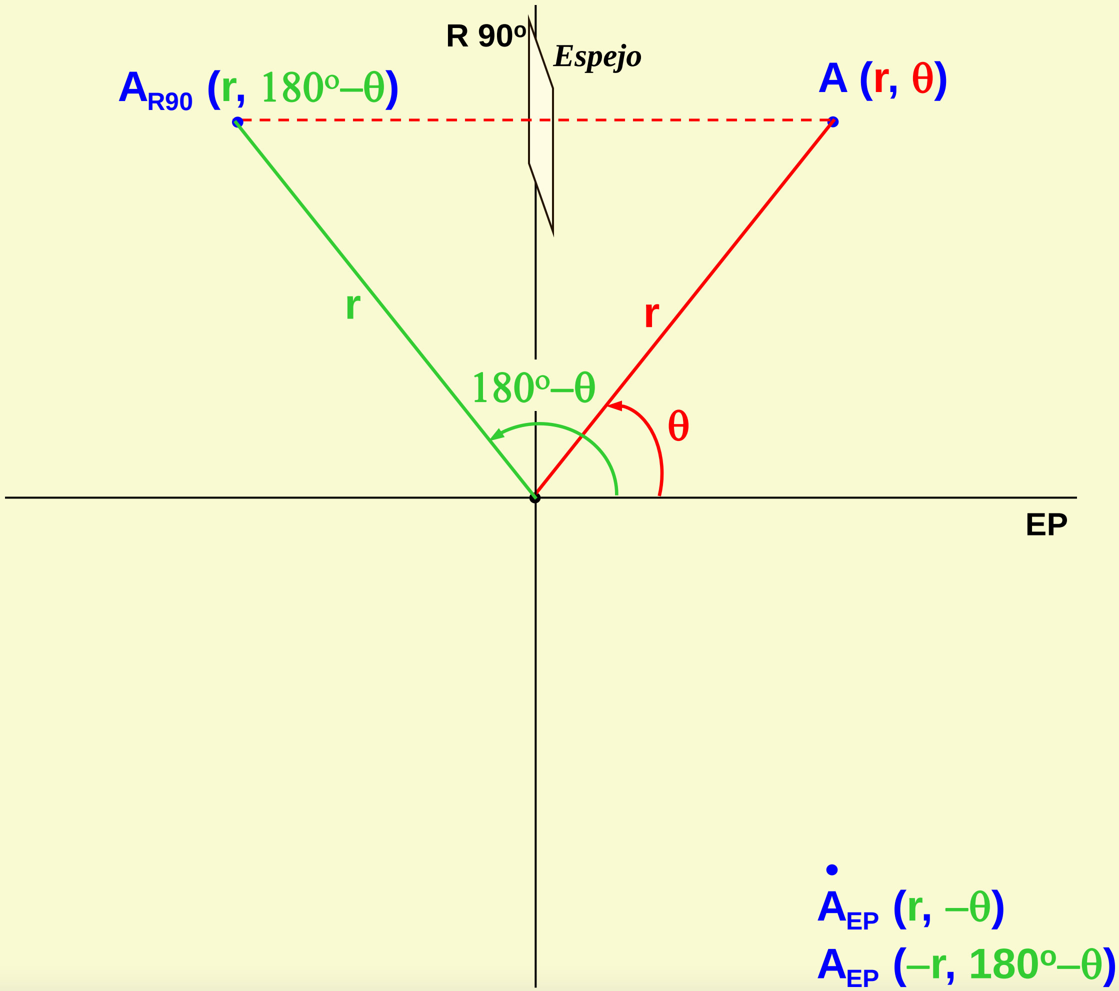
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



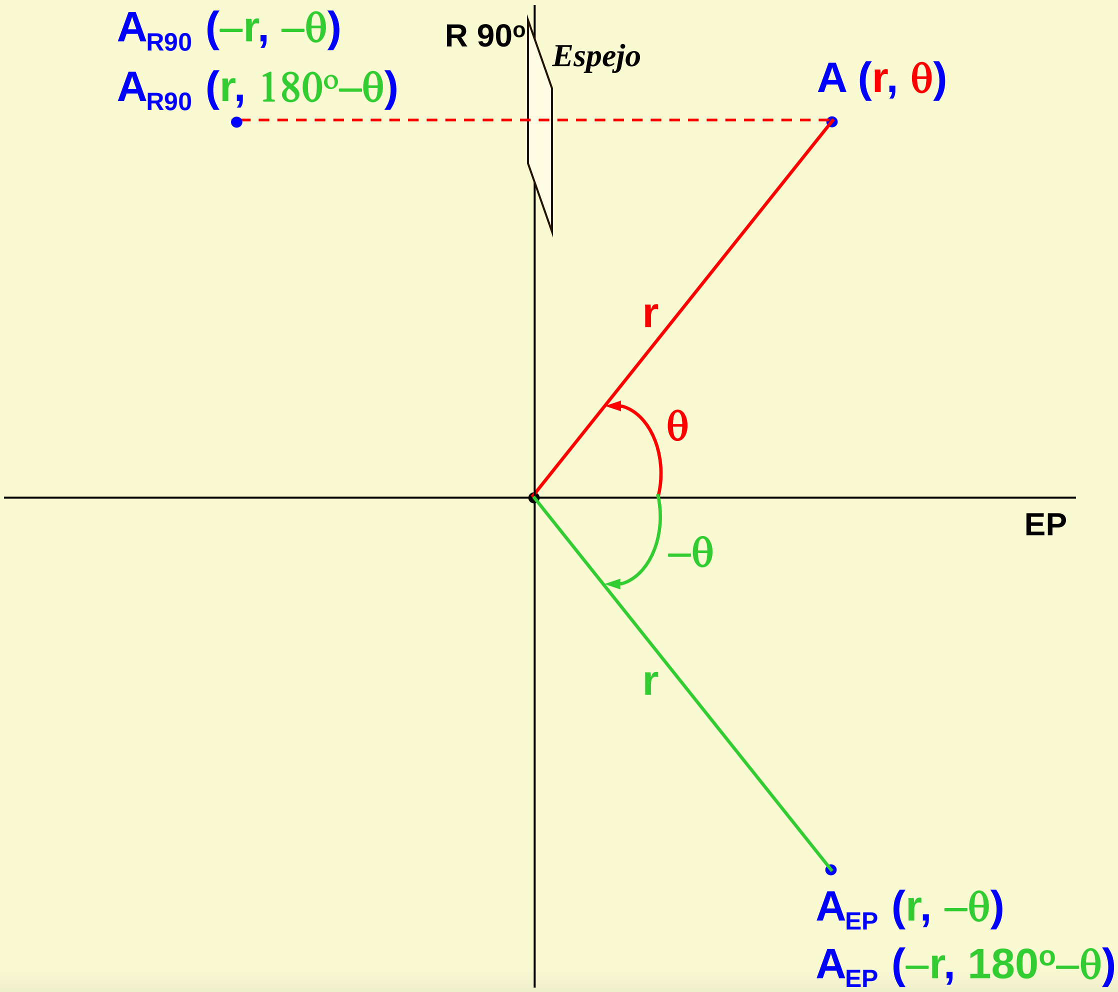
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



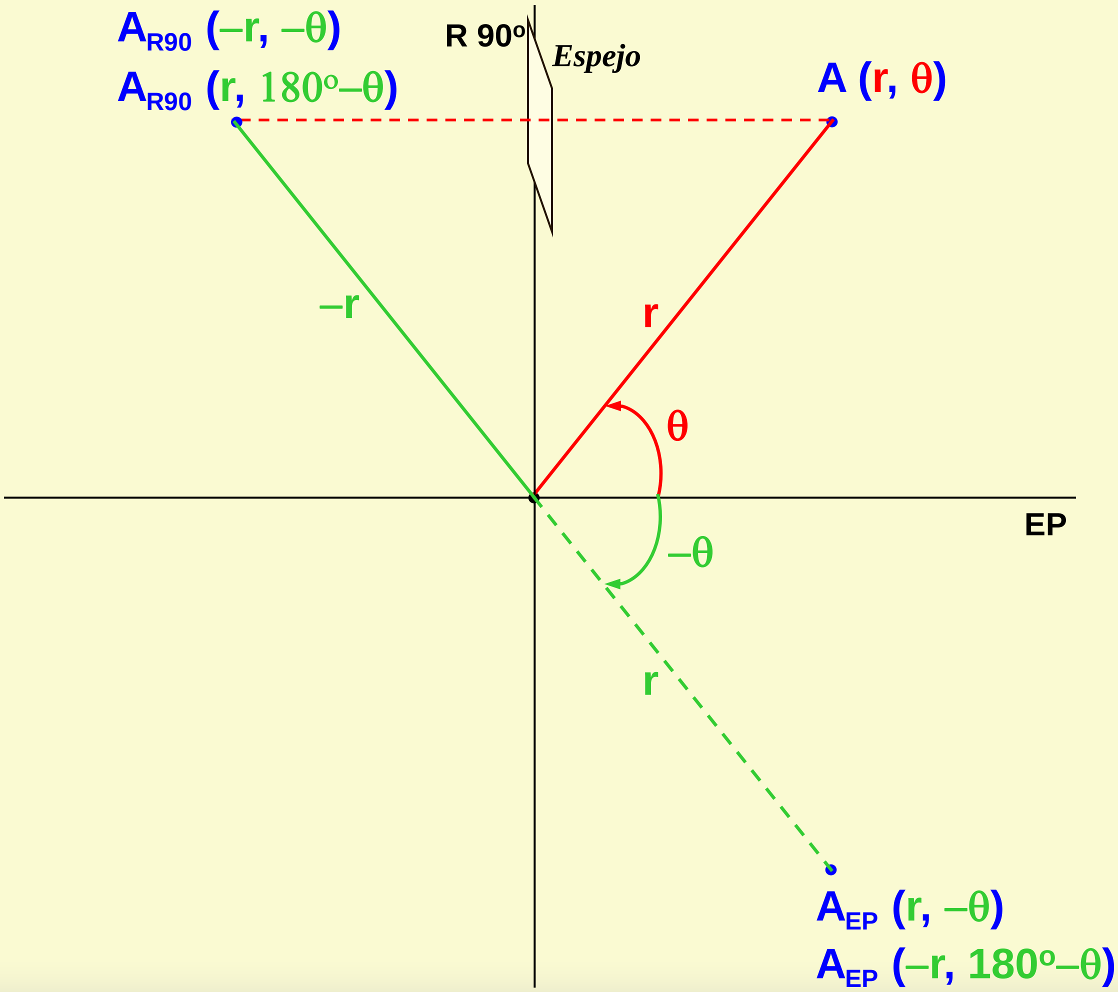
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



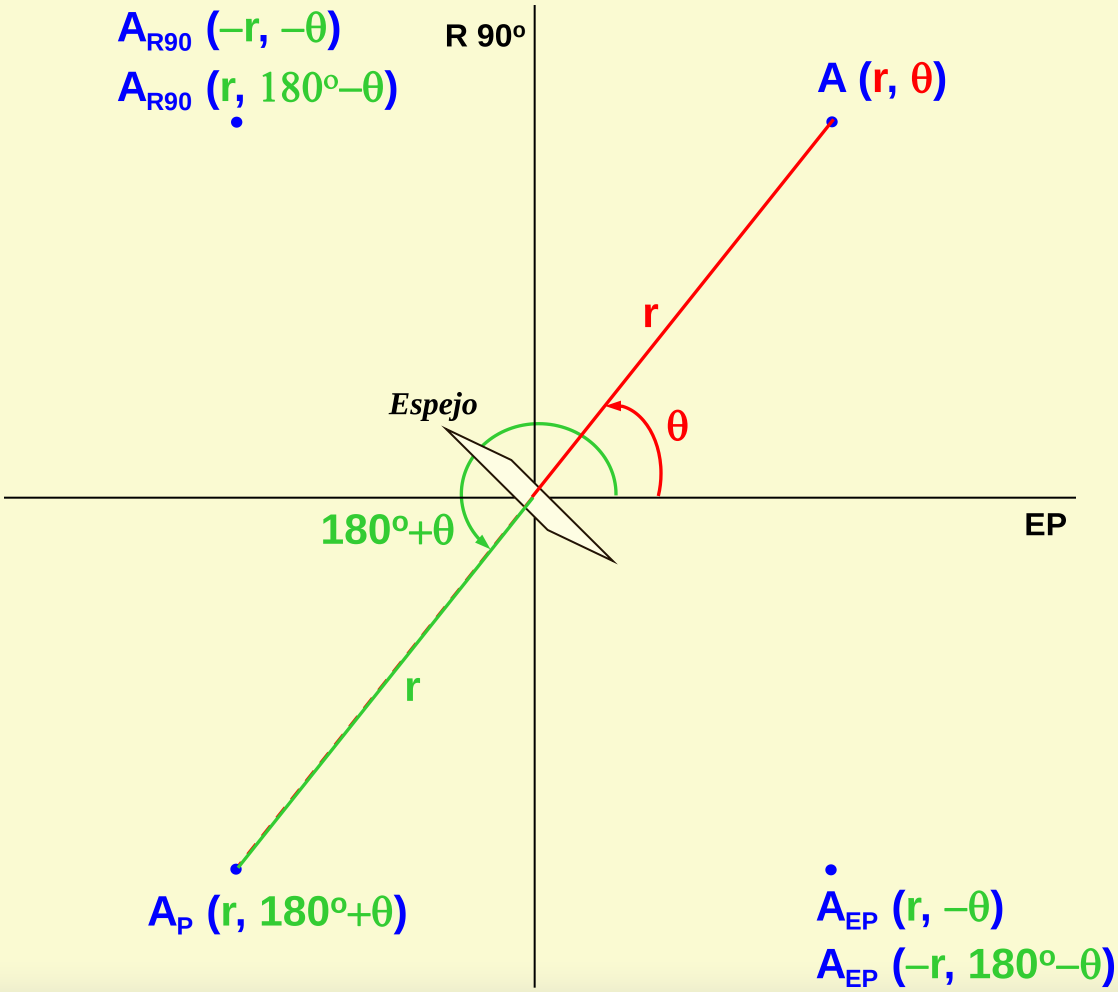
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



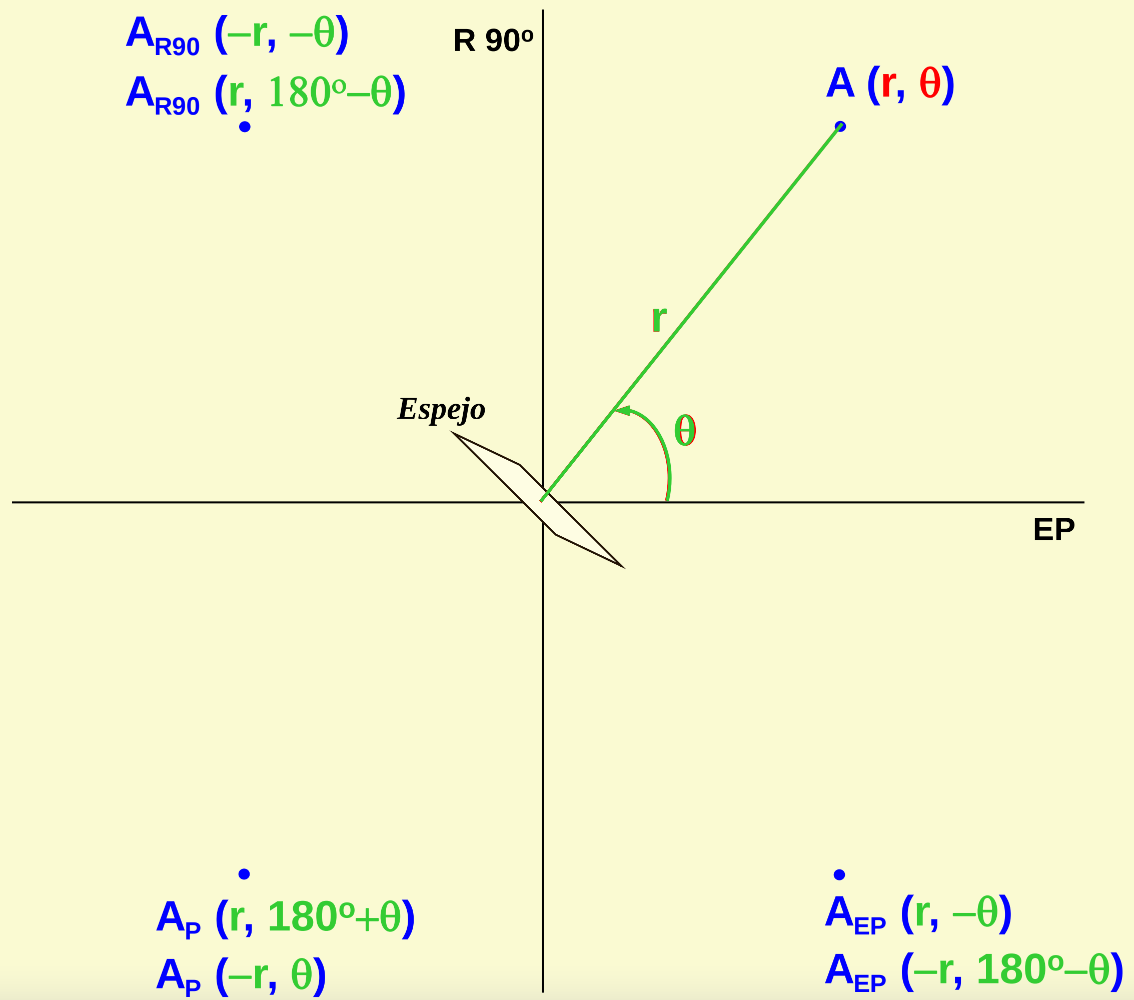
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



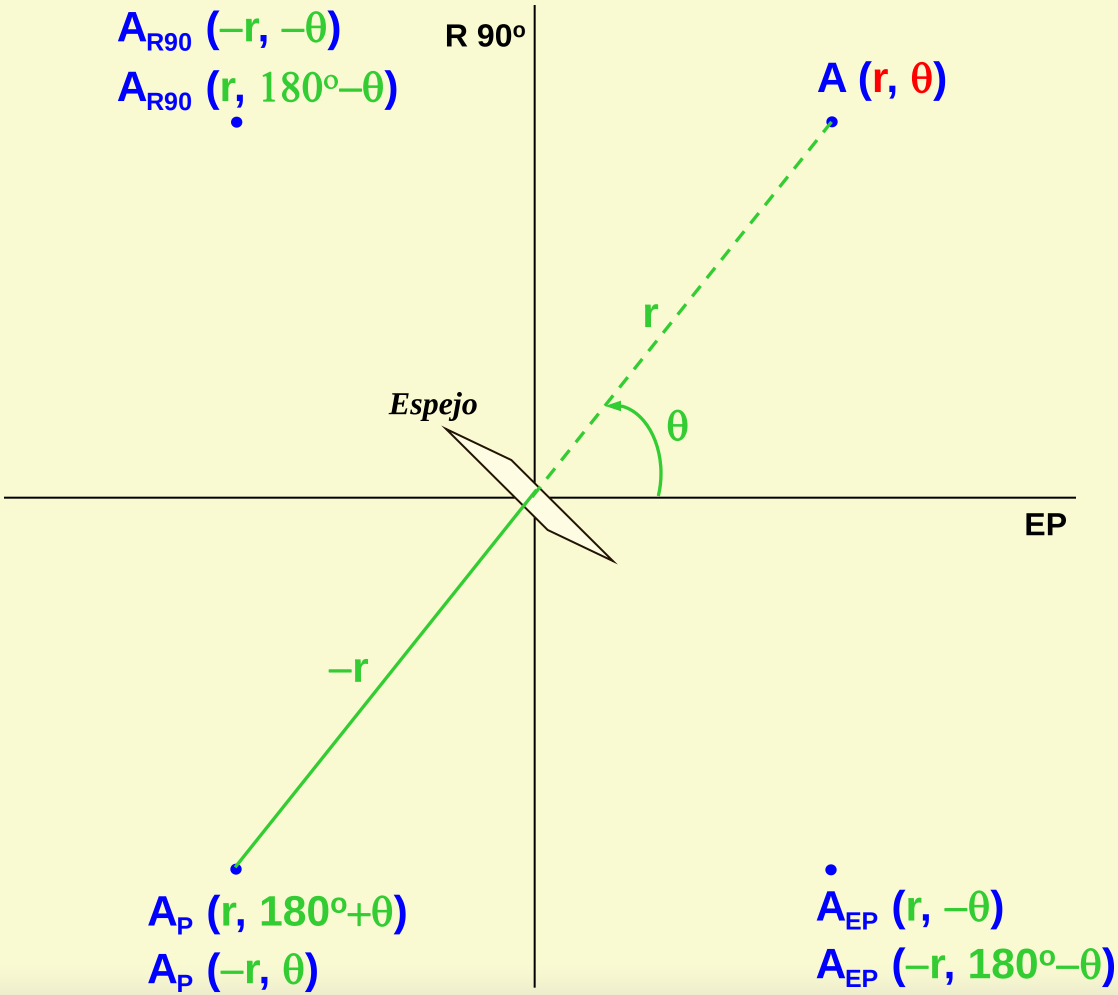
SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



U N A M

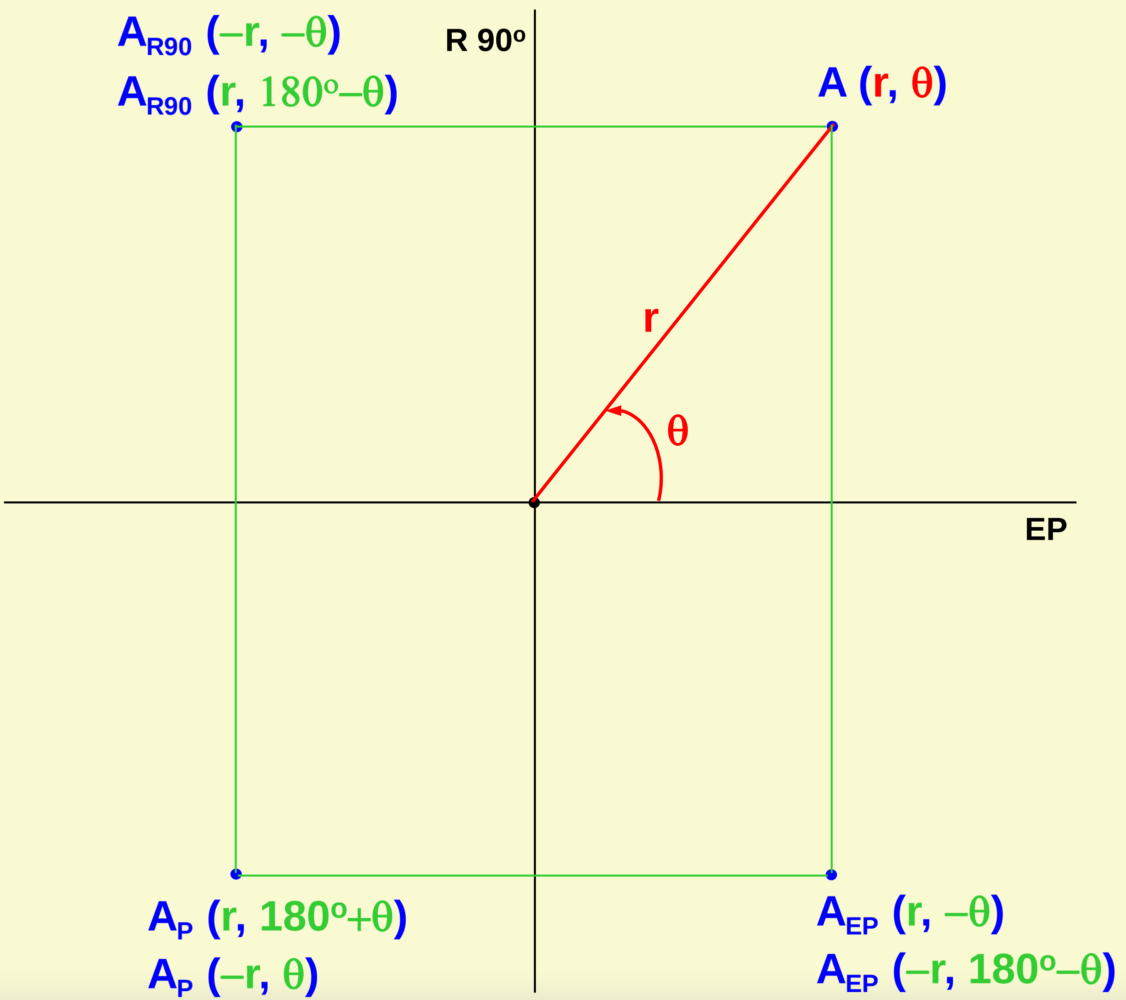
Facultad de Ingeniería

SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



AVM

SIMETRÍAS EN EL SISTEMA POLAR



EJERCICIOS

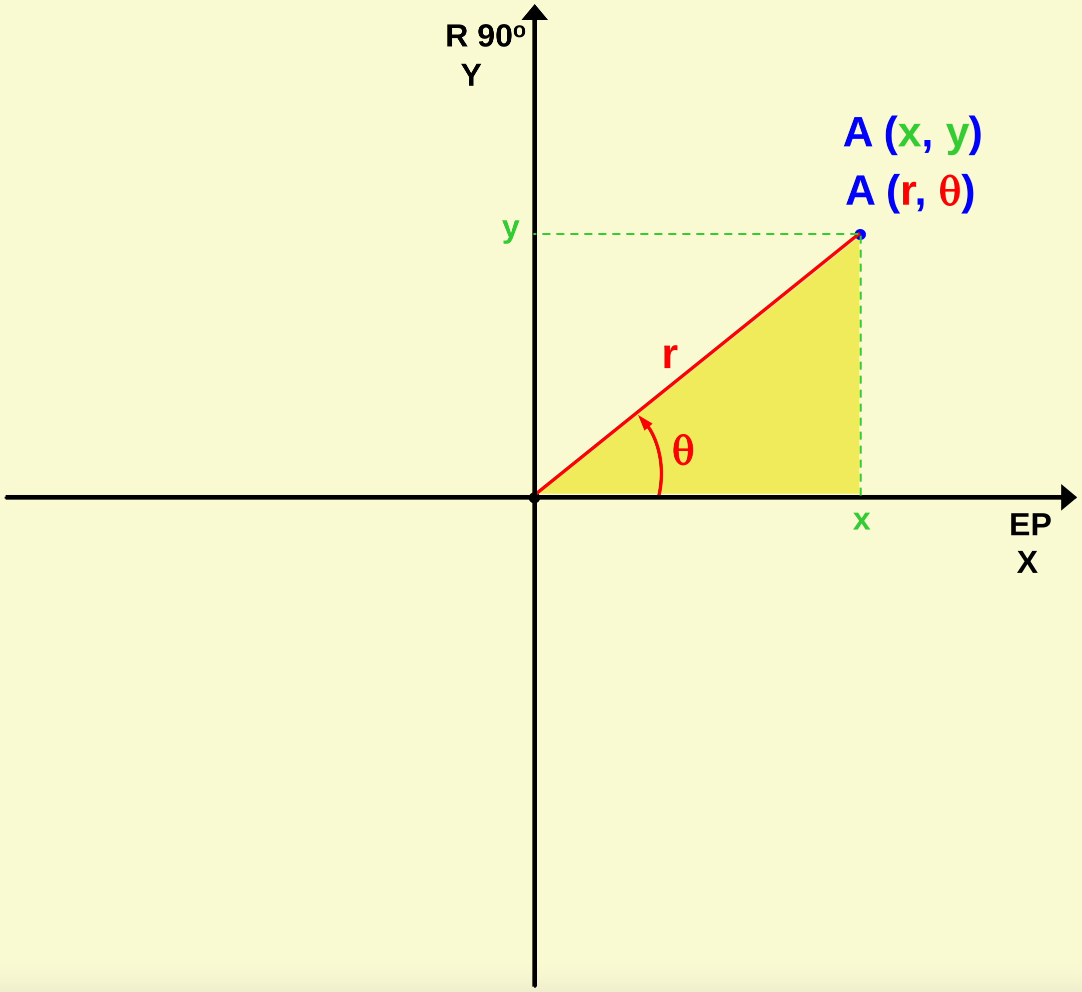
Determine las coordenadas polares del punto B, si éste es el simétrico del punto A (4, 330º) con respecto al eje polar.

B (4, 30º)

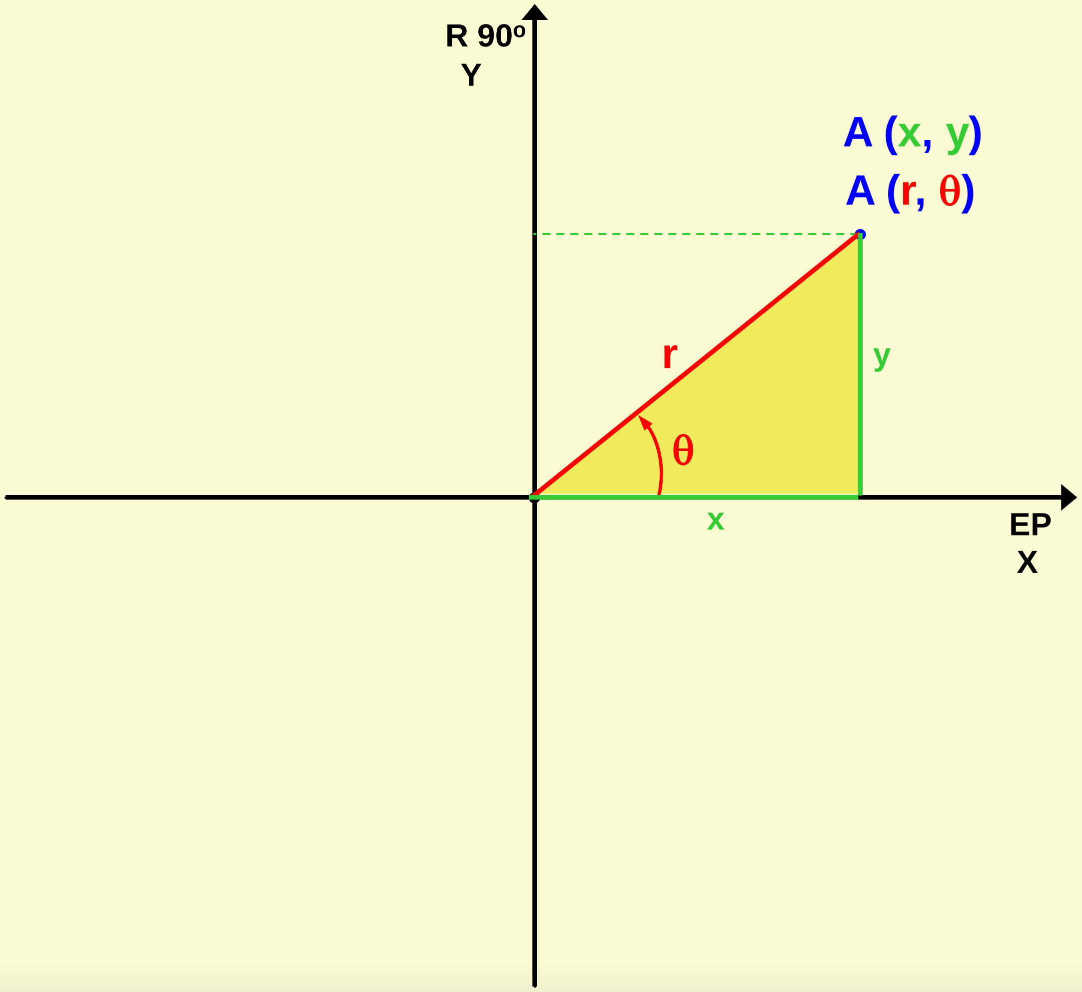
Si el Punto B es el simétrico del punto A (4, –1050º) con respecto al polo y el punto C es el simétrico del punto B con respecto al eje polar, determine las coordenadas de C y el cuadrante en el que se encuentra.

C (4, 150º), segundo cuadrante

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN



ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{ang tan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

EJERCICIOS

Si las coordenadas cartesianas del punto Q son $(-2\sqrt{3}, -2)$, cuáles serían sus coordenadas polares principales.

Q (4, 210º)

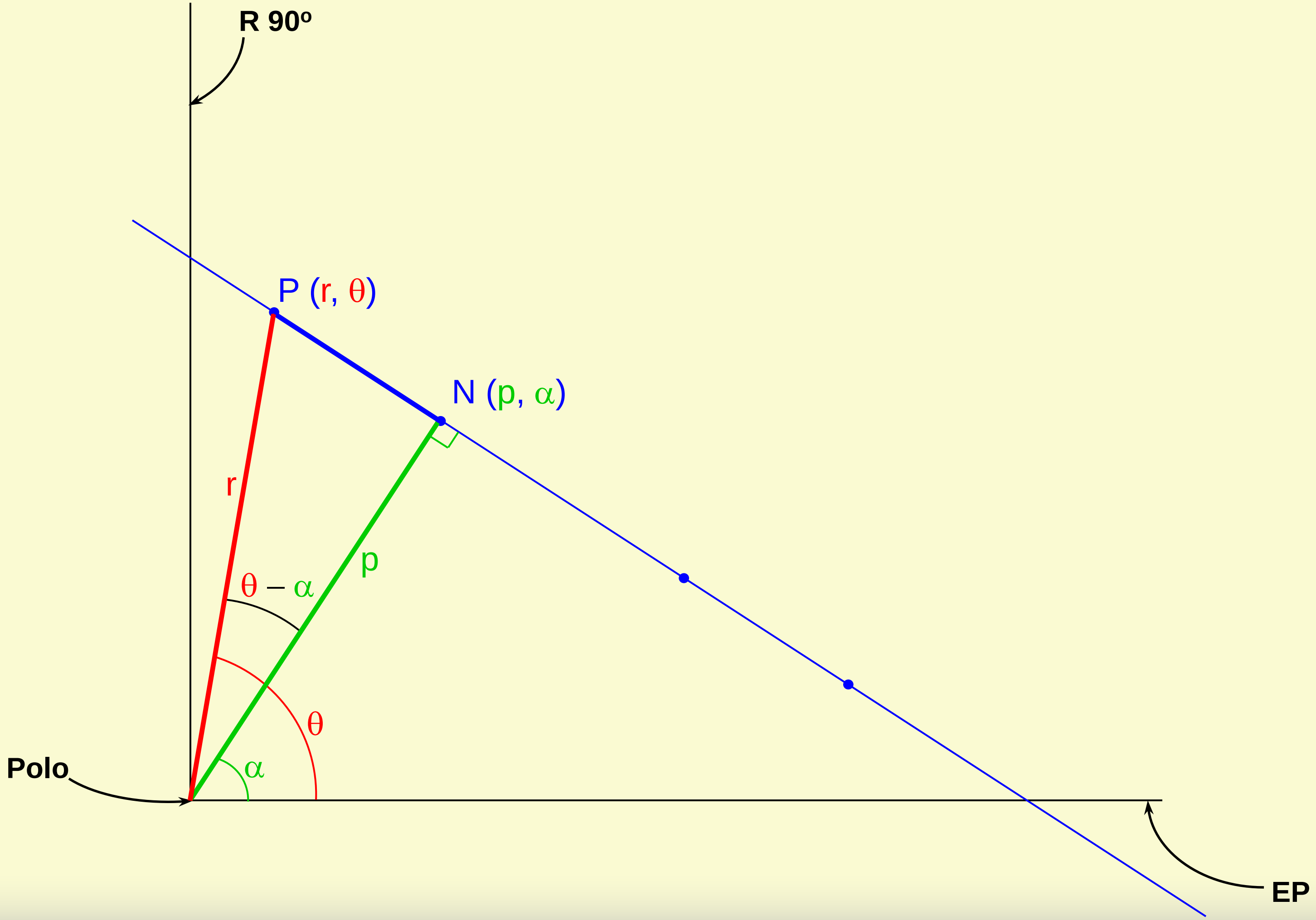
Si el Punto B es el simétrico del punto A (–4, –690º) con respecto al polo y el punto C es el simétrico del punto B con respecto al eje polar, determine las coordenadas cartesianas de C y el cuadrante en el que se encuentra.

C $(2\sqrt{3}, -2)$, cuarto cuadrante

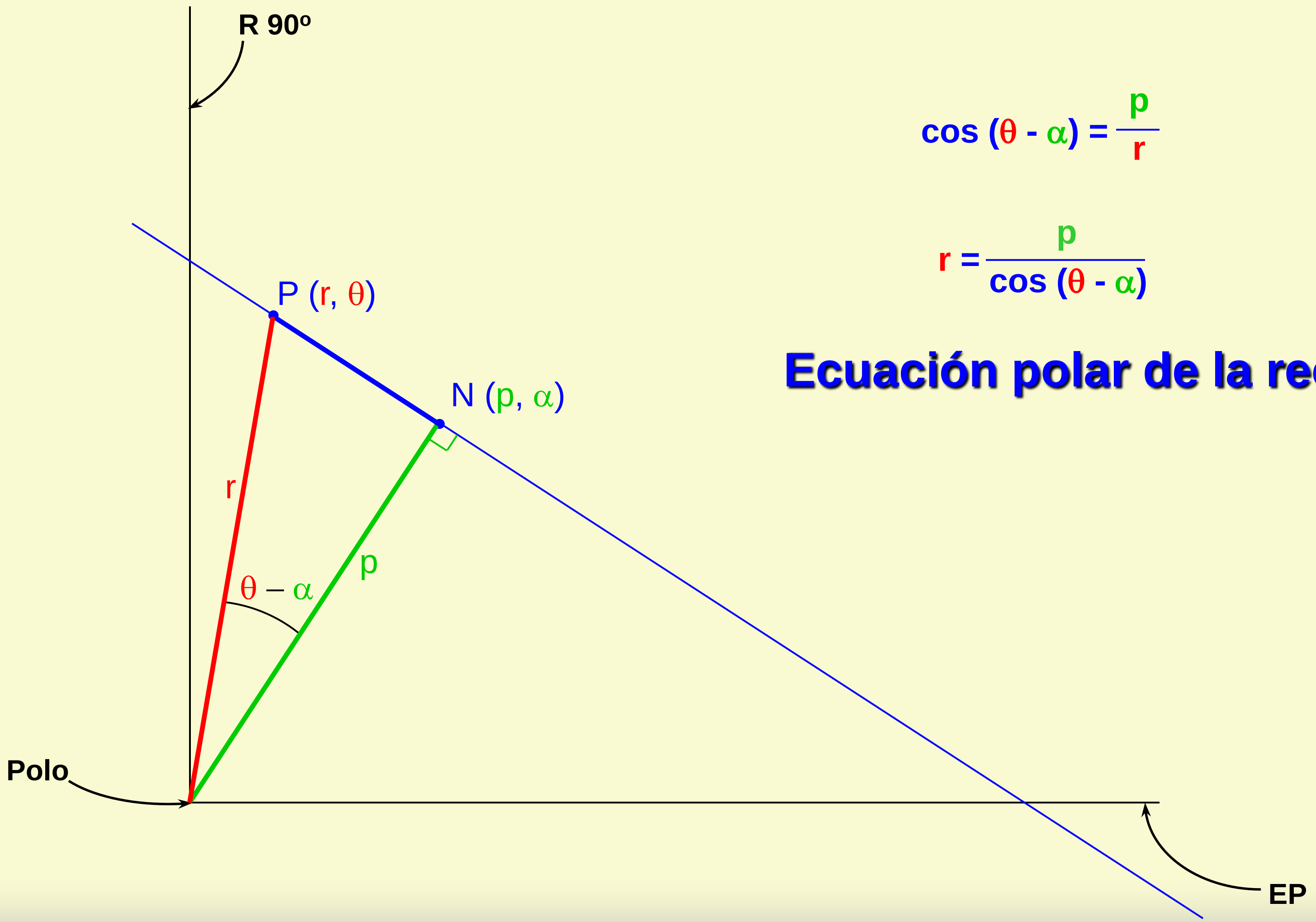
El punto M es el simétrico del punto N con respecto al polo y el punto L es el simétrico del punto N con respecto a la recta a 90º. Si las coordenadas cartesianas de M son $(\sqrt{3}, -1)$, determine las coordenadas polares de L y diga con respecto a qué elemento son simétricos M y L.

C (2, 30º), con respecto al eje polar

ECUACIÓN POLAR DE LA RECTA



ECUACIÓN POLAR DE LA RECTA



$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{p}{r}$$

$$r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}$$

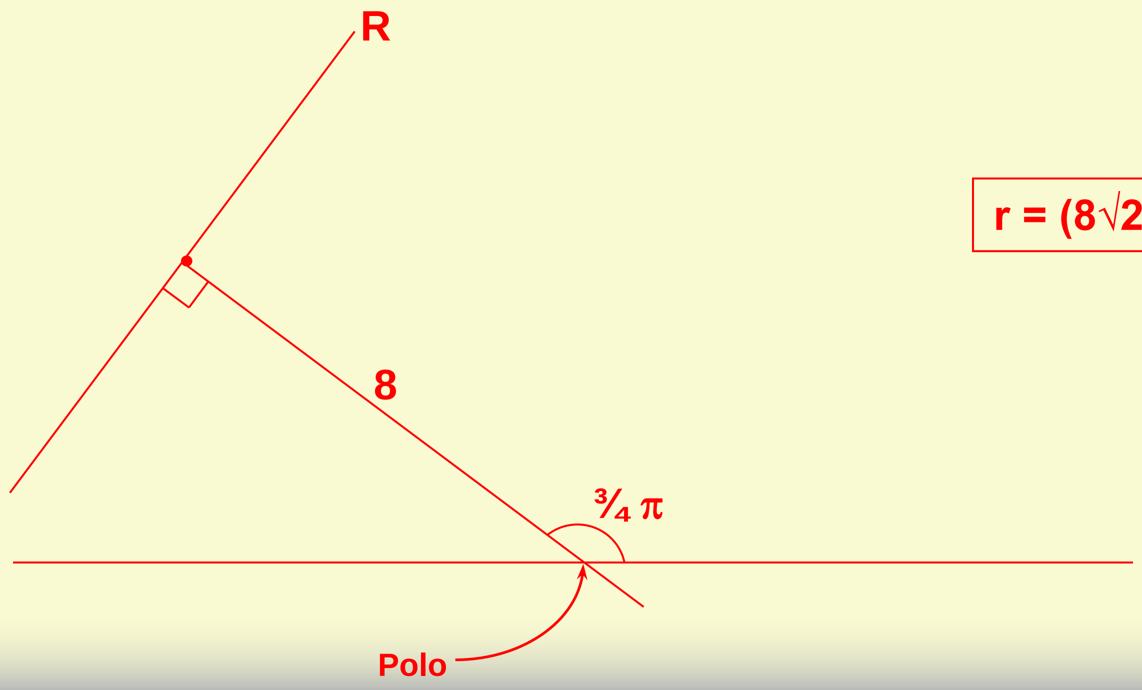
Ecuación polar de la recta

EJERCICIOS

Determine la ecuación polar de la recta paralela al eje polar, que contiene al punto (– 3, – π/6).

$r = 3 / (2 \operatorname{sen}\theta)$

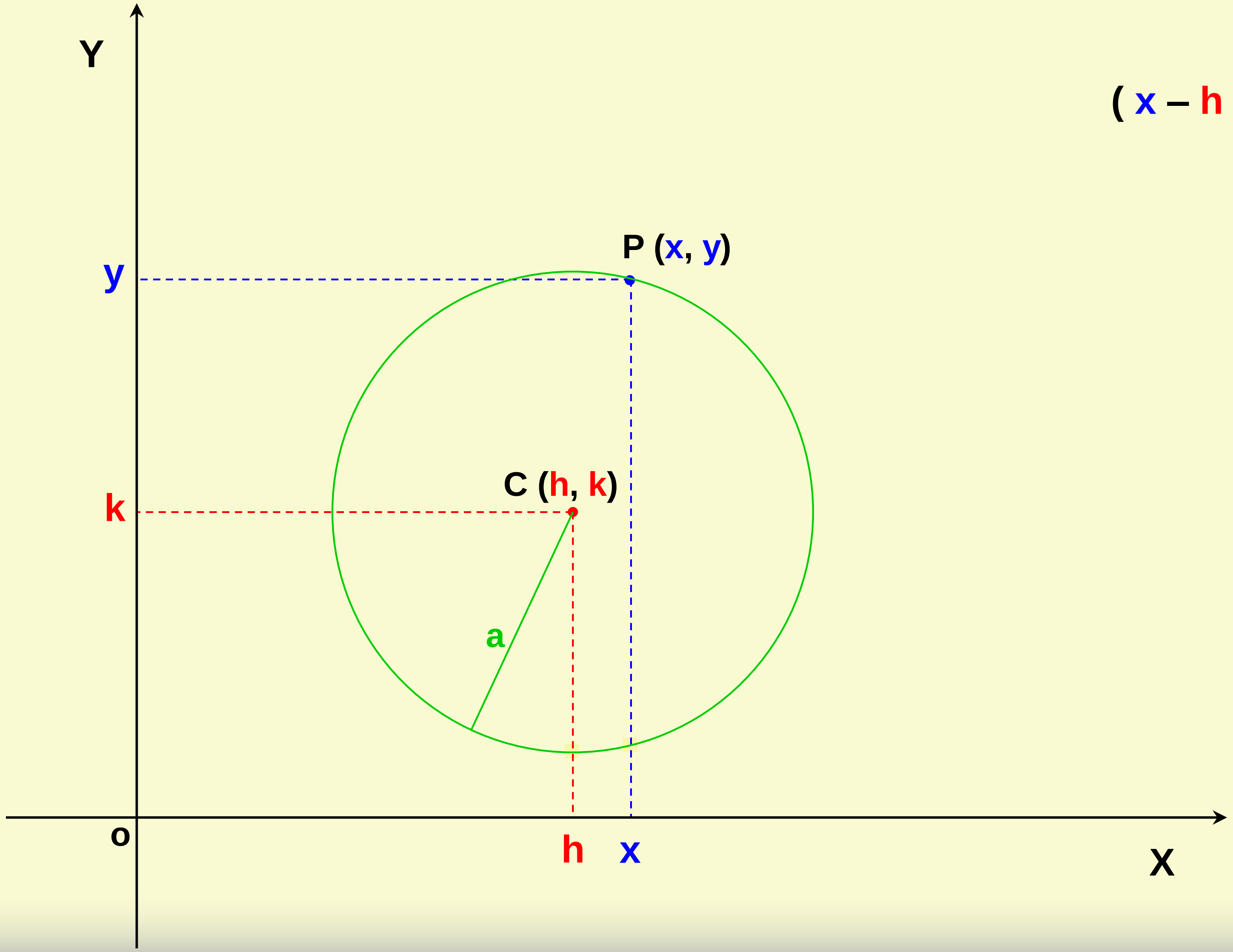
Determinar la ecuación de la recta R con base en la figura siguiente:



$r = (8\sqrt{2}) / (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

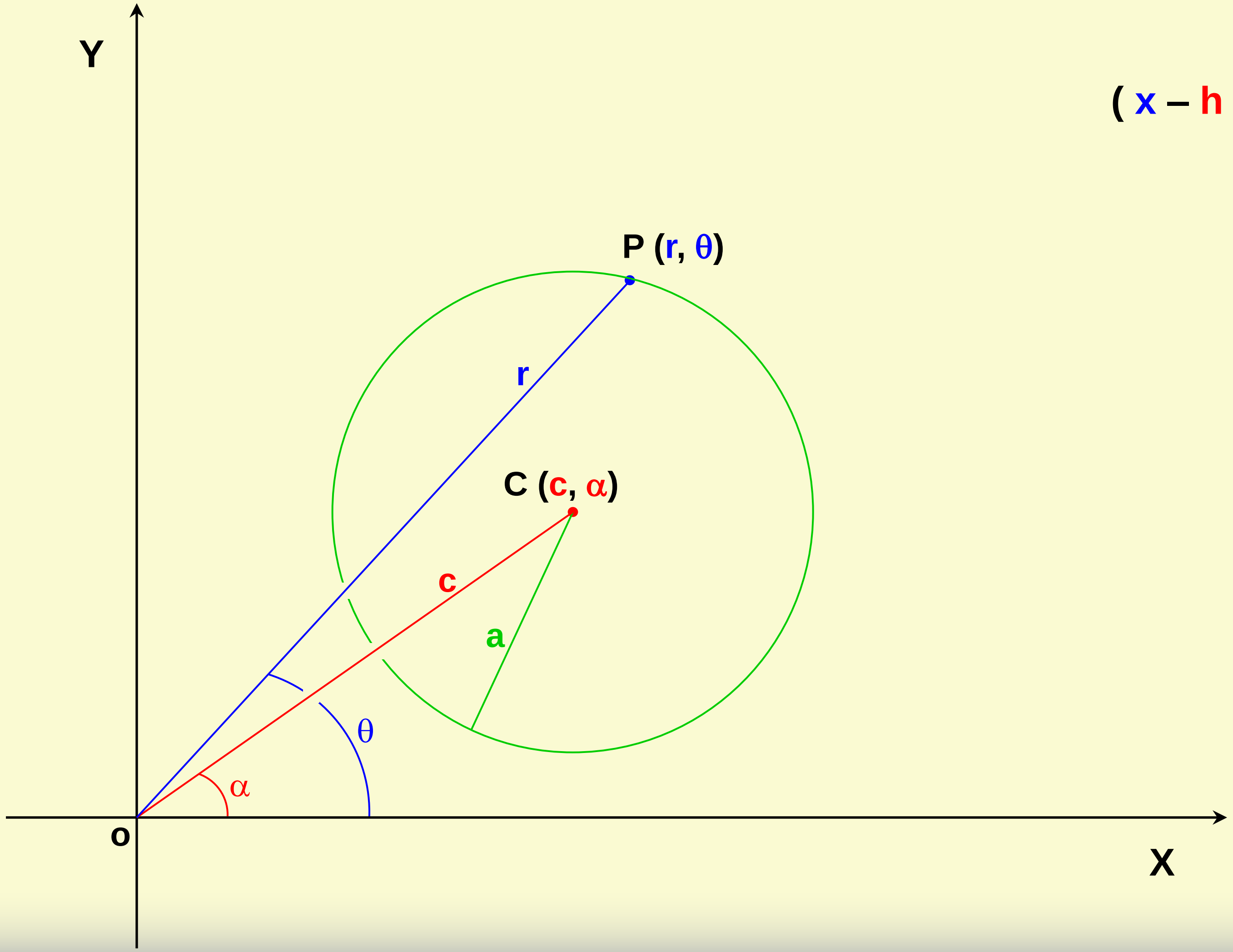
ECUACIÓN POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

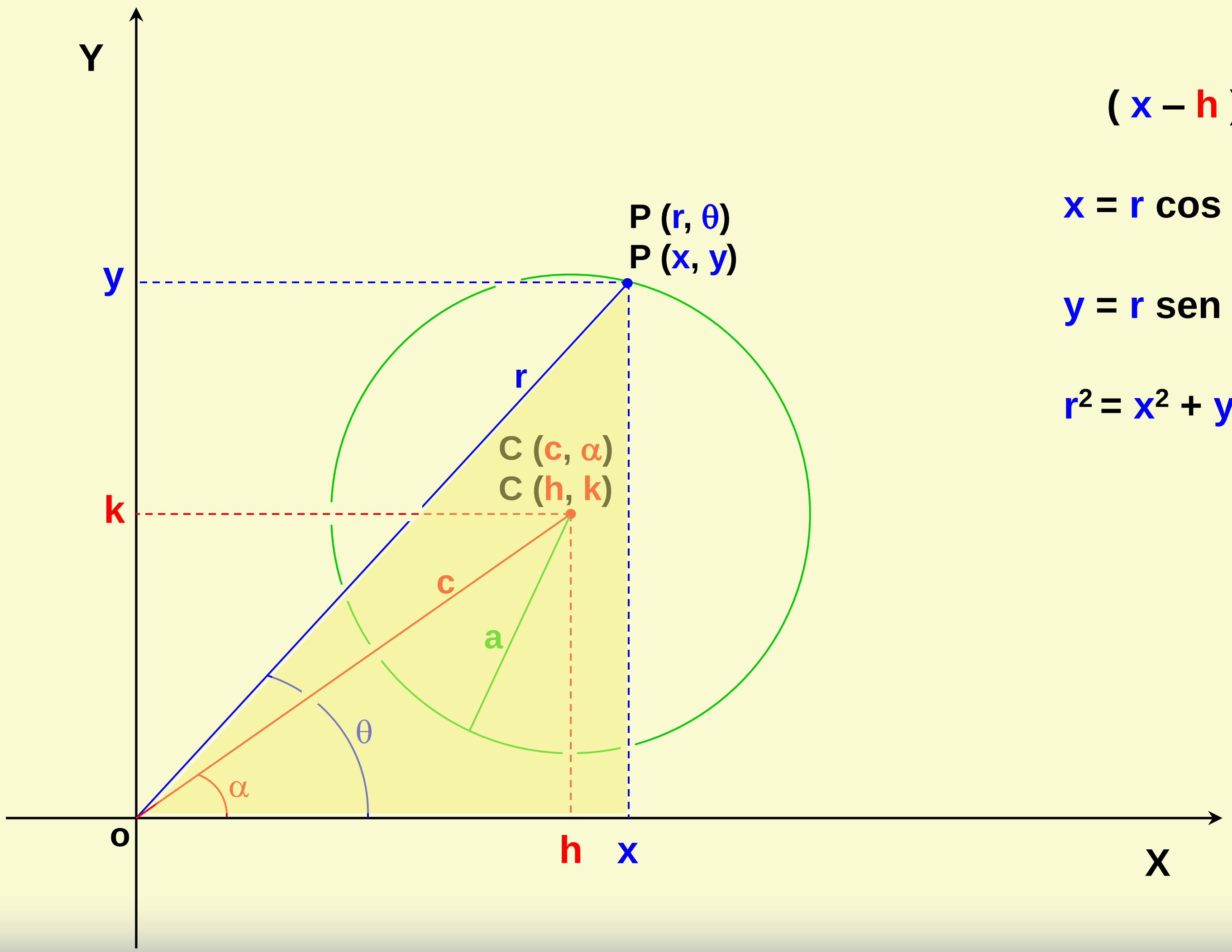


ECUACIÓN POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$



ECUACIÓN POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

$$x = r \cos \theta$$

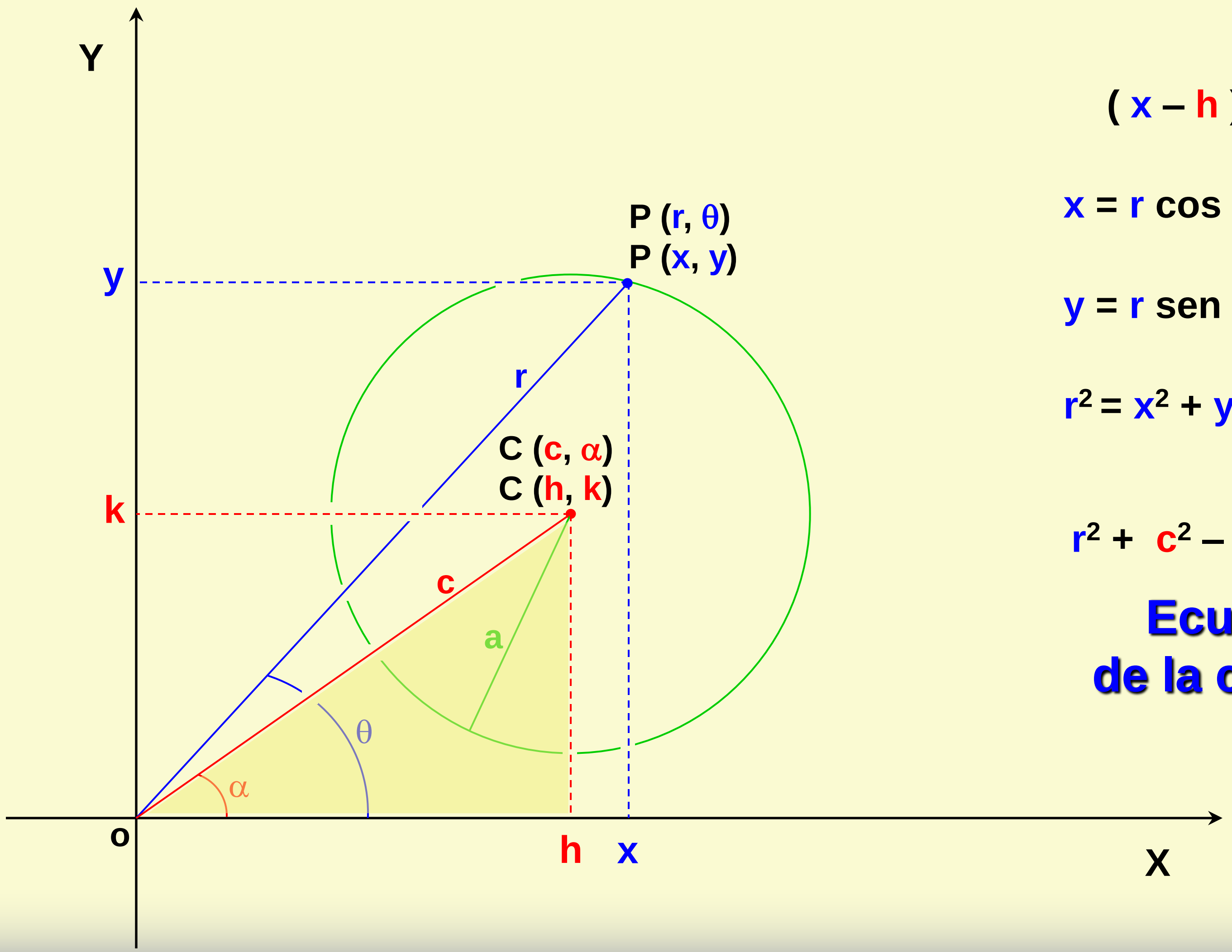
$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

U N A M

Facultad de Ingeniería

ECUACIÓN POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

$x = r\cos\theta$ $\quad$ $h = c\cos\alpha$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad$ $k = c\,\text{sen}\,\alpha$

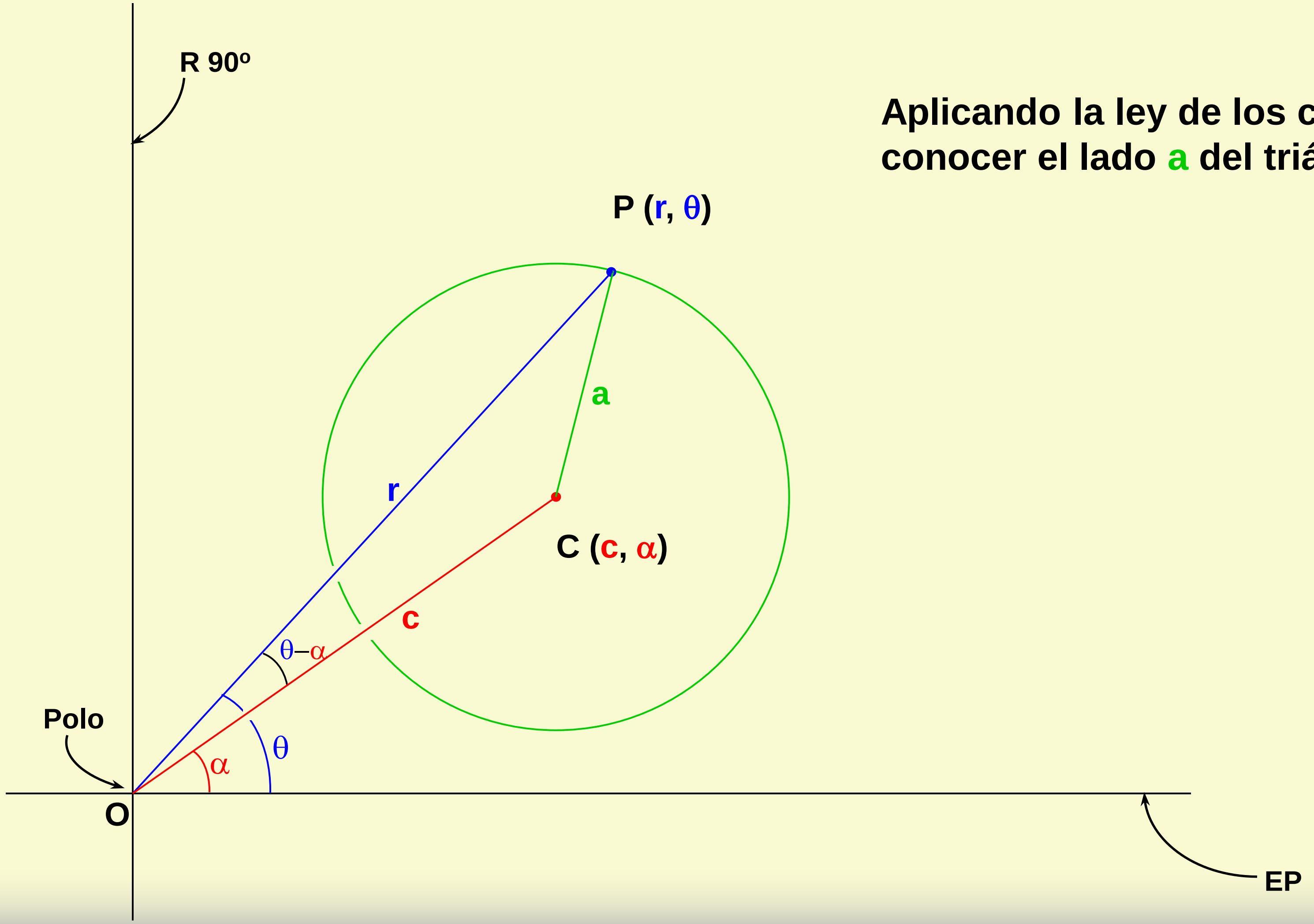
$r^2 = x^2 + y^2$ $\quad$ $c^2 = h^2 + k^2$

$$r^2 + c^2 - 2rc\cos(\theta - \alpha) = a^2$$

Ecuación polar de la circunferencia

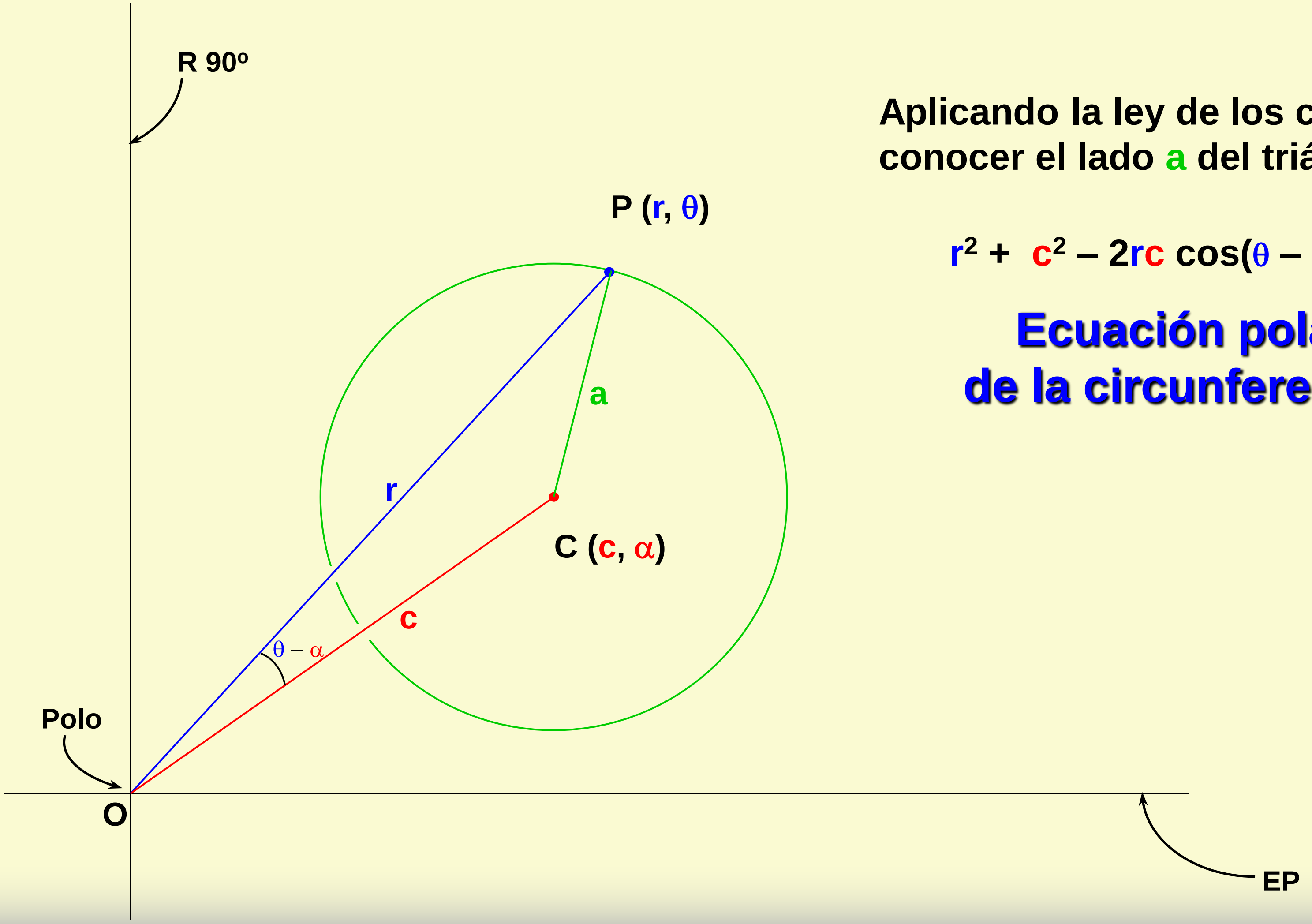
AVM

ECUACIÓN POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA



Aplicando la ley de los cosenos para conocer el lado a del triángulo OPC:

ECUACIÓN POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA



Aplicando la ley de los cosenos para conocer el lado a del triángulo OPC:

$$r^2 + c^2 - 2rc\cos(\theta - \alpha) = a^2$$

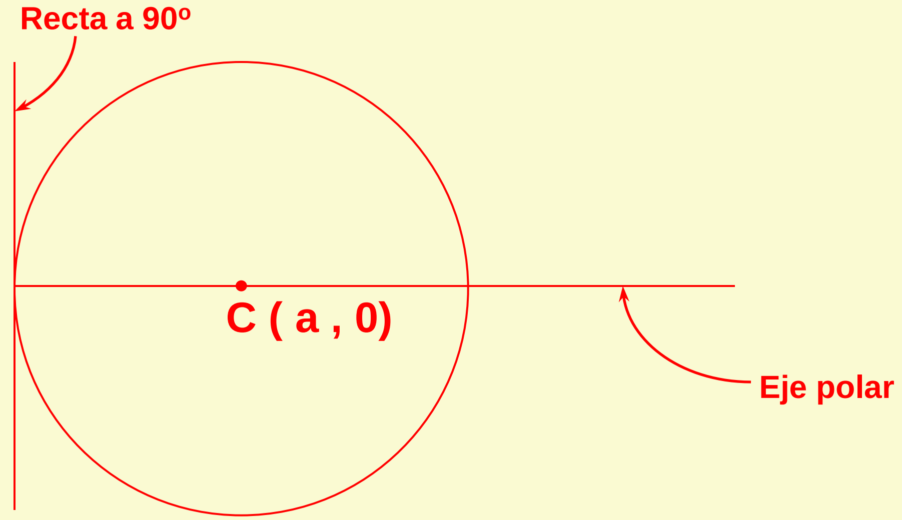
Ecuación polar de la circunferencia

EJERCICIOS

Determine la ecuación polar de la circunferencia de radio 4 y cuyo centro esta en (– 4, 765º).

$$\boxed{r^2 + 4\sqrt{2}\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, r = 0}$$

Determine la ecuación polar de la circunferencia que contiene al polo y que se muestra en la figura siguiente:



$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$

ECUACIÓN POLAR DE LAS CÓNICAS

$$r = \frac{e\,p}{1 - e\cos\theta}$$

Ecuación polar de una cónica con foco en el polo, eje focal coincidente con el eje polar y directriz a la izquierda del foco. Dependiendo del valor de la excentricidad (e), puede representar una parábola (e = 1), una elipse (0<e<1) o una hipérbola (e>1).

$$r = \frac{e\,p}{1 + e\cos\theta}$$

Ecuación polar de una cónica con foco en el polo, eje focal coincidente con el eje polar y directriz a la derecha del foco.

ECUACIÓN POLAR DE LAS CÓNICAS

$$r = \frac{e\,p}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

Ecuación polar de una cónica con foco en el polo, eje focal coincidente con el eje polar y directriz abajo del foco.

$$r = \frac{e\,p}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

Ecuación polar de una cónica con foco en el polo, eje focal coincidente con el eje polar y directriz arriba del foco.

EJERCICIOS

Determine la ecuación polar de la elipse cuyo foco esta en el origen, tiene excentricidad de ¼ y su directriz es la recta de ecuación:

$$r = \frac{-2}{\cos\theta}$$

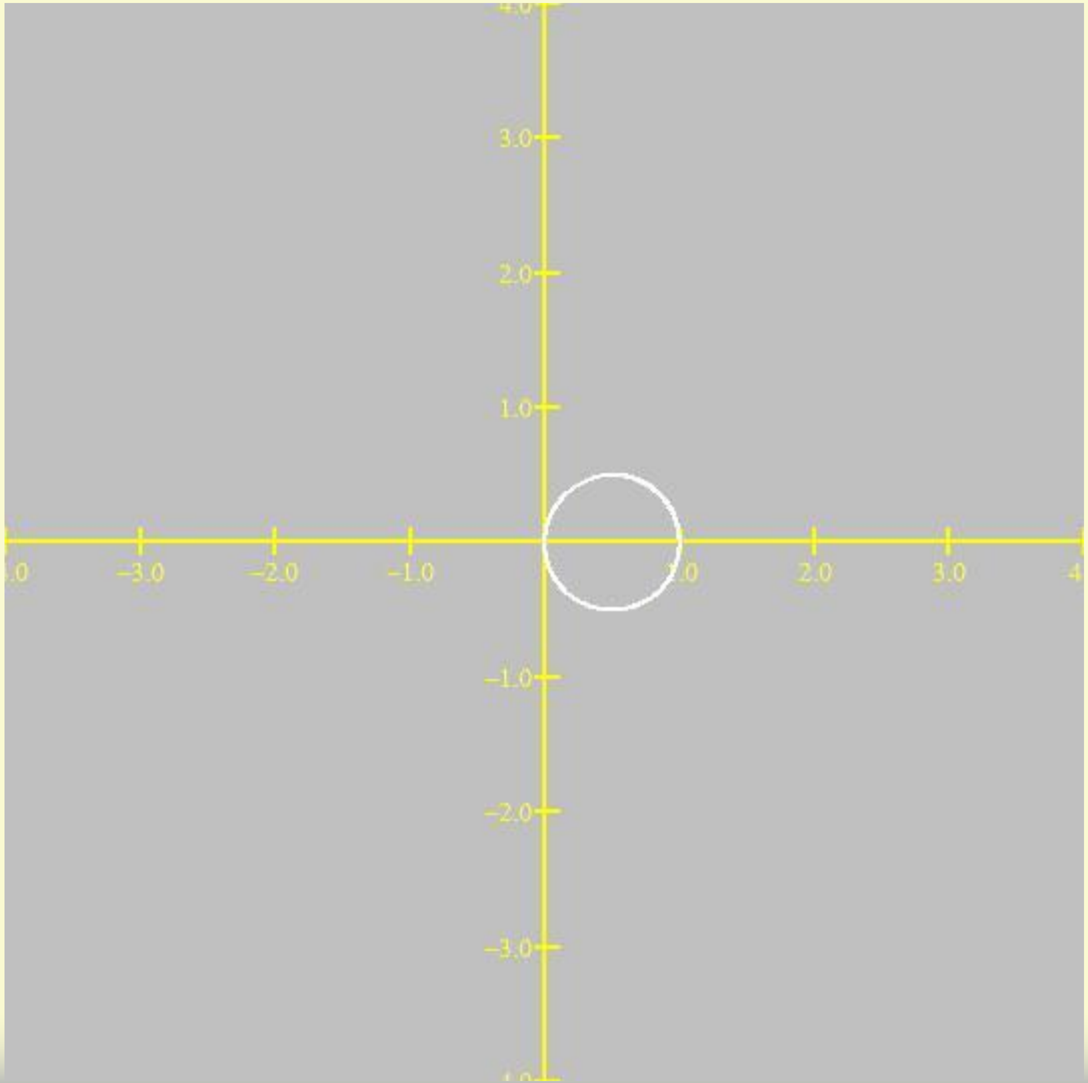
$$\boxed{r = 2 \,/\, (4 - \cos\theta)}$$

Determine la ecuación cartesiana de la elipse del problema anterior.

$$\boxed{15x^2 + 16y^2 - 4x - 4 = 0}$$

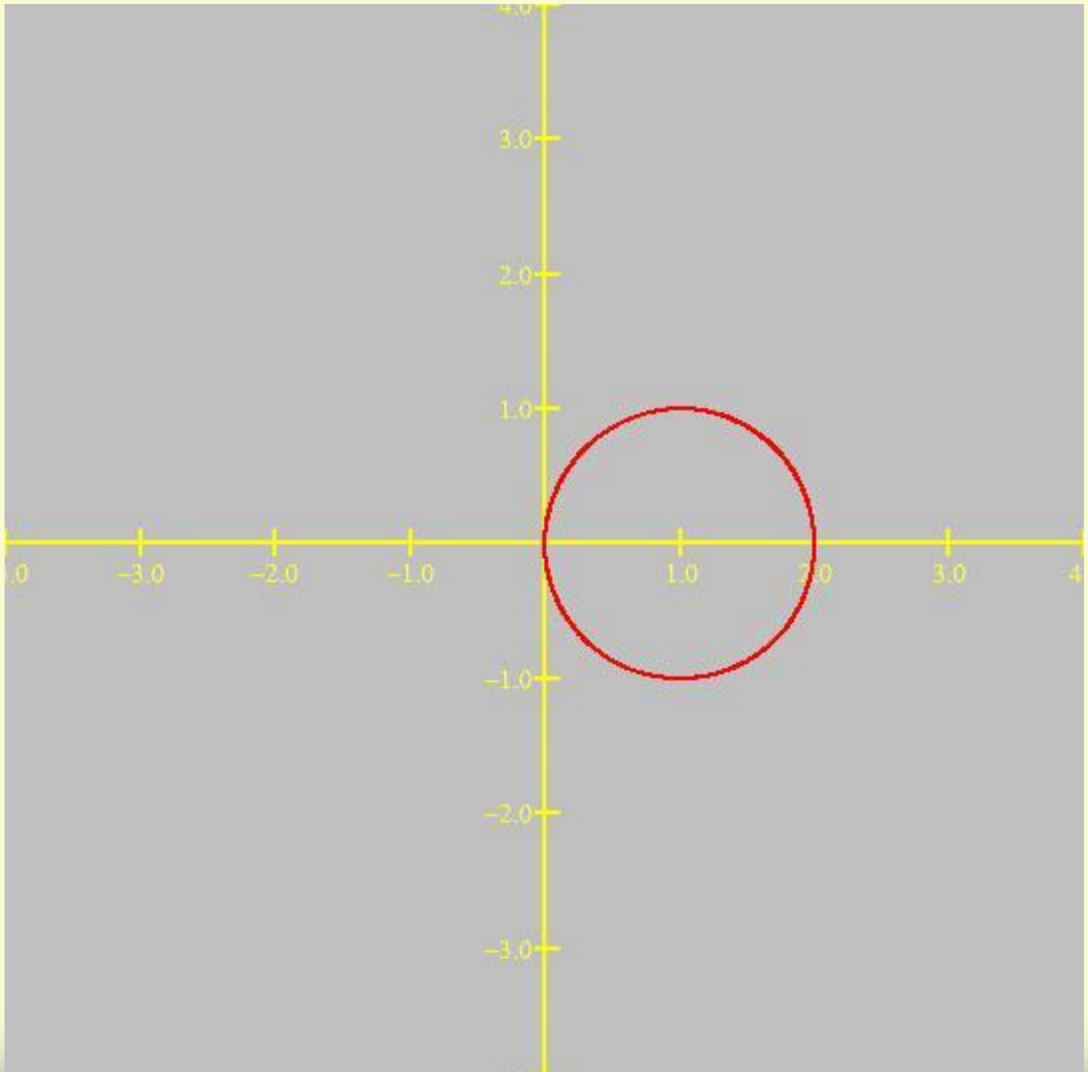
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

r = cosθ



ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

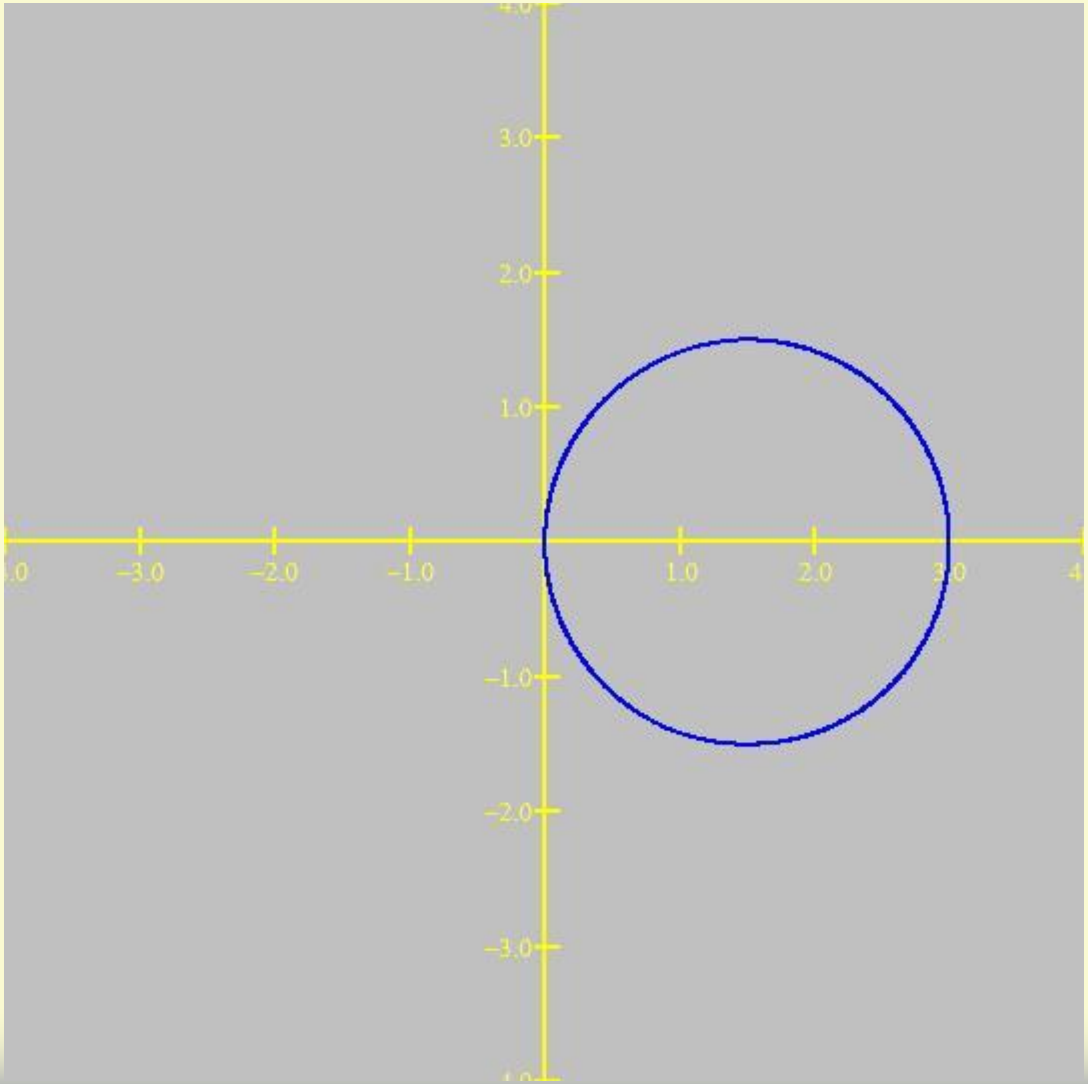
$r = 2\cos\theta$



U N A M
Facultad de Ingeniería

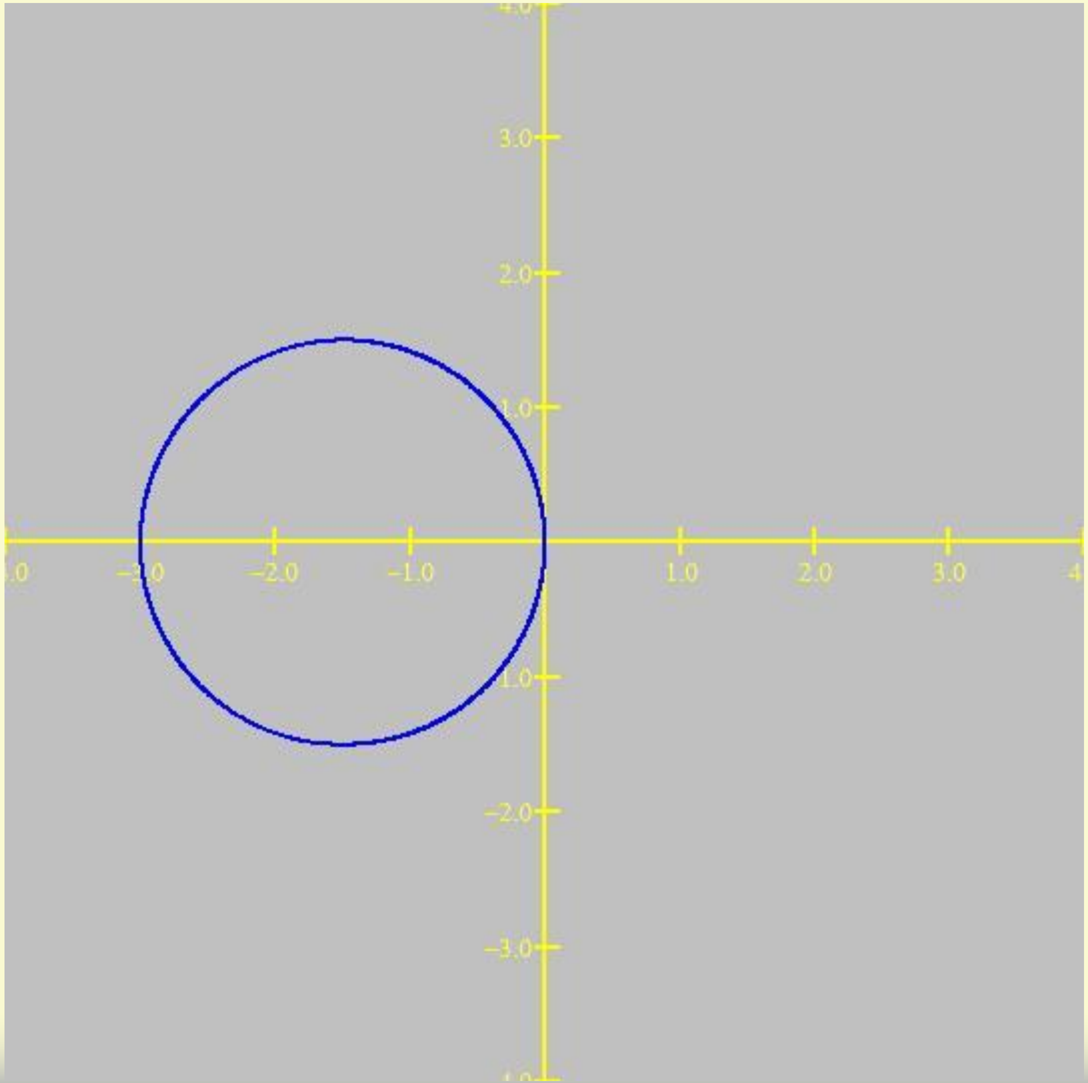
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

$r = 3\cos\theta$



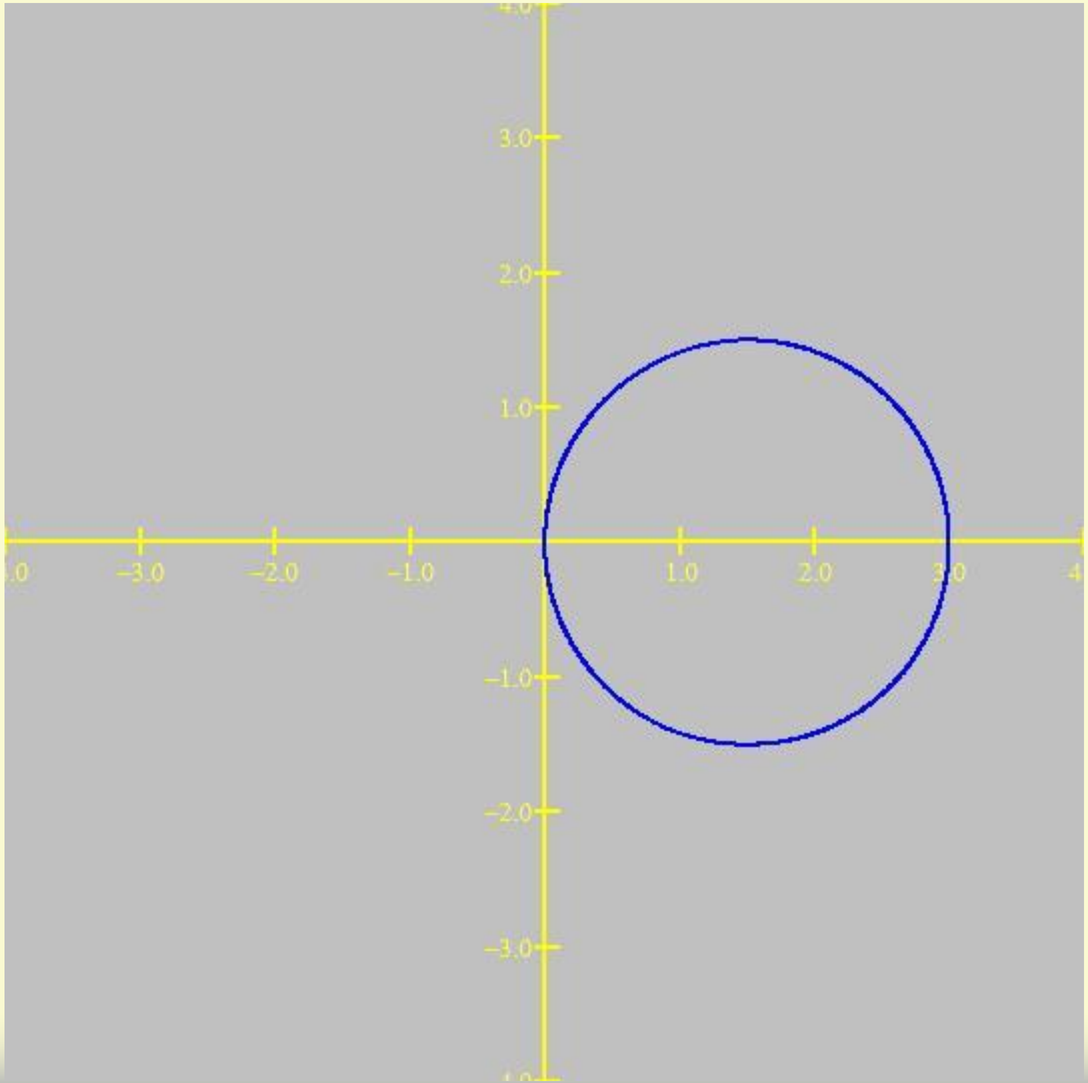
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

$r = -3\cos\theta$



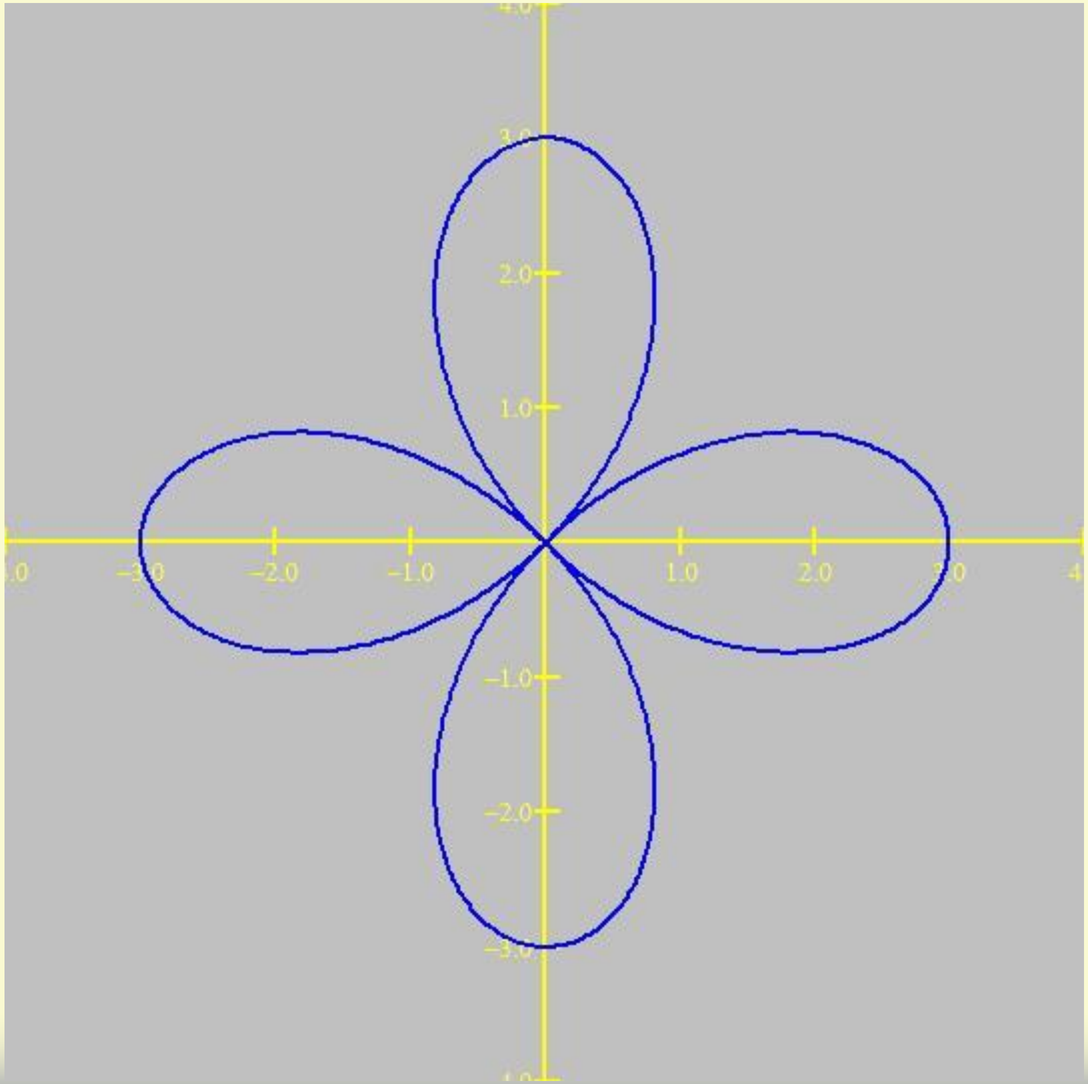
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

$r = 3\cos\theta$



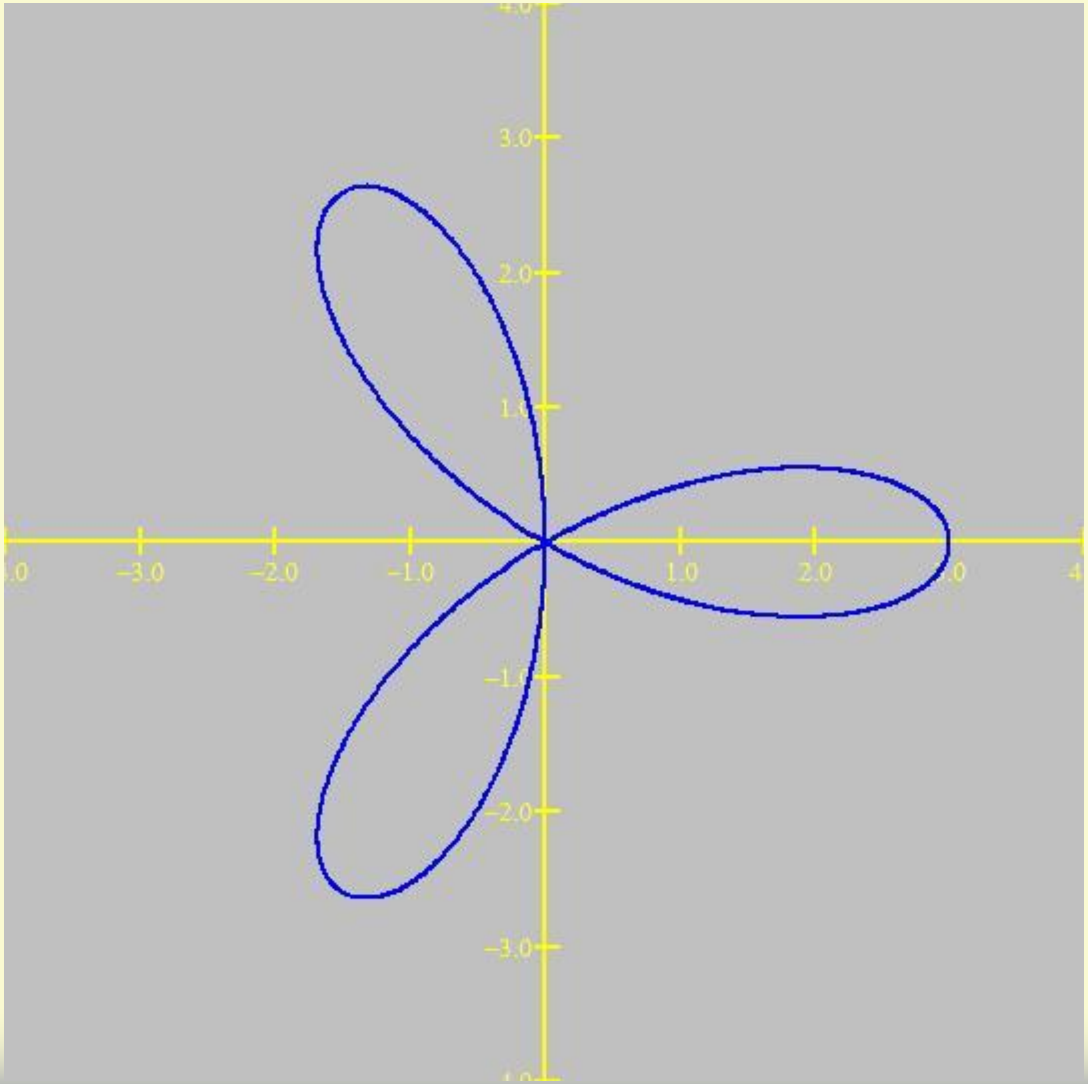
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

r = 3cos(2θ)



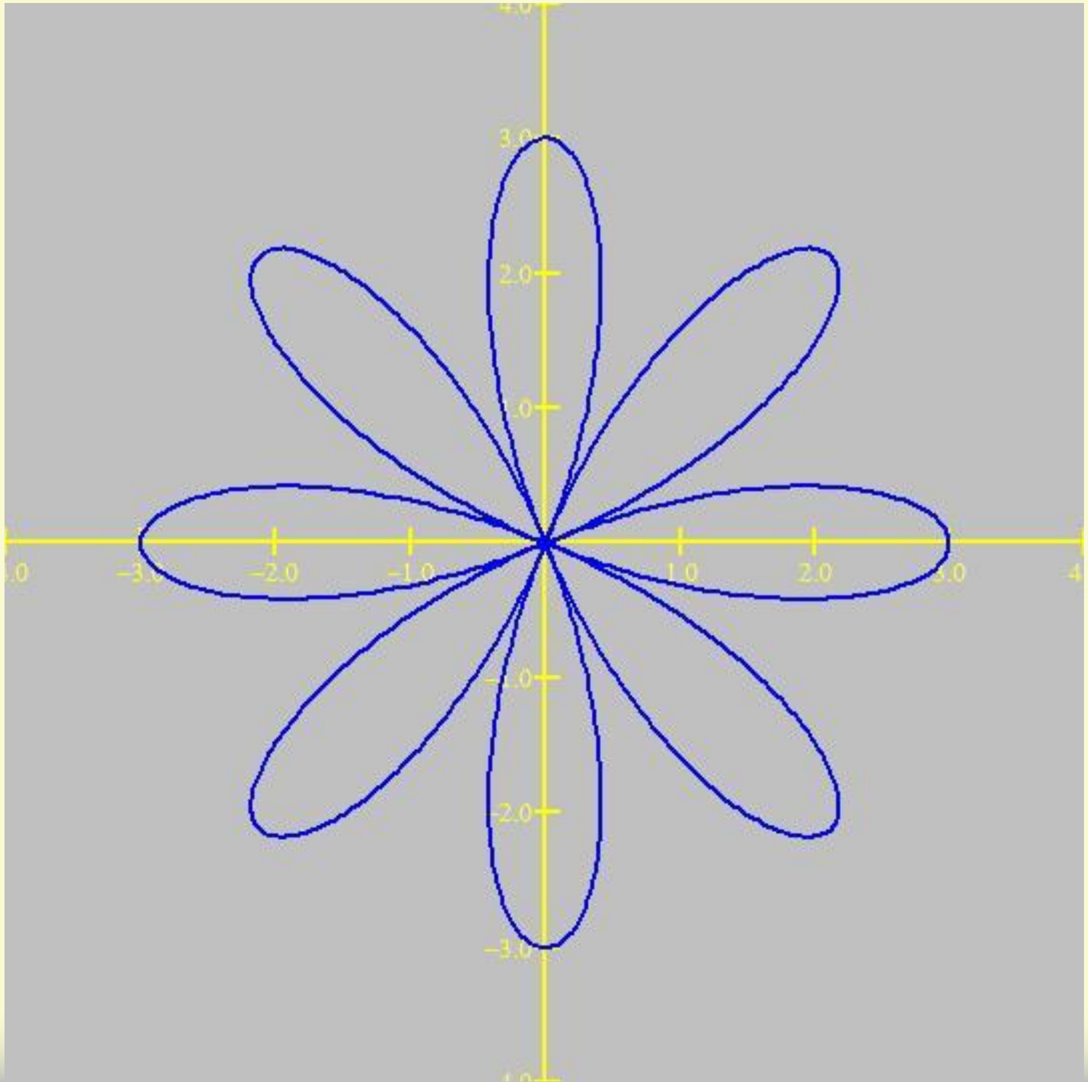
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

r = 3cos(3θ)



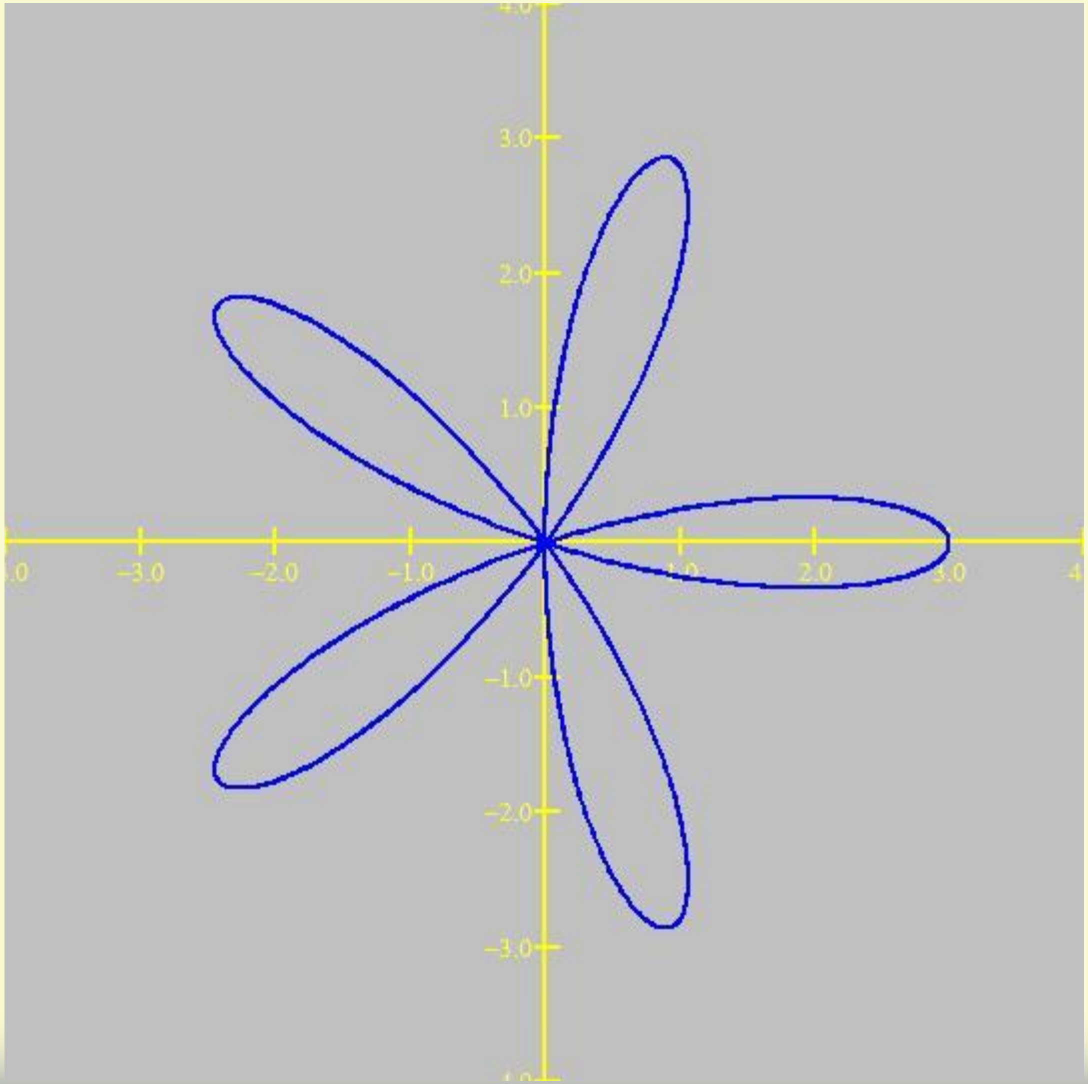
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

$r = 3\cos(4\theta)$



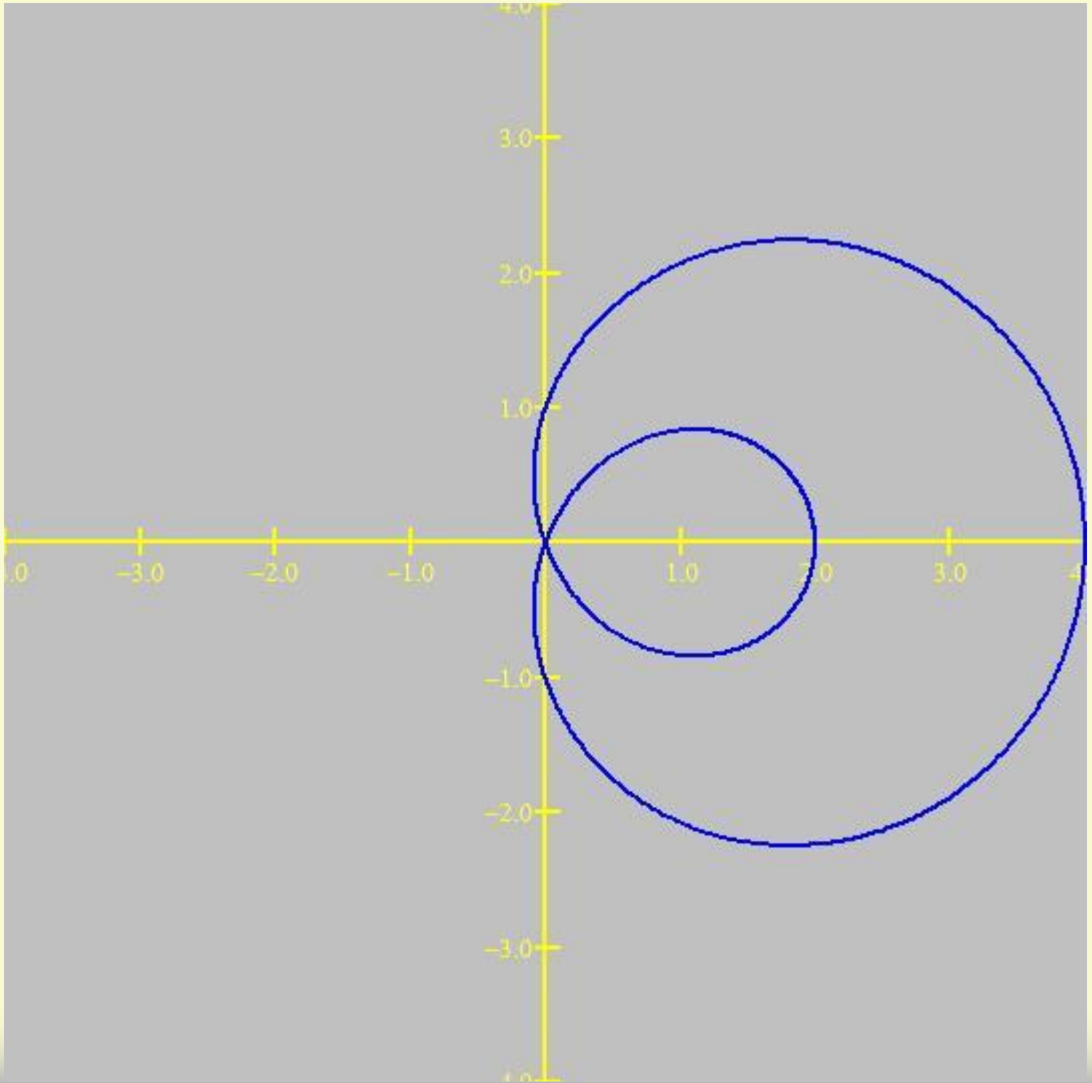
ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

$r = 3\cos(5\theta)$



ECUACIONES POLARES DE OTRAS CURVAS

$r = 3\cos(\theta)+1$



DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

La discusión consiste en una serie de pasos que permiten identificar a la curva, determinando sus características geométricas:

- ***Intersecciones.***
- ***Simetrías.***
- ***Extensión.***
- ***Gráfica.***

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Intersecciones:

Para determinar las intersecciones de la curva con el eje polar, se sustituye, en la ecuación polar, θ por 0º y θ por 180º.

$$r = \frac{1}{1 - \cos 0^{o}}$$

$$r = \frac{1}{1 - 1}$$

$$r = \frac{1}{0}$$

No existe intersección

$$r = \frac{1}{1 - \cos 180^{o}}$$

$$r = \frac{1}{1 - (-1)}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Intersección en P(½, 180º)

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Intersecciones:

Para determinar las intersecciones de la curva con la recta a 90º, se sustituye, en la ecuación polar, θ por 90º y θ por 270º.

$$r = \frac{1}{1 - \cos 90^\circ} \qquad r = \frac{1}{1 - \cos 270^\circ}$$

$$r = \frac{1}{1 - 0} \qquad r = \frac{1}{1 - 0}$$

$$r = 1 \qquad r = 1$$

Intersección en P(1, 90º) **Intersección en P(1, 270º)**

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

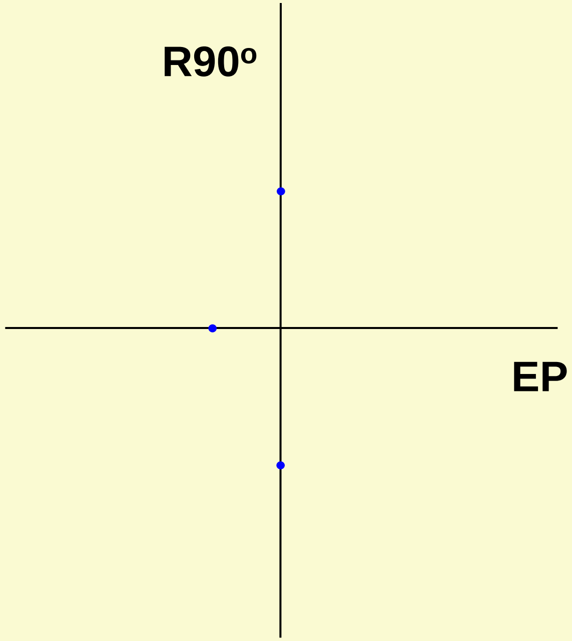
Intersecciones:

Para determinar si la curva interseca o contiene al polo, se sustituye, en la ecuación polar, r por 0.

$$0 = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

$$0 = 1$$

No contiene al polo



DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Simetría:

Para determinar si la curva es simétrica con respecto al eje polar, primero se sustituye en la ecuación θ por $-\theta$ y si la ecuación no se altera entonces se dice que si existe simetría; sin embargo, si la ecuación se altera se tiene que sustituir θ por $(180º-\theta)$ y r por $-r$, si entonces, la ecuación no se altera se dice que si existe simetría y si la ecuación se altera no existe simetría.

$$r = \frac{1}{1 - \cos(-\theta)}$$

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

No se altera, existe simetría

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Simetría:

Para determinar si la curva es simétrica con respecto a la recta a 90º, primero se sustituye en la ecuación θ por $-\theta$ y r por –r, si la ecuación no se altera entonces se dice que si existe simetría; sin embargo, si la ecuación se altera se tiene que sustituir θ por $(180º-\theta)$, si entonces, la ecuación no se altera se dice que si existe simetría y si la ecuación se altera no existe simetría.

$$-r = \frac{1}{1 - \cos(-\theta)}$$

$$-r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Se altera, no decide

$$r = \frac{1}{1 - \cos(180º-\theta)}$$

$$r = \frac{1}{1 - (\cos 180º \cos\theta + \operatorname{sen} 180º \operatorname{sen}\theta)}$$

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

Se altera, no existe simetría

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Simetría:

Para determinar si la curva es simétrica con respecto al polo, primero se sustituye en la ecuación r por –r, si la ecuación no se altera entonces se dice que si existe simetría; sin embargo, si la ecuación se altera se tiene que sustituir θ por $(180^\circ+\theta)$, si entonces, la ecuación no se altera se dice que si existe simetría y si la ecuación se altera no existe simetría.

$$-r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Se altera, no decide

$$r = \frac{1}{1 - \cos(180^\circ+\theta)}$$

$$r = \frac{1}{1 - (\cos 180^\circ \cos\theta - \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen}\theta)}$$

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

Se altera, no existe simetría

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Extensión:

Para determinar la extensión de la curva; es decir, si es abierta o cerrada, se debe verificar si para todo valor de θ, existe un valor finito de r. Si es así, entonces la curva es cerrada, pero si existe un valor de θ para el cual r se indetermina, entonces la curva es abierta.

$$\cos\theta \ \varepsilon \ [-1, 1]$$

$$1 - \cos\theta \ \varepsilon \ [0, 2]$$

$$\frac{1}{1 - \cos\theta} \ \varepsilon \ [\tfrac{1}{2}, \infty)$$

En este caso, el valor de r se indetermina cuando θ es 0º; por lo tanto, la curva es abierta.

DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Gráfica:

Para determinar la gráfica de la curva, se tiene que tabular r y θ dando valores a θ para obtener los correspondientes valores de r. Generalmente se emplean los valores de 0º, 30º, 45º y sus múltiplos enteros hasta 360º; posteriormente, se grafican dichos valores y se establece la forma de la curva.

r	θ
—	0º
7,46	30º
3,41	45º
2,0	60º
1,0	90º
0,66	120º
0,58	135º
0,53	150º
0,50	180º
0,53	210º
0,58	225º
0,66	240º
1,0	270º
2,0	300º
3,41	315º
7,46	330º
—	360º

Al graficar se obtiene:

Ejercicios

BIBLIOGRAFÍA

1. Solis Ubaldo, Rodolfo; Nolasco Martínez, Jesús E.; Victoria Rosales, Angel; *"Geometría Analítica"*; Ed. Limusa; México, 1997.
2. Lehmann, Charles H.; *"Geometría Analítica"*; Ed. Limusa; México, 2005.
3. Riddle, Douglas F.; *"Geometría Analítica"*; International Thomson Editores; México, 1997.
4. Fuller, Gordon; Tarwater, Dalton; *"Geometría Analítica"*; Addison-Wesley Iberoamericana; México, 1995.