

Tema 2. Las integrales definida e indefinida

Objetivo:

El alumno identificará los conceptos de las integrales definida e indefinida y los aplicará en el cálculo y obtención de integrales.

Subtema 2.1. Concepto de sumas de Riemann. Concepto de integral definida. Interpretación geométrica y propiedades. Condiciones de integrabilidad.

- Propiedades:

$$\sum_{i=1}^n C = n, \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^n c = nc = c + c + c + c + \dots + c = nc$$

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i + b_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i - b_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

- Concepto de Sumas de Riemann considerando los elementos básicos necesarios para formalizarlo, como son: partición, norma, etc. y posteriormente establecer la definición de integral definida.

Sea un intervalo $[a,b]$, se llama partición del intervalo a la división de éste en n subintervalos, cada subintervalo suele llamarse celda. Si la magnitud de todas las celdas es la misma se dice que es una partición regular.

Para el cálculo del área bajo la curva entre ella el eje de las abscisas y las rectas $x=a$, $x=b$ se hace una partición en $[a,b]$ y se forman rectángulos eligiendo un valor cualquiera de x dentro de cada celda, cada rectángulo estará limitado por los segmentos de recta paralelas al eje de las ordenadas y que pasan por los extremos de cada celda y que tienen por altura el valor de la función calculado en el punto elegido dentro de la celda. La suma de las áreas de todos los rectángulos se aproximará al área buscada.

A estas sumas se le llama sumas de Riemann.

Cálculo Integral

A la mayor amplitud de las celdas de una partición se le llama norma de una partición y se representa por el símbolo $\|\Delta\|$

Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si f existe, decimos que f es integrable en $[a,b]$; y $\int_a^b f(x)dx$, denominada integral definida (o integral de Riemman) de f de “a” hacia “b”, entonces está dada por

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\varepsilon_i = a + i\Delta x$$

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x = \text{Número}$$

Área =

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x = \text{Número}$$

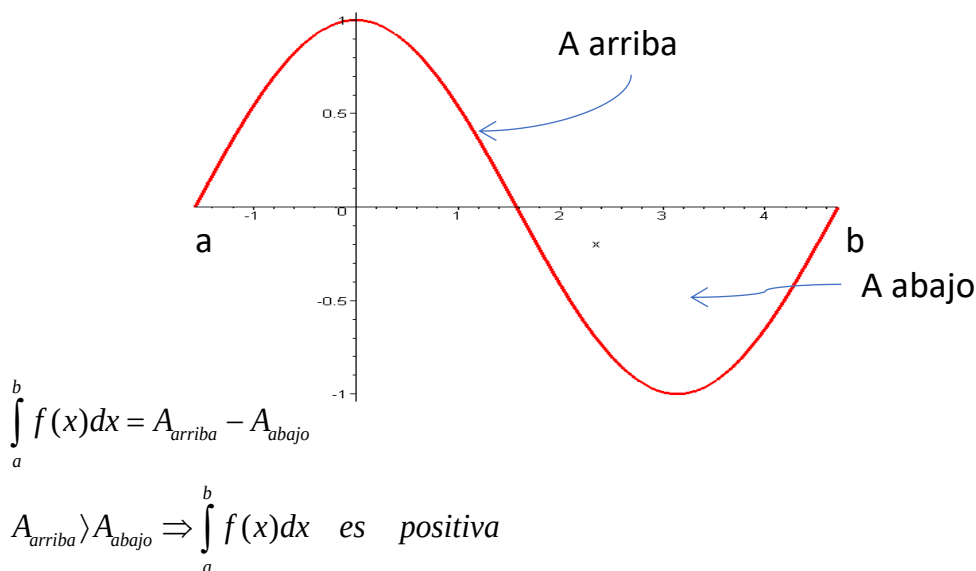
dx = diferencial de x

A $f(x)$ se le llama integrando o función integrando

a =límite inferior de integración (extremo inferior)

b =límite superior de integración (extremo superior)

Interpretación geométrica de la integral definida, mostrando los diferentes casos que se presentan cuando la gráfica de la función o parte de ella se encuentra debajo del eje de las abscisas. Conviene que el alumno tenga presente que la integral definida es útil en problemas distintos al cálculo de áreas.



Cálculo Integral

$$A_{\text{arriba}} < A_{\text{abajo}} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ es negativa}$$

$$A_{\text{arriba}} = A_{\text{abajo}} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ es cero}$$

La interpretación geométrica, será el área bajo la curva y sus unidades son cuadradas.

A la integral definida únicamente se le pondrán unidades al resultado si se le da una interpretación geométrica, sino se escribe sin unidades.

Dar la interpretación geométrica a una integral definida significa “identificar la región” determinada por la gráfica de una función en el intervalo y el eje de las X.

■ Propiedades básicas de la integral definida.

$$a) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$b) \int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx; k = \text{cte.}$$

$$c) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$d) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ con } a < c < b$$

$$e) \text{ Si } f \text{ es par } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \text{ Recordando que una función par } f(-x) = f(x)$$

Simetría respecto al eje Y (ordenadas)

$$f) \text{ Si } f \text{ es impar } \int_{-a}^a f(x)dx = 0; \text{ Recordando que una función impar } f(-x) = -f(x).$$

Simetría respecto al origen de coordenadas.

$$g) f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$h) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Teorema fundamental del Cálculo en su forma de Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Donde F es la antiderivada de la función f(x)

Subtema 2.2. Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo integral.

- Teorema del valor medio del cálculo integral.

“Si f es continua en [a,b] entonces existe un número “c” entre a y b, tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

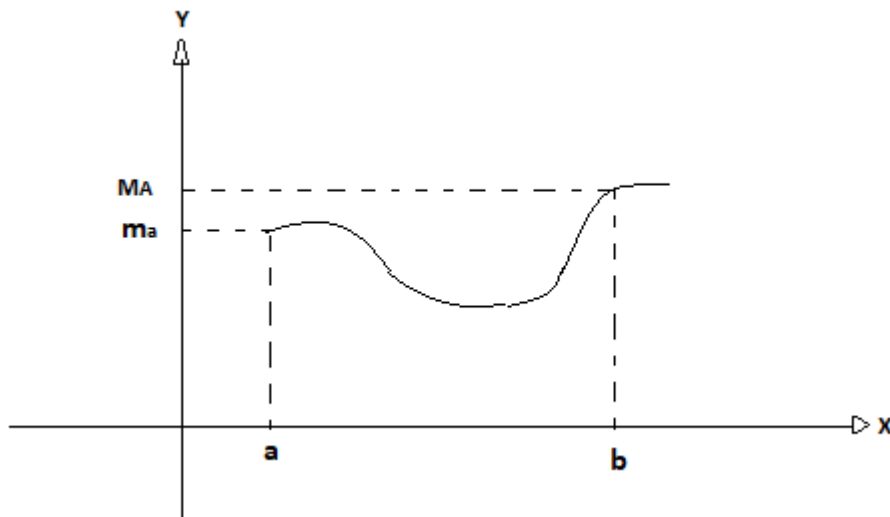
f(c) es el valor medio de la función “f” en el intervalo [a,b] y también se le denomina ordenada media.

El teorema solo garantiza la existencia de al menos un número “c” en el intervalo [a,b], más **no** especifica cómo determinar el valor de “c”.

Si la función es inyectiva sólo tendrá un valor de c en el intervalo.

Justificación del TVMCI

Sea una función f continua en [a,b]



Del Teorema de Weiestrass se deduce que deben existir valores absolutos (Máximo y mínimo)

MA Máximo absoluto

ma mínimo absoluto

Si MA es Máximo absoluto es $f(x) \leq M_A, \forall x \in [a, b]$

Si m_a mínimo absoluto es $f(x) \geq m_a, \forall x \in [a, b]$

Teorema de Bolzano

$$m_a \leq f(x) \leq M_A, \forall x \in [a, b]$$

Si integramos los miembros de esta desigualdad compuesta nos queda:

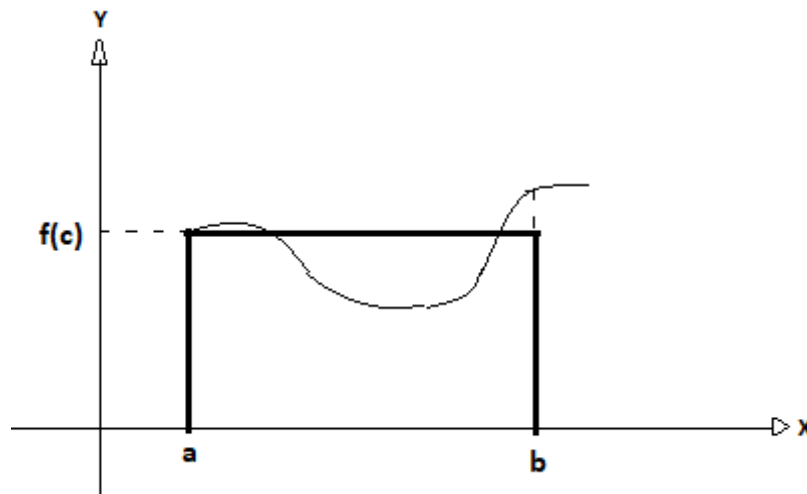
$$\int_a^b m_a dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M_A dx, \forall x \in [a, b]$$

$$m_a(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M_A(b-a)$$

Si multiplicamos por $\frac{1}{b-a}$ nos queda:

$$m_a \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M_A$$

Por lo que debe existir un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$



<https://www.geogebra.org/m/kxtNmbQe>

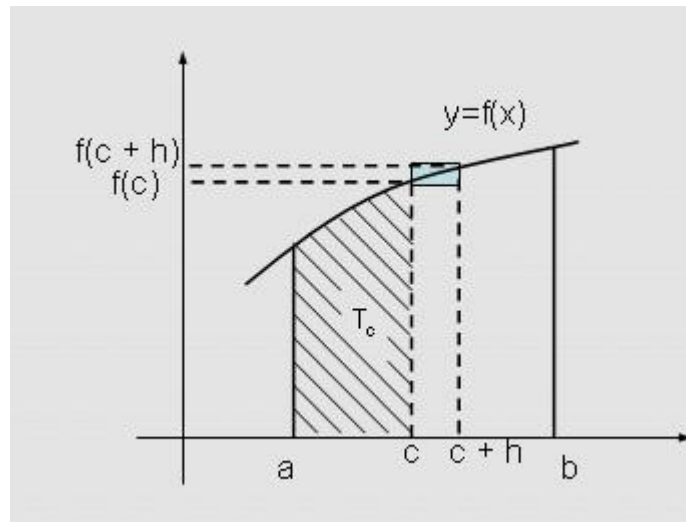
Subtema 2.3. Definición de la integral indefinida, a partir de la integral definida con el extremo superior variable. Enunciado y demostración del teorema fundamental del cálculo.

Teorema fundamental del cálculo:

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces:

- i) F es continua en $[a, b]$ es integrable en el mismo intervalo.
- ii) En todo punto c de $[a, b]$ en el que f sea continua se verifica que F es derivable en dicho punto, y $F'(c) = f(c)$.

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral nos muestra que $F(x)$ es precisamente el área limitada por la gráfica de una función continua $f(x)$.



A cada punto c en $[a, b]$ se le hace corresponder el área T_c .

Si calculamos la derivada de esa función:

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

$$f(c) < \frac{F(c+h) - f(c)}{h} < f(c+h)$$

$$f(c) \leq F'(c) \leq f(c)$$

Luego $F'(c) = f(c)$, para todo c en $[a, b]$

También se puede revisar la demostración en el libro de Cálculo Diferencial e Integral de Andrade Delgado Arnulfo, et -al pág. 424, 425

<https://www.geogebra.org/m/qJuGmU8t>

<https://www.geogebra.org/m/pWmVBhG4>

Subtema 2.4. Determinación de integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable.

Formulario básico

$$1) \quad \int du = u + C$$

$$2) \quad \int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx$$

$$3) \quad \int a u du = a \int u du \quad a = \text{constante}$$

$$4) \quad \int u^n du = \frac{u^{(n+1)}}{n+1} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

$$5) \quad \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$6) \quad \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$7) \quad \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$8) \quad \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$9) \quad \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$10) \quad \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$11) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{ang sen} \frac{u}{a} + C$$

$$12) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ang tan} \frac{u}{a} + C$$

$$13) \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ang sec} \frac{u}{a} + C$$

$$14) \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$15) \int e^u du = e^u + C$$

$$16) \int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C$$

$$17) \int \ln u \, du = u \ln u - u + C$$

$$18) \int \tan u \, du = \ln|\sec u| = -\ln|\cos u| + C$$

$$19) \int \cot u \, du = \ln|\sen u| + C$$

$$20) \int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$21) \int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$22) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$23) \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$24) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$25) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$26) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C; u > a > 0; \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

27)

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C; u^2 < a^2 \text{ o } |u| < a; \frac{1}{2a} \ln \frac{a+u}{a-u} + C$$

$$= \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u+a}{u-a} + C; |u| > a$$

$$\text{En forma sencilla: } \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C; u \neq a$$

$$28) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C; u^2 > a^2$$

$$29) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \tan \frac{u}{a} + C$$

$$30) \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \sec \frac{u}{a} + C$$

$$31) \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a} \cosh^{-1} \frac{a}{|u|} + C; 0 < u < a$$

$$32) \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{cosech}^{-1} \frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a} \sinh^{-1} \frac{a}{|u|} + C; u \neq 0$$

- Reglas básicas para adaptar los integrandos.

Desarrollar	$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador	$\frac{1+x}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado	$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia	$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ (Dividir la fracción del numerador entre el denominador)
Sumar y restar términos en el numerador	$\frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ $\sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$ $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$ $\sinh^2 x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2x$ $\cosh^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2x$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = 1$ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico	$\frac{1}{1+\sin x} = \left(\frac{1}{1+\sin x} \right) \left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x} \right) = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} =$ $\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Subtema 2.5. Integrales de funciones cuyo resultado involucra a la función logaritmo natural.

Logaritmos:

$$F(x) = \int_1^x \frac{du}{u}, \quad \text{para toda } x > 0 \text{ y de donde } F'(x) = \frac{1}{x}.$$

Notas de función logaritmo y exponencial:

El significado geométrico de la integral definida y si se sabe que $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(0, \infty)$

Para $x > 0$

$L(x) = \int_1^x \frac{du}{u}$ define una función $L(x)$ tal que $\frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ en $(0, \infty)$

Recordando algunas propiedades de Logaritmo:

Si u y v son números positivos cualesquiera entonces se cumple que:

a) $\ln(1)=0; \quad \log_b 1 = 0$

b) $\ln(uv)=\ln u + \ln v$

c) $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln v$

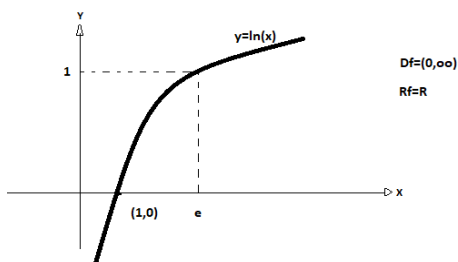
d) $\ln(u^r) = r\ln(u)$

e) $\ln(u^{-1}) = -\ln(u)$

La función logaritmo elemental, es diferenciable e integrable ya que su intervalo de definición es $(0, \infty)$, es continua y está representada por una regla de correspondencia.

Logaritmo natural= $\ln$ y logaritmo vulgar = $\log$

Cálculo Integral



Función exponencial

$$\exp = \ln^{-1}$$

$$\exp(\ln x) = x, \forall x > 0$$

$$\ln(\exp x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln A} = A$$

$$\ln e^A = A$$

Si $f(x) = \exp(x)$, entonces :

a) f es creciente para todos los valores de x

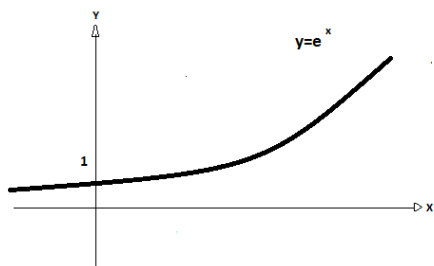
b) $\exp(u) \exp(v) = \exp(u + v)$

c) $\frac{\exp(u)}{\exp(v)} = \exp(u - v)$

d) $(\exp u)^v = v \exp u$

e) $f(x) \rightarrow +\infty$, cuando $x \rightarrow +\infty$

f) $f(x) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow -\infty$



Recordar que:

Cálculo Integral

$$\int_1^x \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C$$

Si $b > 1$, entonces $\ln b > 0$ y se concluye que b^u es creciente, si $0 < b < 1$, entonces $\ln b < 0$ y b^u es decreciente. Como la función b^u es monótona, admite inversa y es $\log_b$.

Si $b > 0$, b diferente de 1, entonces $y = \log_b u$, $u = b^y$

Cambio de base en los logaritmos:

Es una expresión que permite transformar el logaritmo de un número en cierta base, a un cociente de logaritmos de una base diferente.

$$\log_b u = \frac{\log_c A}{\log_c B}, B > 0, B \neq 1$$

$$C > 0 \text{ y } C \neq 1$$

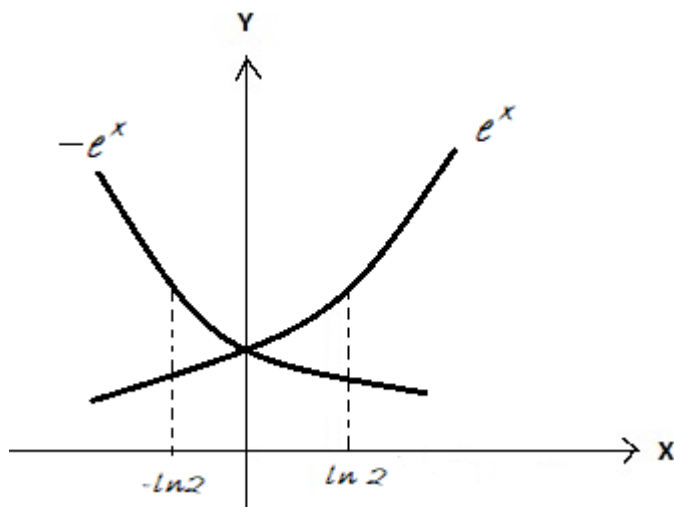
$$\log_3 e^{2x} = \frac{\ln e^{2x}}{\ln 3}$$

$$\text{Ejemplo: } y = \log_4 e^{\sin x - x^2} \Rightarrow y = (\sin x - x^2) \log_4 e = (\sin x - x^2) \frac{\ln e}{\ln 4}$$

$$\text{Pero } \ln e = 1$$

- Integrales en donde se involucre a las funciones hiperbólicas, como las que se indican:

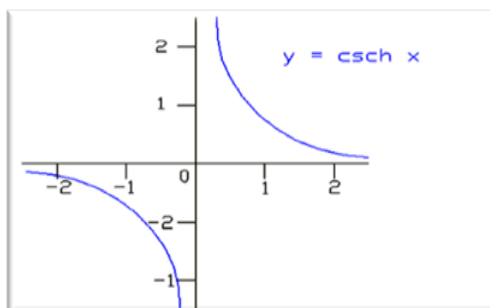
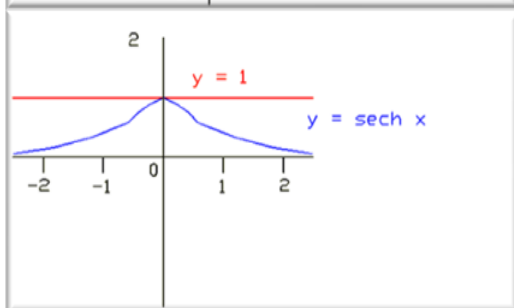
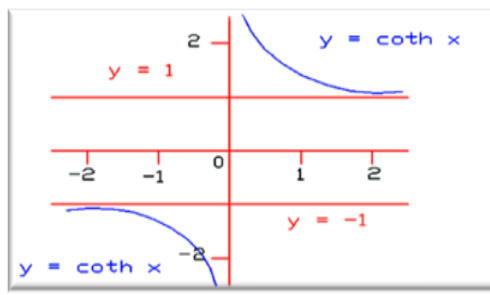
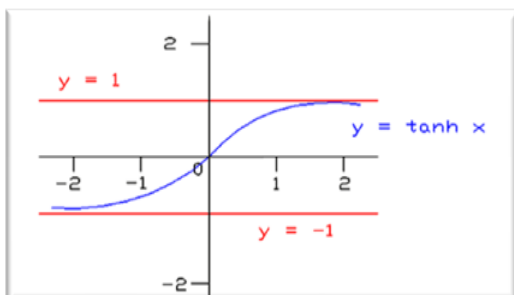
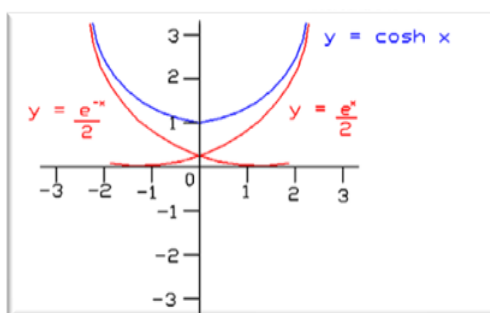
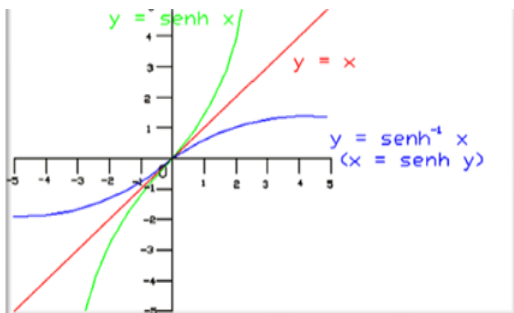
$$\int \sinh x \, dx, \int \sec^2 x \, dx, \int \cosh x \, dx, \int \operatorname{csch}^2 x \, dx, \int \tanh x \, dx, \text{ o bien } \int \coth x \, dx$$



Expresiones de:

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$	
$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$	$\coth x = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$
$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$	$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$
$\sinh \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \theta - 1}{2}}$	$\operatorname{csc} h x = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$
$\cosh \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \theta + 1}{2}}$	

Cálculo Integral



La derivada :

$$\sinh u = \cosh u D_x u$$

$$\cosh u = \sinh u D_x u$$

$$\tanh u = \operatorname{sech}^2 u D_x u$$

$$\coth u = -\operatorname{csch}^2 u D_x u$$

$$\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u$$

$$\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u D_x u$$

$$1) \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$2) \int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$3) \int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$$

$$4) \int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + C$$

$$5) \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$6) \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$7) \int -\operatorname{sech} u \tanh u \, du = \operatorname{sech} u + C$$

$$8) \int -\operatorname{csc} u \cot u \, du = \operatorname{csc} u + C$$

Subtema 2.6. La Regla de L'Hôpital y sus aplicaciones a formas indeterminadas de límites de funciones. El número “e” como un límite.

- Formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (0)(\infty), \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Si en el cálculo del límite de una función de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ se obtiene $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ con cualquier signo se puede aplicar la regla de Regla de L'Hôpital

Cálculo Integral

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, si el resultado sigue teniendo la indeterminación se puede volver a aplicar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$; esta regla proviene de aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial a dos funciones de manera simultánea.

La Regla de L'Hôpital también se puede aplicar a funciones de la forma u^v donde $u=f(x)$ y $v=g(x)$

Cuando el resultado es de la forma: 0^0 , 1^∞ , ∞^0

Ejemplo:

Procedimiento:

1.- Le damos nombre a la función, es decir

$$f(x) = x^x \text{ ó } y = x^x$$

2.- Aplicamos $\ln$ y sus propiedades

$$\ln y = \ln x^x; \ln y = x \ln x$$

3.- Planteamos y aplicamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(\frac{1}{x} \right) \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\text{Recordando: } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Cuando es de la forma $\infty - \infty$

En algunos casos se sugiere trabajar con el conjugado de un binomio.

Subtema 2.7. La integral impropia.

- opia.

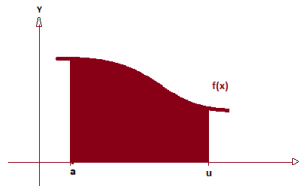
A la integral de la forma $\int_a^b f(x) dx$ se denomina impropia si:

- a) La función f no está definida en algún valor de $[a, b]$
- b) Si al menos uno de los extremos es ∞

Sea una función g continua en un intervalo $[a, \infty]$, siempre positiva y que cumpla el siguiente límite

Cálculo Integral

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$



Si $u > a$, donde $u, a \in D_f$, entonces el área $A(u)$ bajo la curva entre a y u está dada por la expresión

$$A(u) = \int_a^u f(x) dx$$

Si en esta expresión $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$ existe, entonces el límite puede ser interpretado como el área de la región limitada bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje X y hacia la derecha de $x=a$.

$$A(u) = \int_a^u f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx \text{ si el límite existe.}$$

Si f es continua en el intervalo $(-\infty, a]$, se define entonces:

$$A(u) = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) dx$$

Si $f(x) \geq 0, \forall x$ es el área bajo la curva, sobre el eje X y a la izquierda de $x=a$.

Se dice que convergen cuando $u \rightarrow \infty$ ó $u \rightarrow -\infty$, el límite del lado derecho de la ecuación existe. De otra manera se dice que la integral diverge.

También se pueden presentar con dos límites infinitos de integración.

Si f es continua para toda x y a es cualquier número real, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ Si las dos integrales laterales convergen.}$$

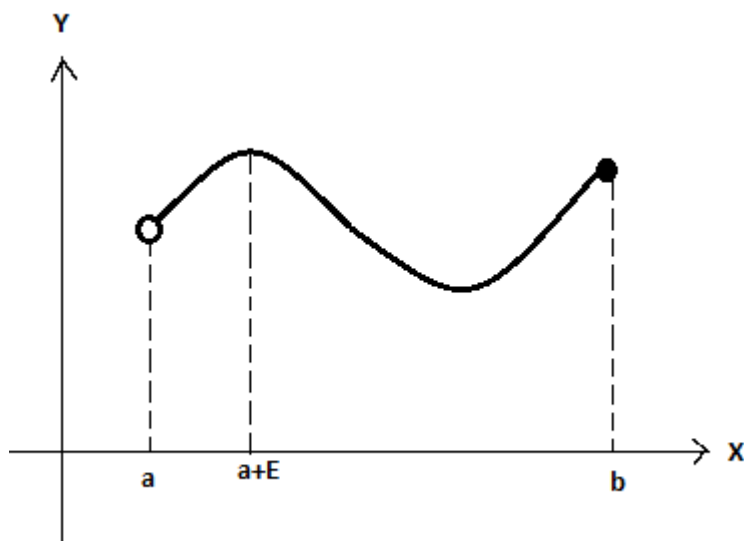
Si una de ellas diverge entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ diverge.

En otras palabras:

Se dice que una integral es impropia si:

- A) La función f no está definida en algún valor del intervalo $[a, b]$
- B) Al menos uno de los extremos de integración es infinito.

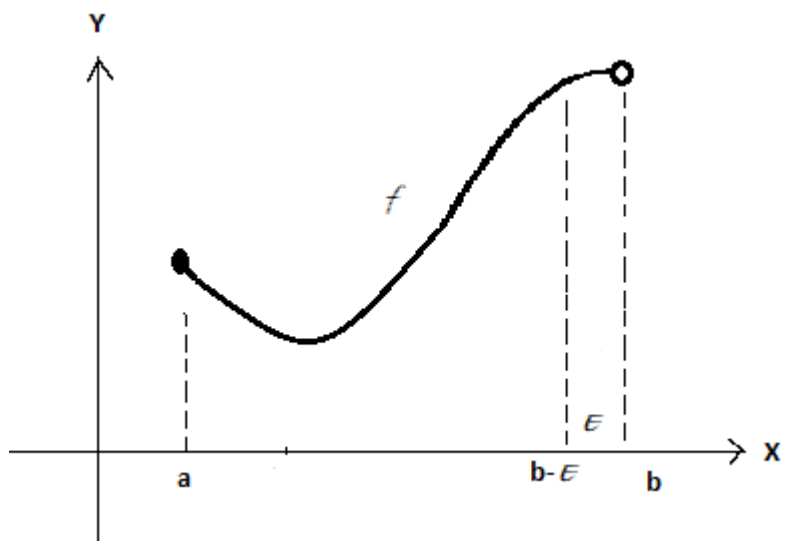
a.1) Cuando la función f no está definida en el extremo inferior de integración en $x=a$.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Si el límite existe, se dice que la integral converge y su valor es el resultado del límite, si no existe el límite se dice que la integral diverge y no tiene valor.

a.2) Cuando la función f no está definida en el extremo superior de integración en $x=b$

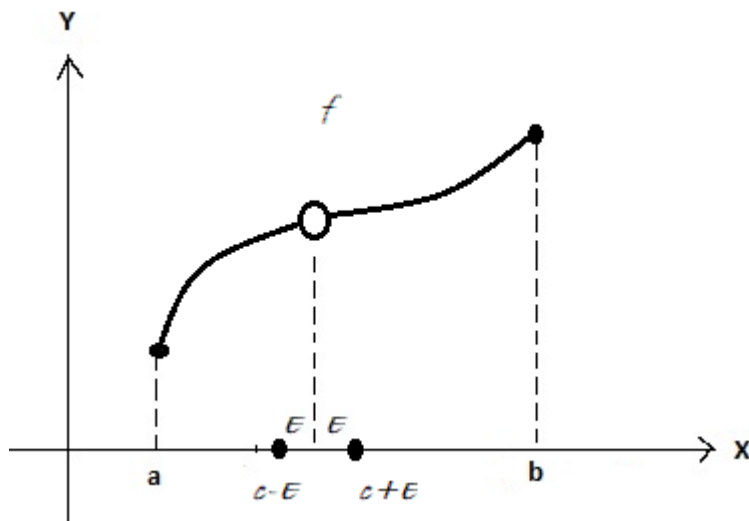


$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

a.3) Cuando la función f no está definida en algún valor intermedio del intervalo $[a,b]$,

Cálculo Integral

$$c \in (a, b)$$



$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx$$