

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener la matriz inversa de A utilizando el método de la matriz adjunta.

Sol:

Recordando la definición:

Sea $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ con elementos en $\mathbb{C}$, y sea C_{ij} el cofactor del elemento b_{ij} .

La adjunta de B a la matriz es $\text{Adj } B = [m_{ij}]$, donde $m_{ij} = C_{ij}$.

La matriz inversa de B es

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{Adj } B$$

El determinante de B se puede calcular a través de diversos métodos.

Ahora el cofactor C_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -((-1)(3) - 2(4)) = \\ = -(-3 - 8) \\ = 11$$

Calculando el cofactor C_{22}

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +((3)(3) - (-1)(4)) \\ = 9 + 4 = 13$$

Ahora el cofactor C_{23} es:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6 - 1) \\ = (-1)(5) \\ = -5$$

Calculamos el cofactor C_{31} es

De $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 0(4)) = 1$$

El cofactor $C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$
 $= -(3(-1) - 2(4))$
 $= -(-3 - 8) = 11$

Recomiendo utilizar el Teorema:

Si B es una matriz de $n \times n$ con elementos en $\mathbb{C}$, entonces

$$B \operatorname{adj} B = (\operatorname{adj} B) B = (\det B) I_n$$

Para nuestro ejemplo, calcularemos cada de los cofactores de todos los elementos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cada cofactor se calcula seleccionando virtualmente columna y renglón asociado, por ejemplo para el cofactor C_{11}

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ donde M_{ij} es el menor asociado (es el determinante que se obtiene suprimiendo en A el renglón i y la columna j), y $(-1)^{i+j}$ se le conoce como característica de i elemento.

Ahora el cofactor

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (3(0) - 2(-1)) = 0 + 2 = 2$$

La matriz adjunta es

$$\text{Adj } A = C_{ji} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -5 & 13 & 11 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicando la matriz A del ejemplo con la adjunta obtenida

$$A \text{ Adj } A = \det A \, I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -5 & 13 & 11 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = 27 \, I$$

Por lo que el determinante de la matriz A es 27.

Finalmente la matriz $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -5 & 13 & 11 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Así la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El cofactor $C_{11} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= + (0(3) - (2)(-1)) \\ = (0 + 2) = 2$$

Ahora el cofactor

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 (2(3) - (-1)(-1)) =$$

$$= -(6 - 1) = -5$$

Calculamos el cofactor $C_{13} = ?$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = + ((2)(2) - (0)(-1)) \\ = 4$$