

2. F U N C I O N E S

OBJETIVO: EL ALUMNO ANALIZARA LAS CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LAS FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL Y FORMULARA MODELOS MATEMATICOS.

Bibliografía: **Cálculo Diferencial e Integral.**

Arnulfo Andrade Delgado.

Erik Castañeda de Isla puga.

Cálculo Diferencial e Integral.

Frank Ayres, Jr.

Elliot Mendelson.

Cálculo.

Larson

Hostetler

Edwards

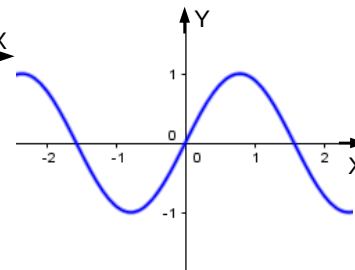
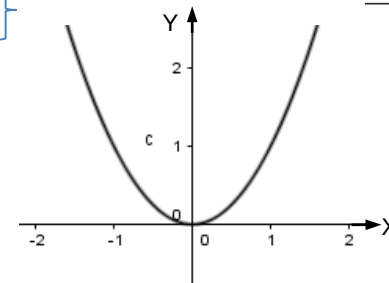
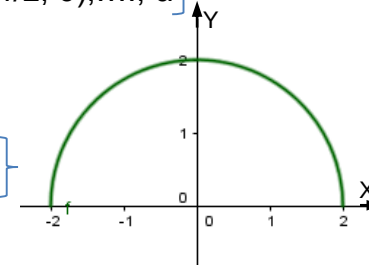
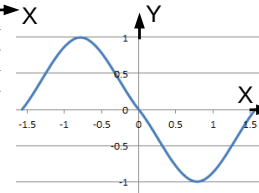
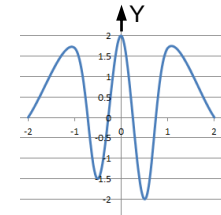
C O N T E N I D O

- 2.1** Definición de función real de variable real y su representación gráfica. Definición de dominio, codominio y recorrido. Notación funcional. Funciones: constante, identidad y valor absoluto.
- 2.2** Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.
- 2.3** Igualdad de Funciones, Operaciones con funciones. Función composición. Función inversa
- 2.4** Clasificación de funciones según su expresión: explícitas, implícitas, paramétricas y dadas por más de una regla de correspondencia.
- 2.5** Funciones algebraicas: polinomiales, racionales e irracionales. Funciones pares e impares. Funciones trigonométricas directas e inversas y su representación gráfica.
- 2.6** La función logaritmo natural, sus propiedades y su representación grafica.
- 2.7** La función exponencial, sus propiedades y su representación grafica. La funciones logaritmo natural y exponencial y sus inversas. Cambios de base.
- 2.8** Las funciones hiperbólicas directas e inversa.
- 2.9** Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos.

CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

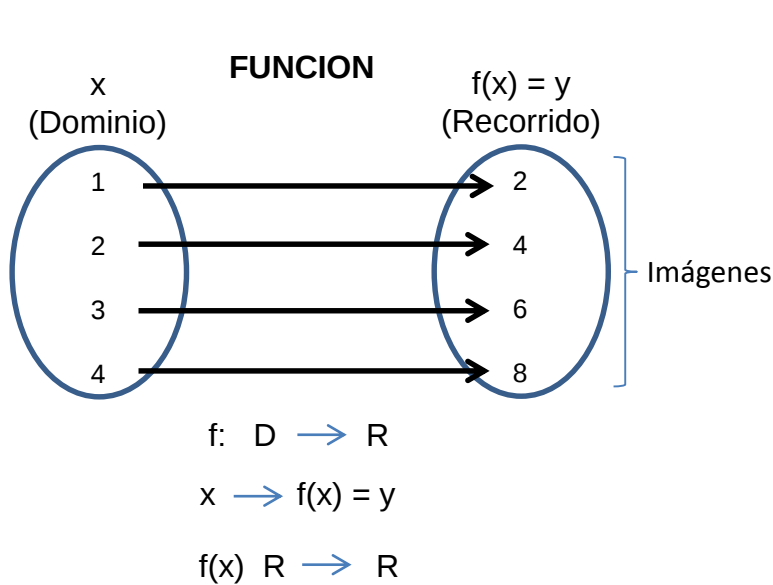
Conjunto de los números reales	Números naturales (N)	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \infty\}$
	Números enteros (I)	$\{-\infty, \dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \infty\}$
	Números racionales (Q) son de la forma $\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$	$\{-\infty, \dots, -6, \frac{-5}{3}, -4, \frac{-3}{2}, -2, \frac{-1}{2}, 0, 1, \frac{2}{3}, 3, \frac{4}{5}, 5, \frac{6}{3}, \dots, \infty\}$
	Números irracionales	Algebraicos $\{-\infty, \dots, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \infty\}$ Trascendentes $\{\pi, e\}$

Expresiones algebraicas	Extensión	$h(x) = \{(-2, 0), (-1, 1.7), (-0.5, -1.5), (0, 2), (0.5, -2), (1, 1.7), (2, 0)\}$ $g(x) = \{-\alpha, \dots, (-\pi/2, 0), (-\pi/4, 1), (0, 0), (\pi/4, -1), (\pi/2, 0), \dots, \alpha\}$
	Comprensión	$h(x) = \{(x, y) / x \in \mathbf{R}, h(y) = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2\}$ $f(x) = \{(x, y) / x \in \mathbf{R}, f(x) = \text{sen}(2x), -\infty \leq x \leq \infty\}$ $g(x) = \{(x, y) / x \in \mathbf{R}, f(g) = x^2, -\infty \leq x \leq \infty\}$

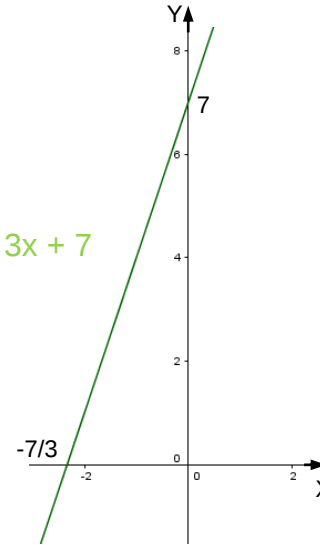


FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

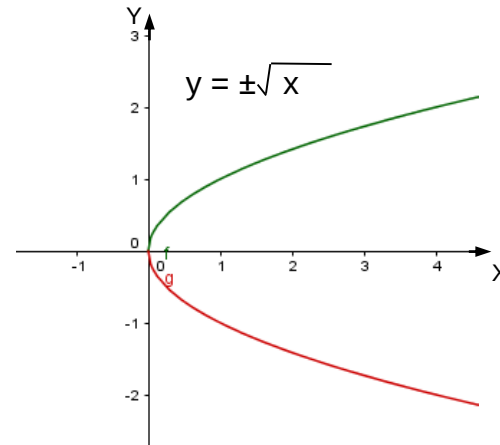
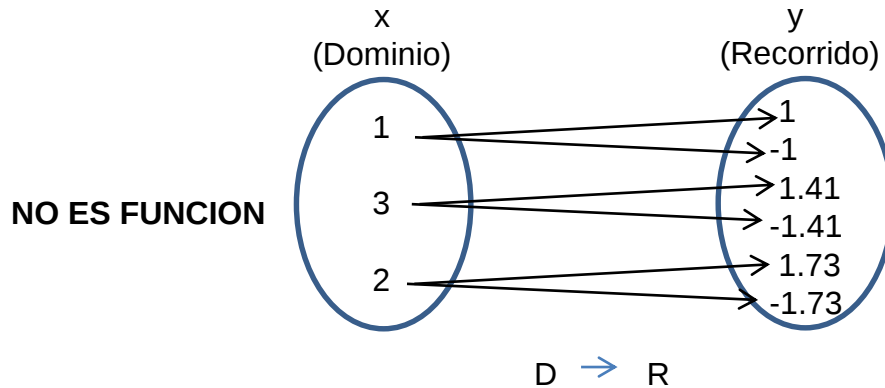
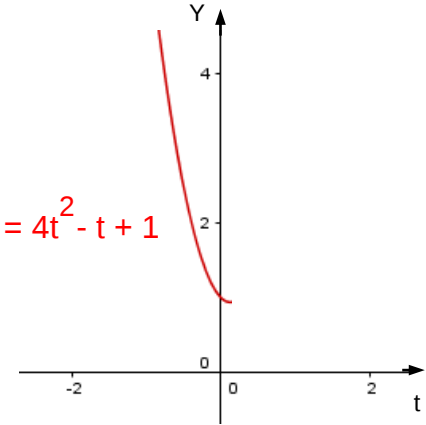
Sean **X** y **Y** dos conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de **X** a **Y** es una correspondencia que se asigna a cada número **x** de **X** exactamente un número **y** de **Y**.



$$f(x) = 3x + 7$$



$$g(t) = 4t^2 - t + 1$$

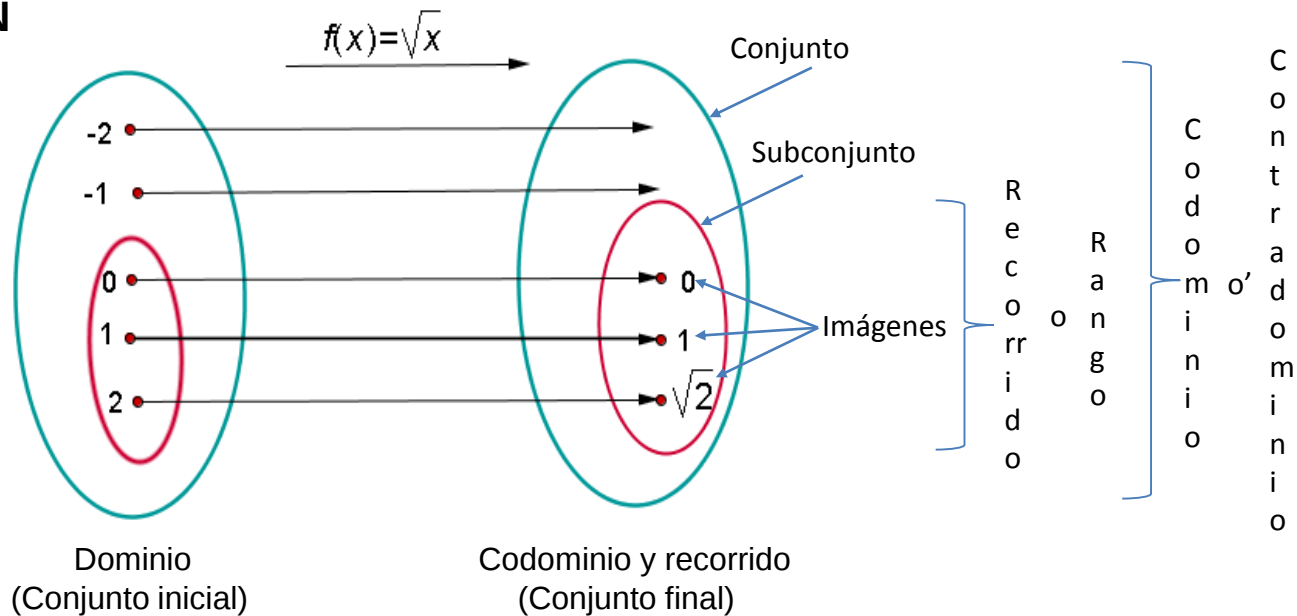


Por lo que se puede decir que:
 Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.
 Toda ecuación es una relación, pero no toda ecuación es una función.
 Todas las relaciones pueden ser graficadas en el plano cartesiano.

En conclusión: Es una relación de números reales que deben cumplir la condición, de que a cada elemento "x" le corresponde uno y sólo un elemento "y".

DOMINIO, CODOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función $f(x)$:
Son los valores para los cuales la función está definida y tienen imagen.



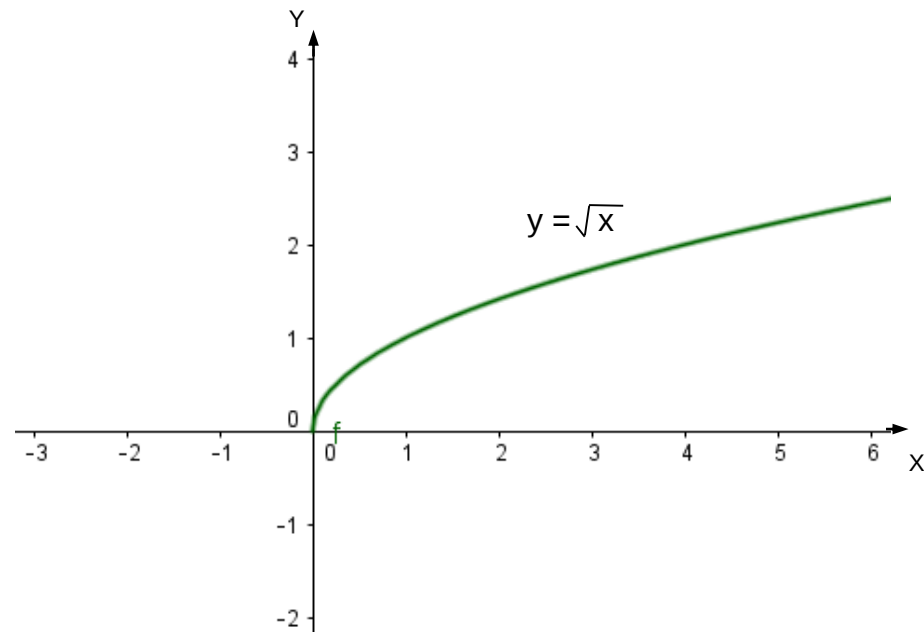
Por ejemplo $f(x)$ representa la raíz cuadrada de x , entonces el dominio se define como todos los números reales positivos.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

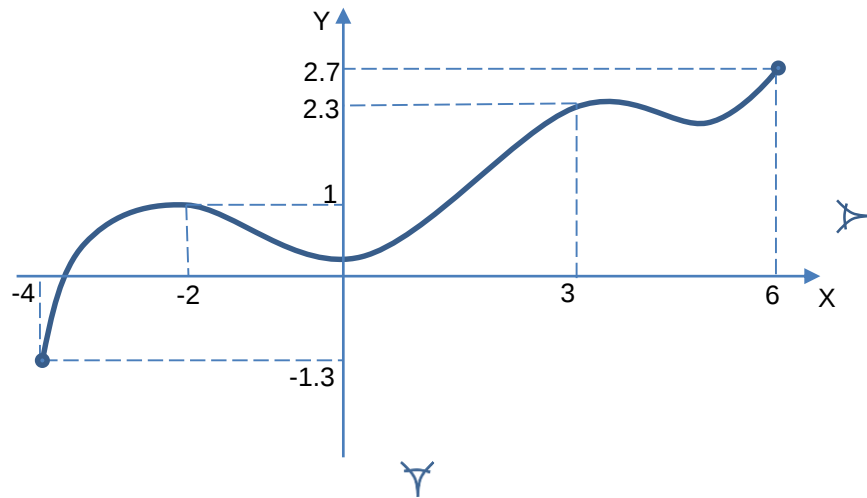
Para $x \geq 0$

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}^+, x \geq 0, \exists f(x)\}$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}^+, y \geq 0\}$$

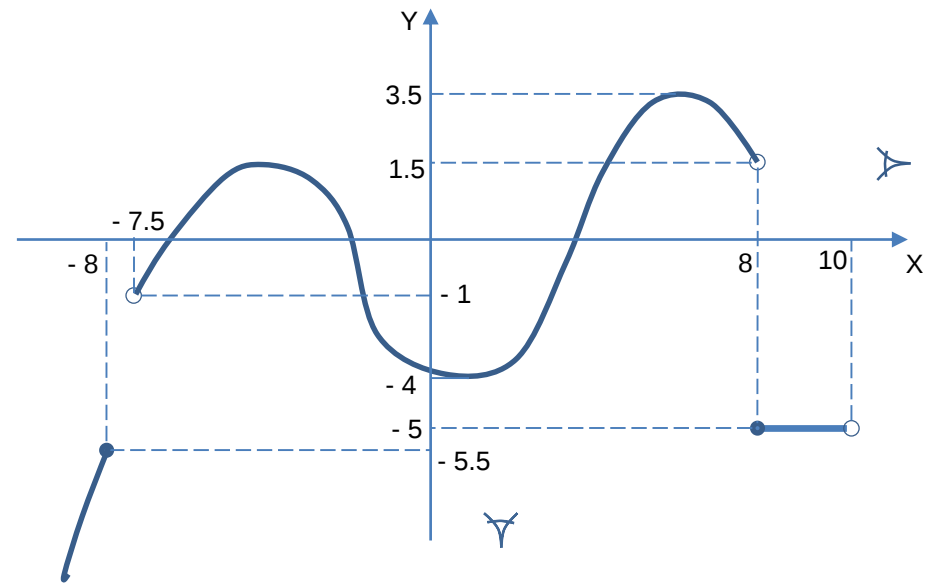


DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN



$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; -4 \leq x \leq 6\} \quad [-4, 6]$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}; -1.3 \leq y \leq 2.7\} \quad [-1.3, 2.7]$$



$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq -8, -7.5 < x < 10\}$$

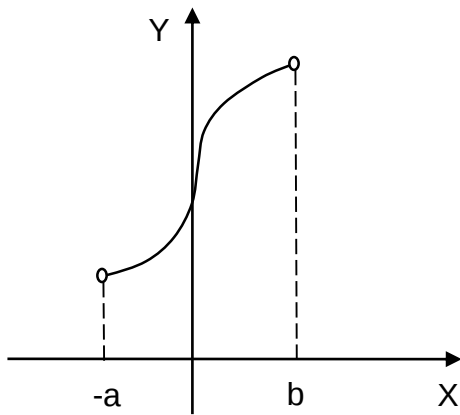
$$(-\infty, 8] \cup (-7.5, 10)$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}; -\infty < y \leq -5.5, y = -5, -4 \leq y \leq 3.5\}$$

$$(-\infty, -5.5] \cup \{-5\} \cup [-4, 3.5]$$

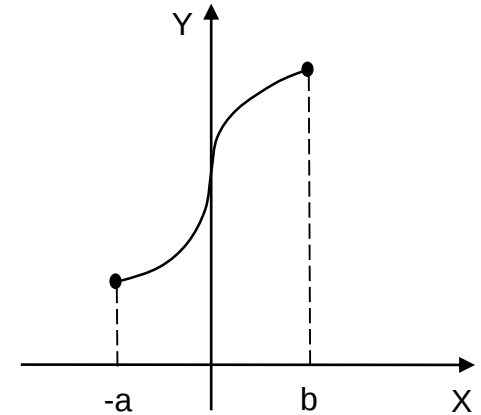
INTERVALOS

Definición de variable: Cantidad que se suele denotar por una letra en las ecuaciones algebraicas y que puede tomar un valor cualquiera dentro de un intervalo de valores posibles.



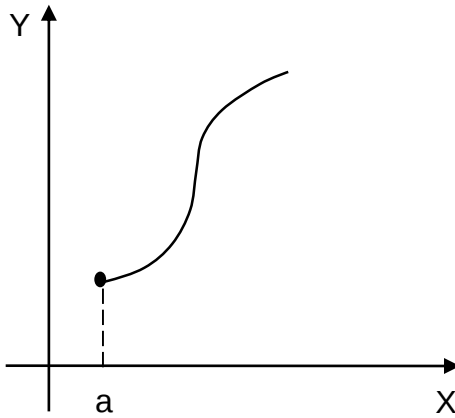
$$Df(x) = \{x / x \in \mathbf{R}, -a < x < b\} \quad \text{ó} \quad (-a, b)$$

INTERVALO FINITO ABIERTO



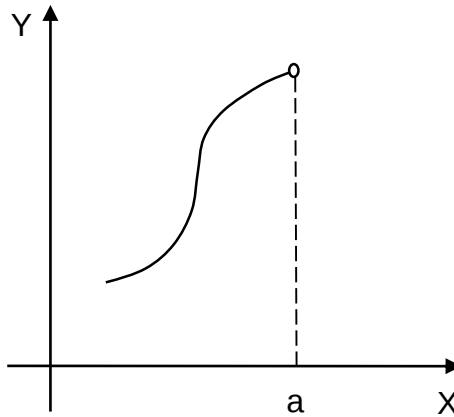
$$Df(x) = \{x / x \in \mathbf{R}, -a \leq x \leq b\} \quad \text{ó} \quad [-a, b]$$

INTERVALO FINITO CERRADO



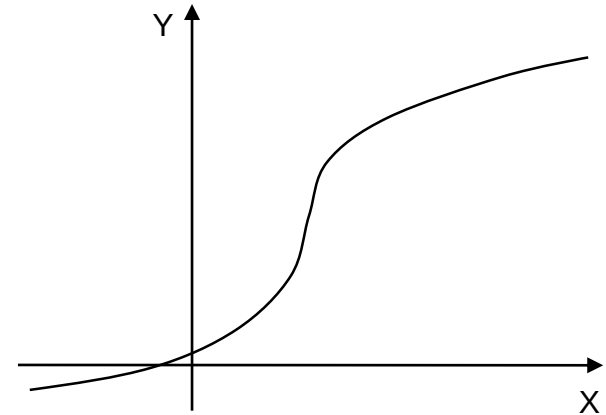
$$Df(x) = \{x / x \in \mathbf{R}, x \geq a\} \quad \text{ó} \quad [a, \infty)$$

INTERVALO INFINITO CERRADO



$$Df(x) = \{x / x \in \mathbf{R}, x < a\} \quad \text{ó} \quad (-\infty, a)$$

INTERVALO INFINITO ABIERTO



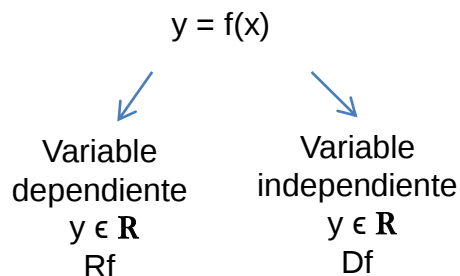
$$Df(x) = \{x / x \in \mathbf{R}, -\infty < x < \infty\} \quad \text{ó} \quad (-\infty, \infty)$$

INTERVALO INFINITO

NOTACION FUNCIONAL.

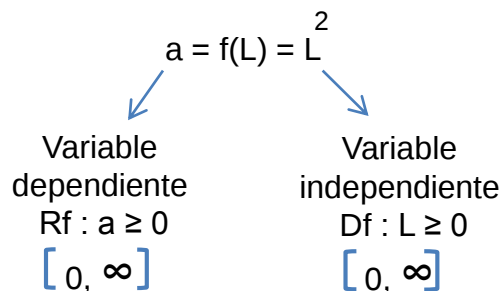
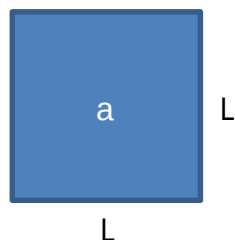
$$y = f(x); \quad y = h(x)$$

$$y = g(x); \quad y = p(x)$$

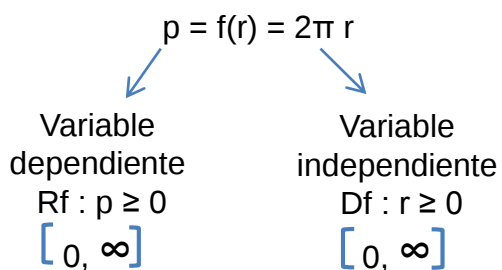
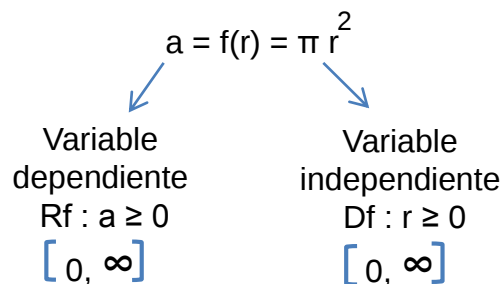
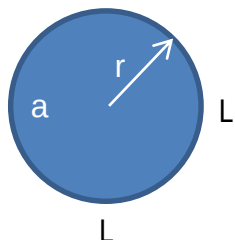


Ejemplos

1)



2)

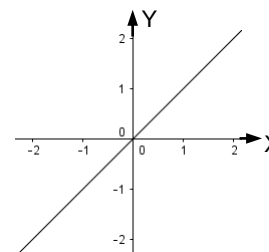


Otras formas de notaciones.

Tabulación

x	y
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0

Gráfica



Por extensión

$$\{(0,0), (1, 1.5), \dots, (4,2)\}$$

Ejemplos

3) Si $f(x) = 2x - 5$ Hallar $\frac{f(bx + h) - f(bx)}{2h}$

$$f(x) = \frac{2(bx + h) - 5 - [2(bx) - 5]}{2h} = \frac{2bx + 2h - 5 - 2bx + 5}{2h} = \frac{2h}{2h} = 1$$

4) Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ Valorar para $(h + 1)$

$$f(h + 1) = 2(h + 1)^2 + 3(h + 1) - 1$$

$$f(h + 1) = 2(h^2 + 2h + 1) + 3h + 3 - 1 = 2h^2 + 4h + 2 + 3h + 3 - 1$$

$$f(h + 1) = 2h^2 + 7h + 4$$

5) Si $f(x) = 3x + 4$ Hallar z en : $f(5z) - f(z - 1) = 15$

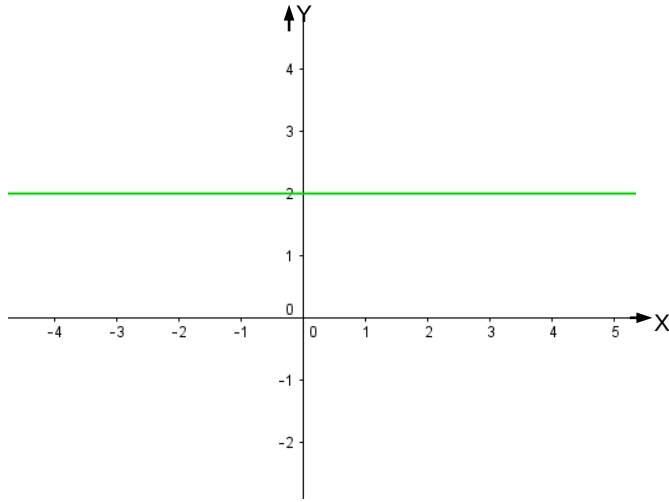
$$3(5z) + 4 - [3(z - 1) + 4] = 15 \rightarrow 15z + 4 - 3z + 3 - 4 = 15$$

$$12z + 3 = 15 \rightarrow 12z = 15 - 3 \rightarrow 12z = 12$$

$$z = 12 / 12 = 1$$

Definición de Función constante: Es aquella función matemática en donde cualquier valor que sea asignado a la misma como dominio, tiene el mismo valor constante como resultado en el rango.

$$f(x) = c$$

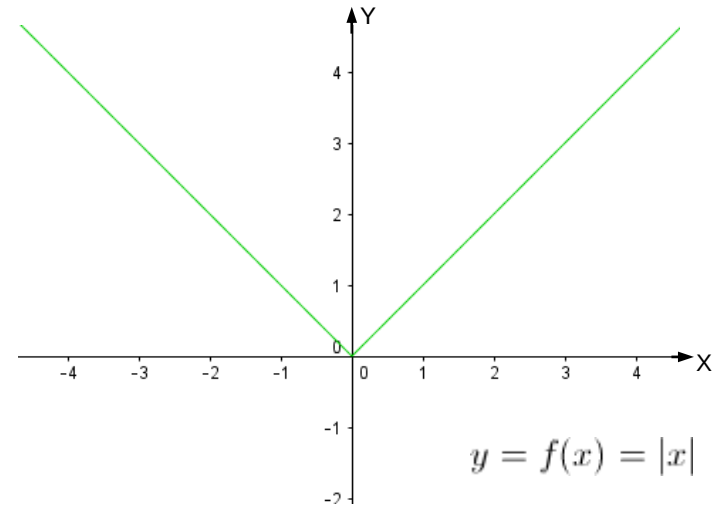
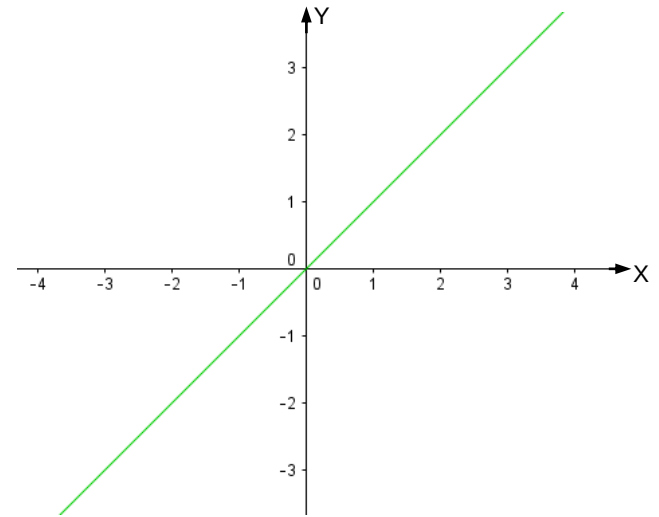


Definición de Función valor absoluto: Es aquella función matemática donde su rango está definido estrictamente en los (Reales positivos), es decir a cada elemento del dominio de una función valor absoluto cualesquiera que es asignado le corresponde un elemento del rango meramente positivo.

$$y = f(x) = |x|$$

Definición de Función identidad: Es aquella función matemática en donde cualquier valor que sea asignado a la misma como dominio, tiene el mismo valor como resultado en el rango.

$$y = f(x) = x$$



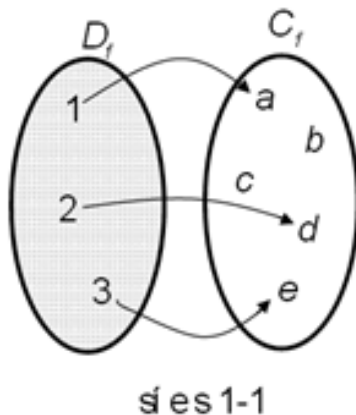
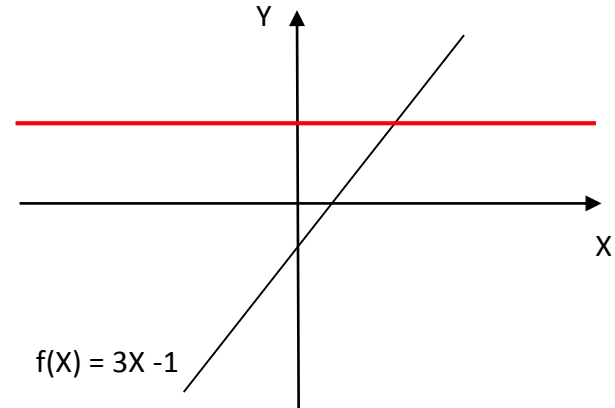
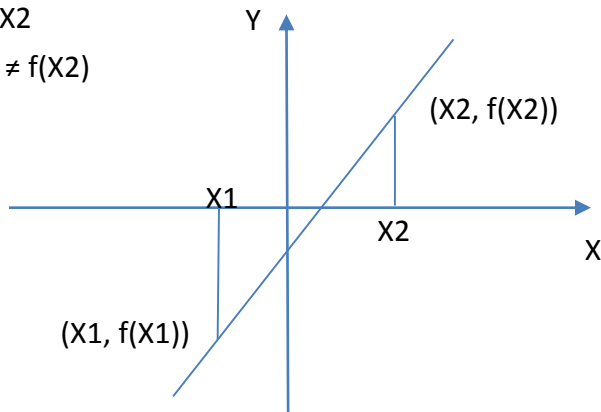
Definición de Función inyectiva: Una función $f: D_f \rightarrow C_f$ es inyectiva uno a uno (1-1), si a diferentes elemento del dominio le corresponden diferentes elementos del codominio. En esta función, para los valores cualesquiera X_1 y X_2 de su dominio se cumple que $X_1 \neq X_2 \rightarrow f(X_1) \neq f(X_2)$

Ejemplo: La función $f(x) = 3x - 1$ es 1-1 ya que si se define como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces se tendrá que a diferentes elementos del dominio le corresponden diferentes elementos del codominio.

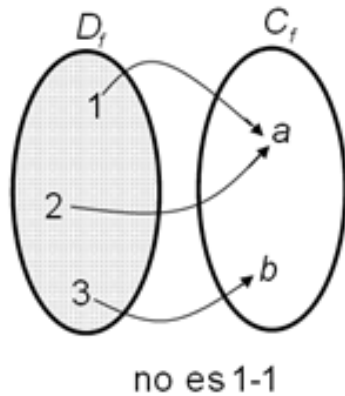
Método grafico.

Una función es inyectiva, si al trazar una recta paralela al eje **X**, esta corta en un solo punto a la gráfica.

$X_1 \neq X_2$
 $f(X_1) \neq f(X_2)$



Definición de Función sobreyectiva: Una función $f: D_f \rightarrow C_f$ es sobreyectiva, si a diferentes elemento del dominio x_1 y x_2 le corresponden elementos iguales del codominio. En esta función, para los valores cualesquiera x_1 y x_2 de su dominio se cumple que $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



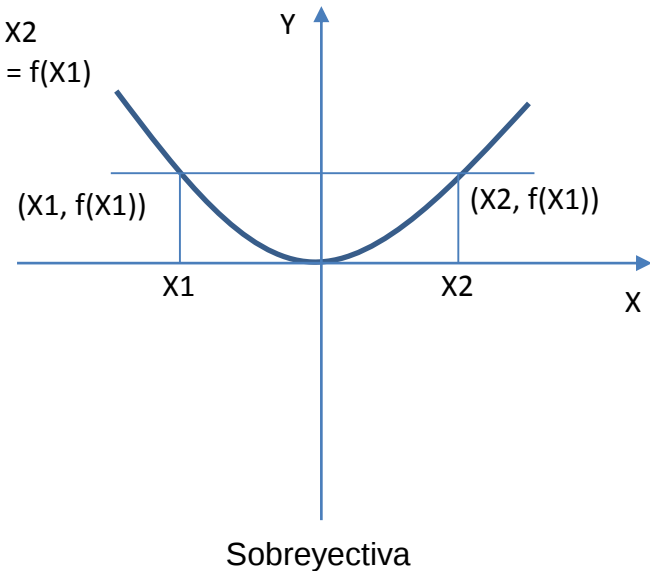
Rango = Codominio

Método grafico.

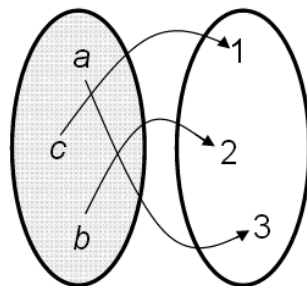
Una función es sobreyectiva, si al trazar una recta paralela al eje X , esta corta en dos punto a la gráfica.

Ejemplo: Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$

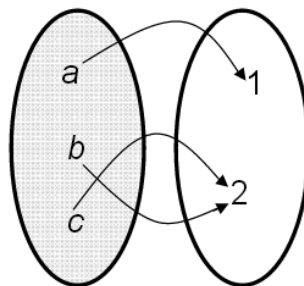
$$x_1 \neq x_2 \\ f(x_1) = f(x_2)$$



Definición de Función biyectiva: Una función es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y suprayectiva, y la relación entre los elementos del dominio y los del codominio es biunívoca.



Biyectiva
1-1 y sobre



1-1 no y sobre sí

RESUMEN

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = 2x - 3$$

$$Df = \mathbf{R}$$

$$\text{Cod} = \mathbf{R}$$

$$\text{Rango} = \mathbf{R}$$

$$\text{Rango} = \text{Codominio}$$



Sobreyectiva

Biyectiva { Inyectiva
Sobreyectiva

IGUALDAD DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones, podemos decir que $f = g$ siempre y cuando $Df = Dg$ y $f(x) = f(g)$.

Ejemplo 1

Determinar si las funciones f y g son iguales, tal que:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad y \quad g(x) = \sqrt{1 + x} \sqrt{1 - x}$$

Solución

$$a) \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow -1 + x^2 \geq 0 \rightarrow x \geq \pm \sqrt{1} \geq \pm 1$$

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}; \quad [-1, 1]$$

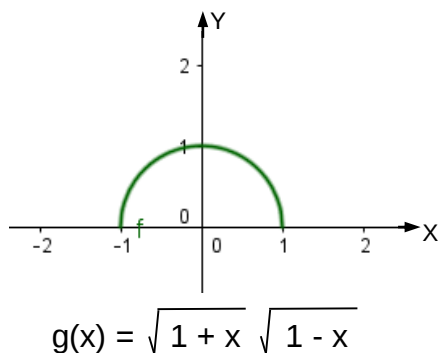
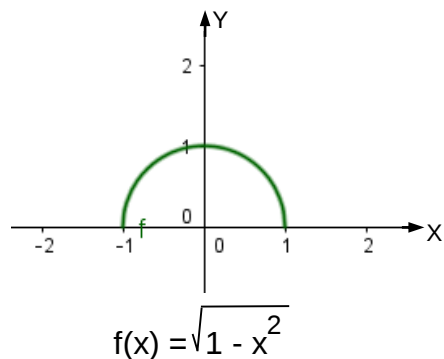
$$b) \quad g(x) = \sqrt{1 + x} \sqrt{1 - x}$$

$$1 + x \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \quad y \quad 1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$$

$$Dg = \{x / x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}; \quad [-1, 1]$$

;

$$\therefore Df = Dg \quad y \quad f(x) = f(g)$$



Ejemplo 2

Determinar si las funciones f y g son iguales, tal que:

$$f(x) = \sqrt{(x - 4)(x - 5)} \quad y \quad g(x) = \sqrt{x - 4} \sqrt{x - 5}$$

Solución

$$a) \quad f(x) = \sqrt{(x - 4)(x - 5)}$$

$$(x - 4)(x - 5) \geq 0 \quad \begin{cases} x - 4 \leq 0 & x \leq 4 \\ x - 5 \geq 0 & x \geq 5 \end{cases}$$

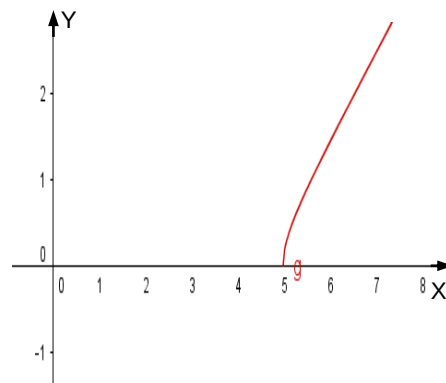
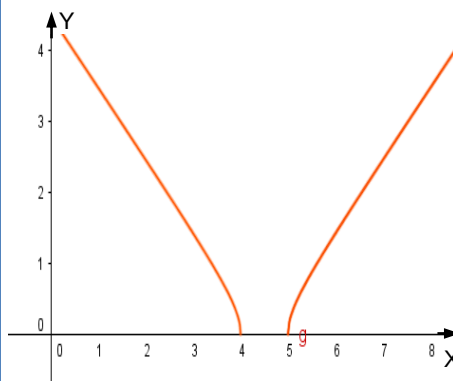
$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; x \leq 4, 5 \leq x\} \quad (-\infty, 4] \cup [5, \infty)$$

$$b) \quad g(x) = \sqrt{x - 4} \sqrt{x - 5}$$

$$x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \quad y \quad x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$$

$$Dg = \{x / x \in \mathbb{R}; 5 \leq x\}; \quad [5, \infty)$$

$$\therefore Df \neq Dg \quad y \quad f(x) \neq f(g)$$



OPERACIONES CON FUNCIONES

Adición.- la suma de dos funciones es otra función con:

$$D = Df \cap Dg$$

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x); \quad x \in D$$

Ejemplo 1

$$\text{Sea } f(x) = x^2 + 1 \dots\dots\dots (1) \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x - 3} \dots\dots\dots (2)$$

Solución

$$y = x^2 + 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}\} \quad (-\infty, \infty)$$

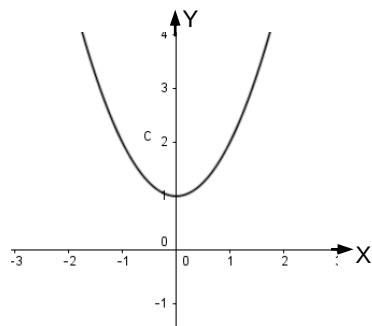
La inversa

$$x = +\sqrt{y - 1}$$

$$y - 1 \geq 0$$

$$y \geq 1$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}; y \geq 1\} \quad [1, \infty)$$



$$y = \sqrt{x - 3} \dots\dots\dots (2)$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

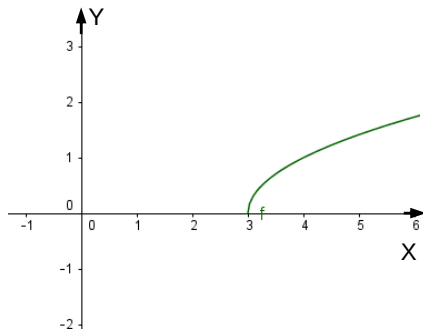
$$Dg = \{x / x \in \mathbb{R}; x \geq 3\} \quad (3, \infty)$$

La inversa

$$x = y^2 + 3 \quad y^2 + 3 \geq 0$$

$$y^2 \geq -3 \quad y \geq \pm \sqrt{-3} \quad y \geq 0$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}; y \geq 0\} \quad [0, \infty)$$



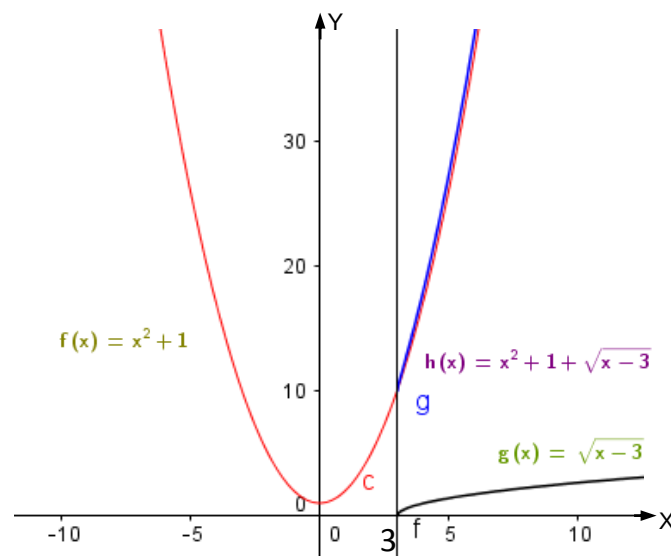
$$\text{Entonces } f(x) + g(x) = (f + g)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x - 3} \dots\dots\dots (3)$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$D(f+g) = \{x / x \in \mathbb{R}; x \geq 3\} \quad [3, \infty)$$

$$R(f+g) = \{y / y \in \mathbb{R}; y \geq 10\} \quad [10, \infty)$$



[GRV712](#)

FUNCIONES COMPOSICION O COMPUESTAS.

Dadas las funciones f y g con dominios Df y Dg respectivamente, se define como la composición de la función f con la función g a la función denotada por $f \circ g$ tal que

$$[f \circ g](x) = f(g(x))$$

EJEMPLOS DE FUNCIONES COMPUESTAS.

Ejemplo 1. dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = 1/x$, determinar las funciones compuesta, sus dominios y rangos de las cuatro expresiones.

Solución:

Para $f(x)$ $y^2 - x + 2 = 0$

Es una parábola con eje coincidente al eje x, vértice $x = 2$ y abre hacia la derecha.

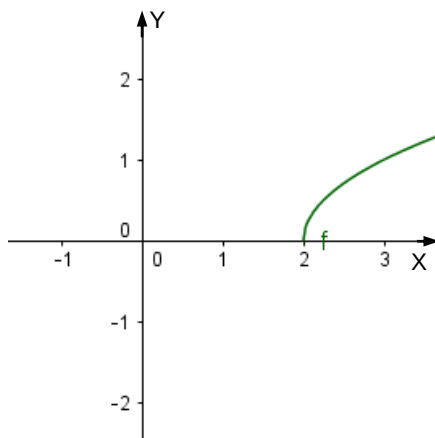
Dominio y rango.

Del radicando para $x - 2 \geq 0$

$$x \geq 2$$

$$Df: \{x \geq 2\} \quad [2, \infty)$$

$$Rf: \{y \geq 0\} \quad [0, \infty)$$



Para $g(x)$, es una hipérbola con eje focal a 45° .

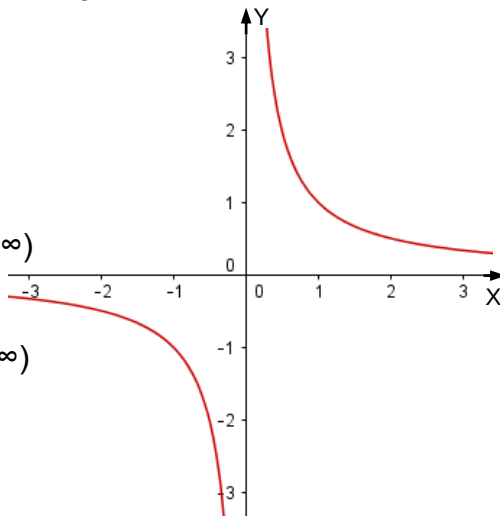
Solución:

Dominio.

Para $x \neq 0$

$$Dg: \{x \neq 0\} \quad (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$Rg: \{y \neq 0\} \quad (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



Primera función compuesta.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 2} = \sqrt{\frac{1 - 2x}{x}}$$

Dominio.

1r. caso. Para: $x > 0$ asíntota en $x = 0$

2do. caso. Para: $\frac{1 - 2x}{x} \geq 0$

$$1 - 2x \geq 0$$

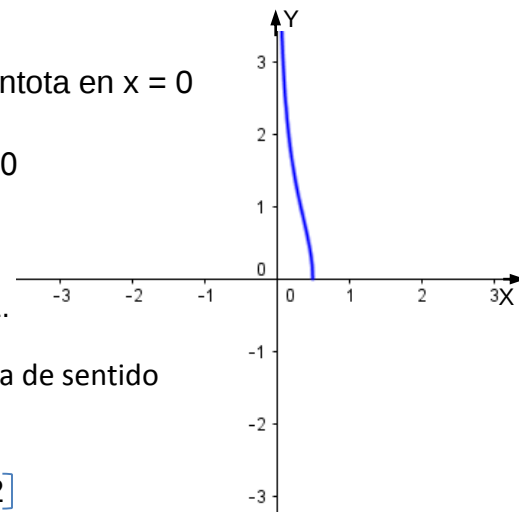
$$-2x \geq -1 \quad \text{Multiplicando por } -1.$$

$$2x \leq 1 \quad \text{La condición cambia de sentido}$$

$$x \leq 1/2;$$

$$D(f \circ g): \{0 < x \leq 1/2\} \quad (0, 1/2]$$

$$R(f \circ g): \{0 \leq y < \alpha\} \quad [0, \alpha)$$



[GRV71](#)

Segunda función compuesta.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$$

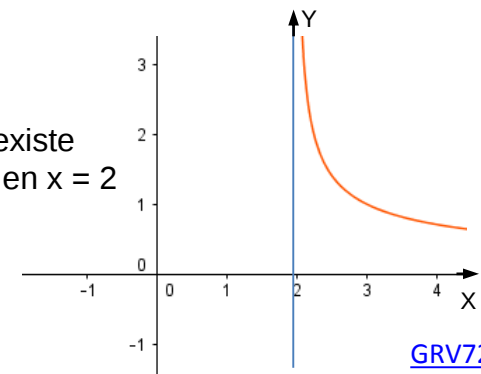
Dominio.

Para: $x - 2 > 0$

$x > 2$ Para: $x > 2$ existe una asíntota en $x = 2$

$$D(g \circ f): \{2 < x\} \quad (2, \alpha)$$

$$R(g \circ f): \{0 < y\} \quad (0, \alpha)$$

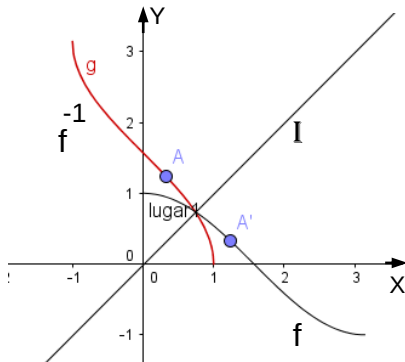


[GRV72](#)

FUNCION INVERSA

Definición.- Sea f una función biyectiva, entonces su función inversa es f^{-1} y está definida por la siguiente condición:

$$(y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in f$$



Ejemplo

$$\text{Sea } f = \{(2, 3), (3, 6), (4, 9), (5, 12)\}$$

$$\text{Entonces } f^{-1} = \{(3, 2), (6, 3), (9, 4), (12, 5)\}$$

$$\text{Donde } Df = \{2, 3, 4, 5\} = Rf^{-1}$$

$$\text{y } Rf = \{3, 6, 9, 12\} = Df^{-1}$$

Por lo que

$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) = I \quad \text{Donde} \quad D_I = Rf = Df^{-1}$$

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = I \quad \text{Donde} \quad D_I = Df = Rf^{-1}$$

Ejemplo

Dada la función $f = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y = 6x - x^2, 0 < x < 3\}$, investigar si es biyectiva (biunívoca). En caso afirmativo hallar su función inversa, dominio, Rango y función identidad.

Solución

$$y = 6x - x^2 \dots\dots\dots \textcircled{1} \rightarrow x^2 - 6x = -y \rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 = -y$$

$$(x - 3)^2 = -y + 9 \dots\dots \textcircled{2} \rightarrow (x - 3)^2 = -4(1/4)(y - 9)$$

Entonces de ecuación 1 y tomando en cuenta los límites de 0 y 3, se tiene que:

$$\text{Para } x = 0 \quad y = 0$$

$$\text{Para } y = 3 \quad x = 9$$

Por lo tanto la función es biyectiva (biunívoca).

a) Función inversa.

Despejando x de la ecuación 2

$$(x - 3)^2 = -y + 9 \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{-x + 9} + 3 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

b) Mediante la función composición se obtiene la función identidad.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) \quad \text{Por lo tanto de 1 y 3}$$

$$y = -\sqrt{-(6x - x^2) + 9} + 3 \rightarrow y = -\sqrt{-6x + x^2 + 9} + 3 \rightarrow y = -\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 3$$

$$y = -\sqrt{x^2 - 6x + 9 - 9 + 9} + 3 \rightarrow y = -\sqrt{(x - 3)(x - 3) + 9} + 3$$

$$y = (x - 3) + 3 \rightarrow y = x - 3 + 3 \rightarrow y = x \quad \text{Función identidad}$$

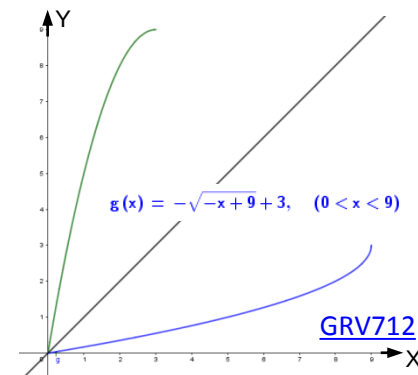
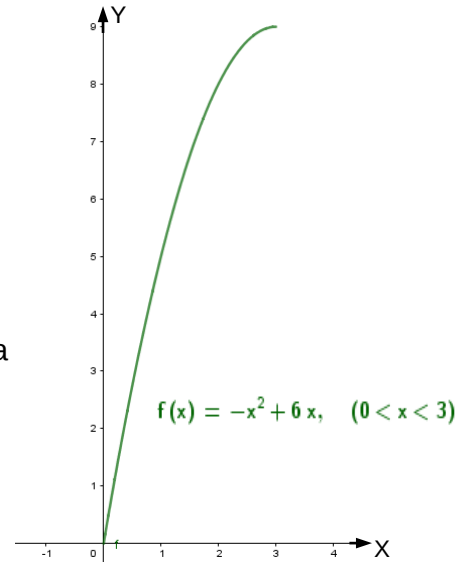
c) Dominio y rango.

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x < 3\} \quad (0, 3)$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}, 0 < y < 9\} \quad (0, 9)$$

$$Df^{-1} = \{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x < 9\} \quad (0, 9)$$

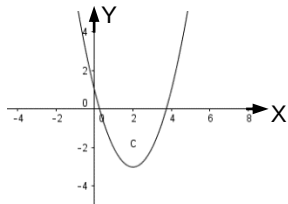
$$Rf^{-1} = \{y / y \in \mathbb{R}, 0 < y < 3\} \quad (0, 3)$$



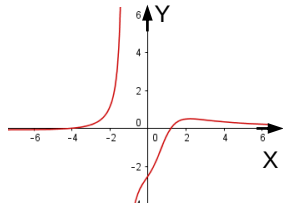
CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES SEGÚN SU EXPRESIÓN.

Explicitas

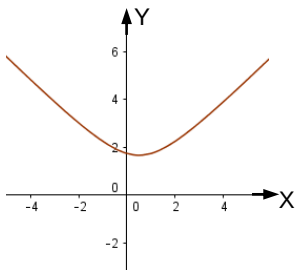
$y = f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ Entera



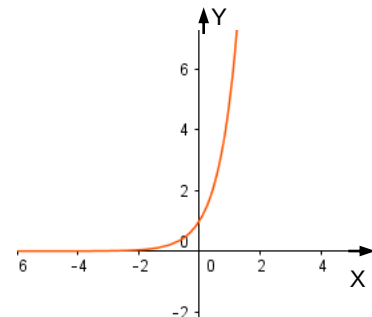
$y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x^3 + 2}$ Racional



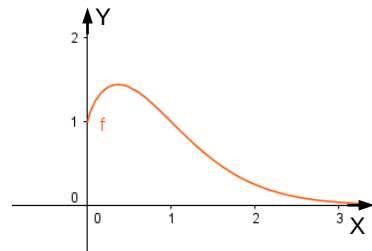
$y = f(x) = +\sqrt{x^2 - x + 3}$ Irracional



$y = f(x) = 5^x$ Exponencial

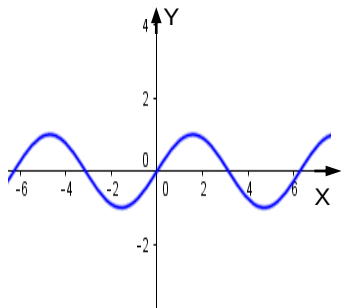


$y = f(x) = \frac{1}{x^x}$ Racional exponencial

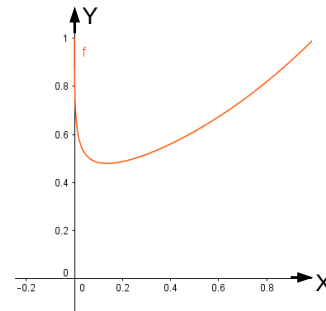


Explicitas trascendentes

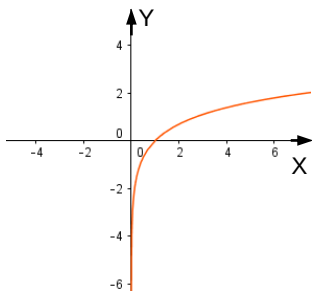
$y = f(x) = \sin x$ Trascendental



$y = f(x) = x^{\sqrt{x}}$ Exponencial irracional



$y = f(x) = \log x$ Logarítmica



Implícitas

$$3x^2 - 4x - 1 - y = 0$$

$$-yx^3 - 2y + x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$-y^2 + x^2 - x + 3 = 0$$

Implícitas trascendentes

$$y - \sin(x) = 0$$

$$\log(x) - y = 0$$

$$5^x - y = 0$$

$$\frac{1}{x} - y = 0$$

$$\sqrt{x} - y = 0$$

Paramétricas

$$f(x) = \{(x, y) / x = t + 1; \quad y = 2 + 3t\} \quad [10, \infty)$$

$$\text{Donde } Df = \mathbb{R}, \quad Dg = \mathbb{R} \quad y \quad t = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

Despejando el parámetro t de ambas ecuaciones.

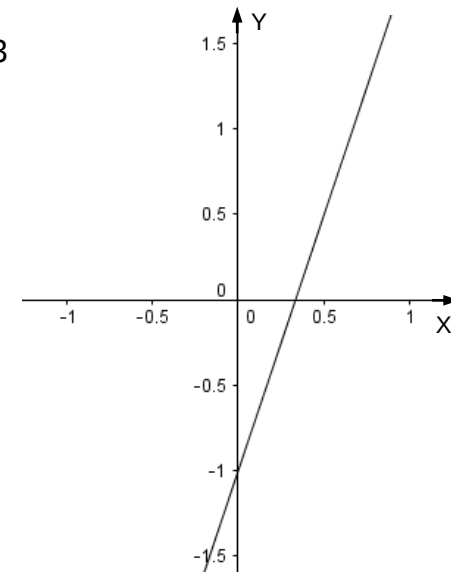
$$t = x - 1, \quad t = \frac{y - 2}{3}$$

Igualando

$$x - 1 = \frac{y - 2}{3}$$

$$y = 3(x - 1) + 2$$

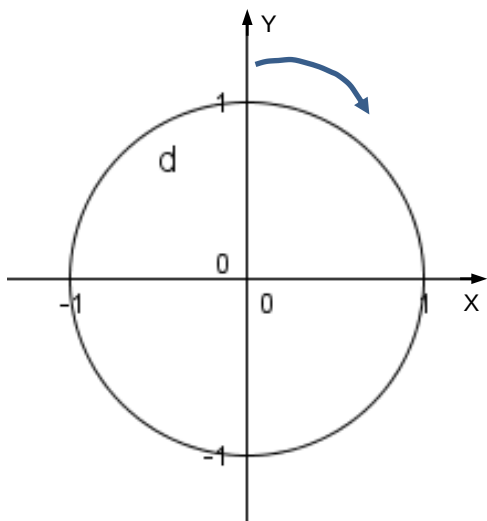
$$y = 3x - 1 \quad \begin{cases} x = 0 & y = -1 \\ y = 0 & x = 1/3 \end{cases}$$



Ejemplo

Dada la ecuación paramétrica determinar la cartesiana.

$$f = \begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$$



t	x	y
0	0	1
$\pi/4$	0.707	0.707
$\pi/2$	1	0
$(3/4)\pi$	0.707	-0.707
π	0	-1
$(5/4)\pi$	-0.707	-0.707
$(3/2)\pi$	-1	0
$(7/4)\pi$	-0.707	0.707
2π	0	1

Elevando al cuadrado las paramétricas.

$$x^2 = \sin^2 t \quad y^2 = \cos^2 t$$

Sustituyendo en la identidad trigonométrica.

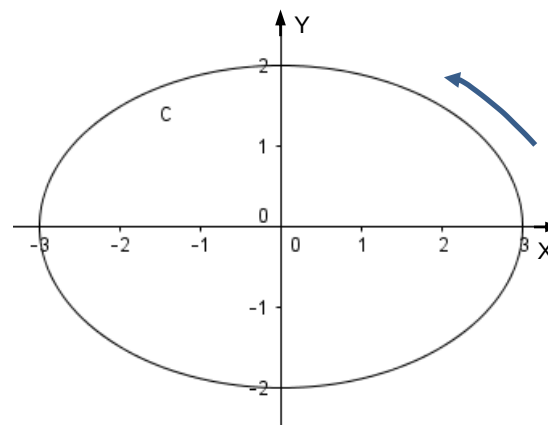
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Ecuación cartesiana.}$$

Ejemplo

Dada la ecuación paramétrica determinar la cartesiana.

$$f = \begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \end{cases}$$



t	x	y
0	3	0
$\pi/4$	2.1	1.4
$\pi/2$	0	2
$(3/4)\pi$	-2	1.4
π	-3	0
$(5/4)\pi$	-2	-1
$(3/2)\pi$	0	-2
$(7/4)\pi$	2.1	-1
2π	3	0

Despejando el parámetro y elevando al cuadrado las paramétricas.

$$\frac{x}{3} = \cos t; \quad \frac{y}{2} = \sin t \quad y \quad \frac{x^2}{9} = \cos^2 t; \quad \frac{y^2}{4} = \sin^2 t$$

Sustituyendo en la identidad trigonométrica.

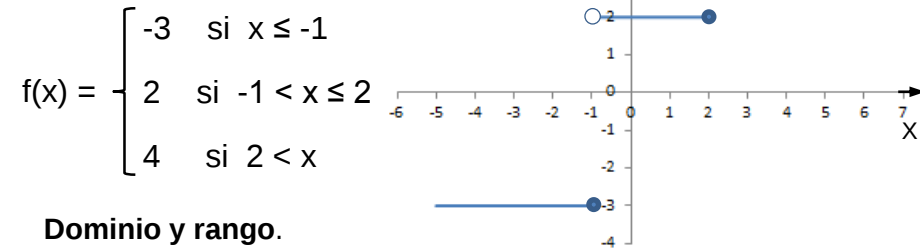
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{2^2} = 1 \quad \text{Ecuación cartesiana.}$$

Funciones dadas por mas de una regla de correspondencia.

Ejemplo 1. Graficar la siguiente función.

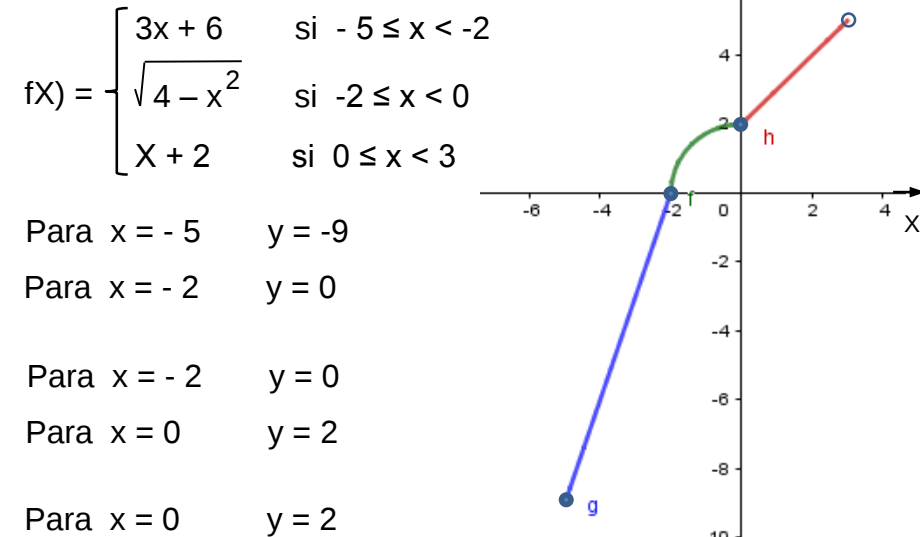


Dominio y rango.

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}, -\alpha < x < \alpha\} \quad (-\alpha, \alpha)$$

$$Rf = \{-3, 2, 4\}$$

Ejemplo 2. Graficar la siguiente función.



$$\text{Para } x = -5 \quad y = -9$$

$$\text{Para } x = -2 \quad y = 0$$

$$\text{Para } x = -2 \quad y = 0$$

$$\text{Para } x = 0 \quad y = 2$$

$$\text{Para } x = 0 \quad y = 2$$

$$\text{Para } x = 3 \quad y = 5$$

Dominio y rango.

$$\begin{cases} Df = \{x / x \in \mathbb{R}, -5 \leq x < 3\} & [-5, 3) \\ Rf = \{y / y \in \mathbb{R}, -1 \leq y < 4\} & [-1, 4) \end{cases}$$

Ejemplo 3. Graficar la siguiente función.

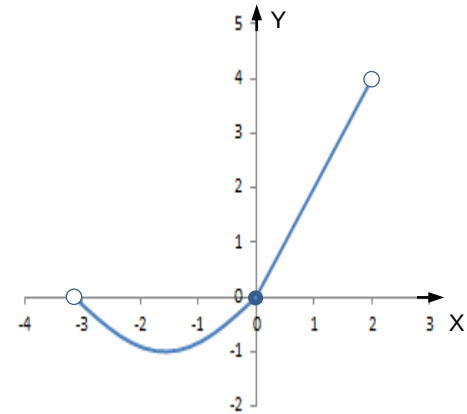
$$f(x) = \begin{cases} \text{Sen}(x) & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = -\pi \quad y = 0$$

$$\text{Para } x = 0 \quad y = 0$$

$$\text{Para } x = 0 \quad y = 0$$

$$\text{Para } x = 2 \quad y = 4$$



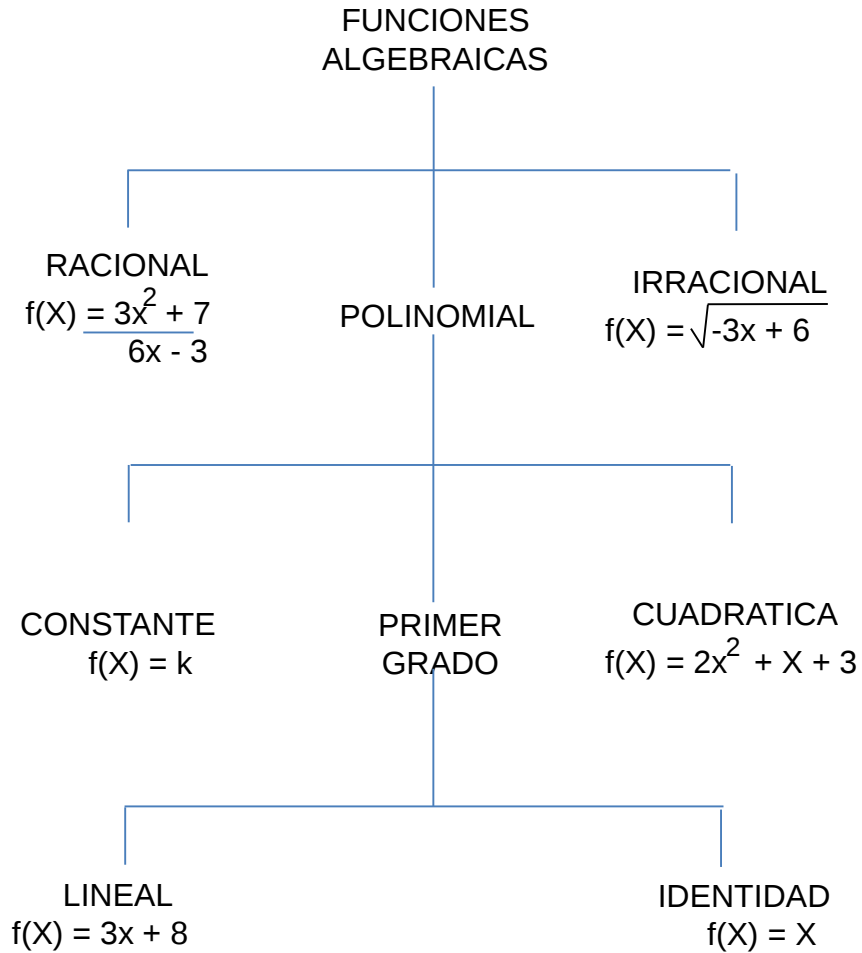
Dominio y rango.

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}, -3 < x < 2\} \quad (-3, 2)$$

$$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}, -1 \leq y < 4\} \quad [-1, 4)$$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son aquellas funciones en las que todos sus términos son algebraicos y no intervienen las relaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.



Ejemplos:

a. Dominio y rango de una función polinómica entera.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Solución:

Parábola paralela al eje "y", abre hacia arriba.

Obtención de raíces, o sea, intersección con los ejes.

$$\text{Para } y = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 2, \quad x = 3$$

$$\text{Df}(x): \{x / x \in \mathbf{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y = x^2 - 5x + 6 \quad \text{completando cuadrados} \quad \frac{5}{2} \rightarrow \frac{25}{4}$$

$$y = x^2 - 5x + 25/4 - 25/4 + 6$$

$$y = x^2 - 5x + 25/4 - 25/4 + 24/4$$

$$y = (x - 5/2)^2 - 1/4$$

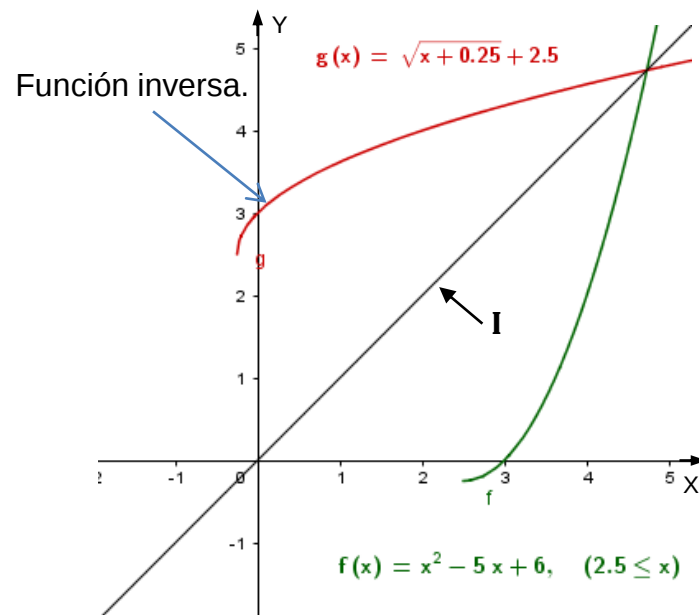
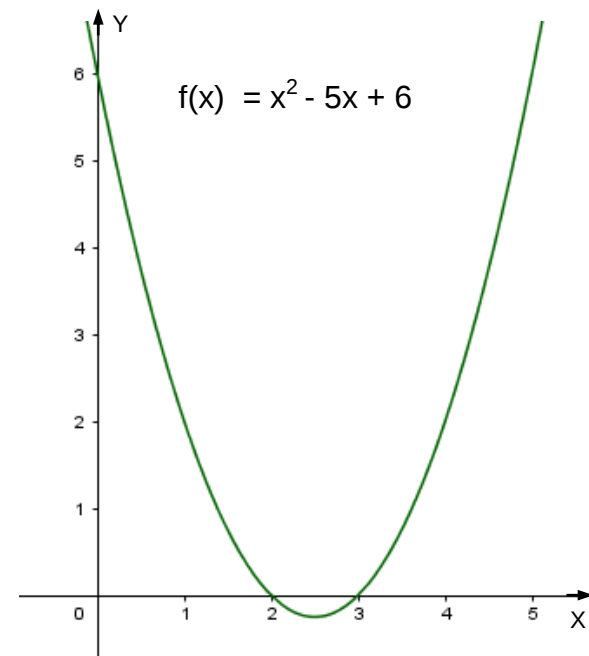
$$y + 1/4 = (x - 5/2)^2$$

$$\pm \sqrt{y + 1/4} = x - 5/2$$

$$x = \pm \sqrt{y + 1/4} + 5/2 \quad \text{Cambiando variables}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1/4} + 5/2 \quad x + 1/4 \geq 0 \rightarrow x \geq -1/4 \quad \text{Solo parte positiva}$$

$$\text{Rf} = \{y / y \in \mathbf{R}; y \geq -1/4\} \quad [-1/4, \infty)$$



b. Dominio y rango de la función racional,

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

Para $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ $(x - 2)(x - 3) \neq 0$ $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ Asíntotas

$$Df(x): \{x / x \in \mathbf{R} ; x \neq 2 ; x \neq 3\} \quad (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y(x^2 - 5x + 6) = 2x - 5 \quad \rightarrow \quad x^2 y - 5xy + 6y = 2x - 5$$

$$x^2 y - 5xy + 6y - 2x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ordenando } x^2 y - 5xy - 2x + 6y + 5 = 0$$

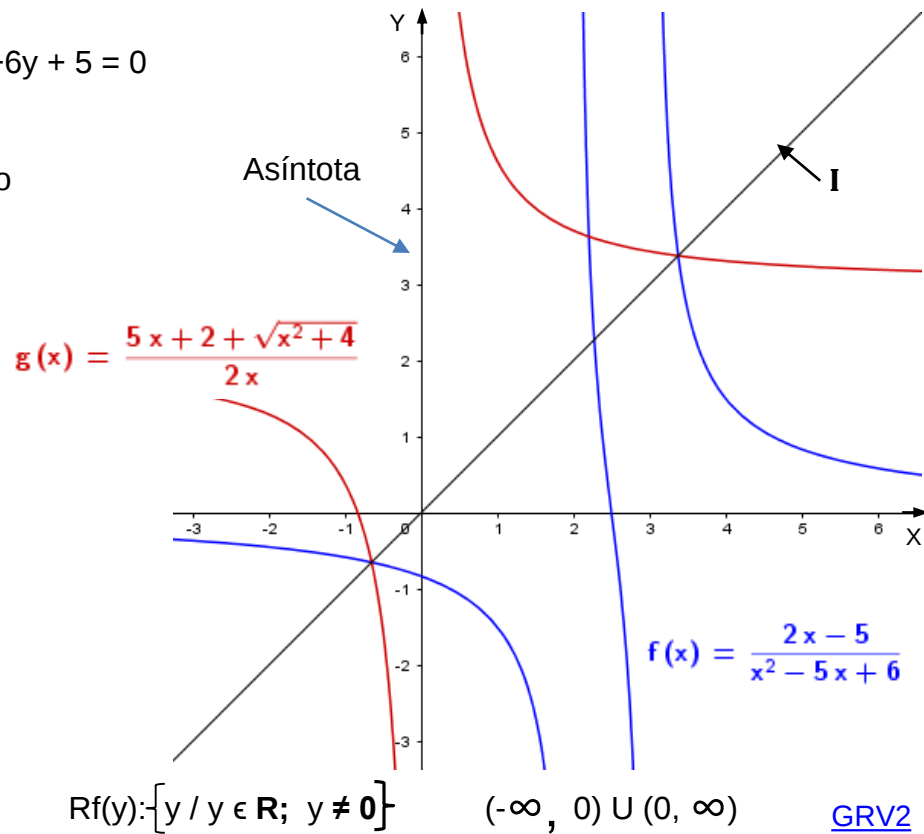
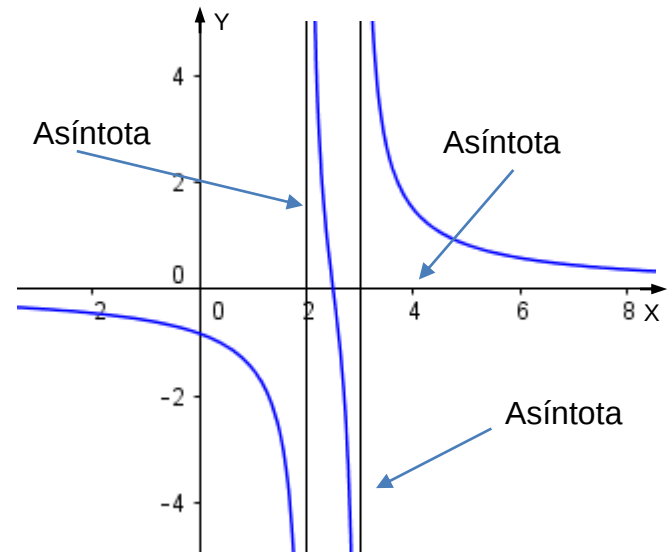
$$y x^2 - (5y + 2)x + 6y + 5 = 0 \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = y \\ b = -(5y + 2) \\ c = 6y + 5 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sustituyendo} \\ \text{en} \\ \text{fórmula} \end{array}$$

$$x = \frac{5y + 2 \pm \sqrt{(5y + 2)^2 - 4(y)(6y + 5)}}{2y} \quad \text{Desarrollando}$$

$$x = \frac{5y + 2 \pm \sqrt{25y^2 + 20y + 4 - 24y^2 - 20y}}{2y}$$

$$x = \frac{5y + 2 \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2y} \quad \text{Cambiando variables}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x + 2 \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2x} \quad 2x \neq 0 \quad x \neq 0 \quad \text{Asíntota}$$



c. Dominio de la función irracional de índice impar,

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 5x + 6}}$$

Solución:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \quad (x - 2)(x - 3) \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{array} \right. \quad \text{Asíntotas}$$

$$Df(x): \left\{ x / x \in \mathbf{R}; \quad x \neq 2; \quad x \neq 3 \right\}; \quad (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y^3 = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \quad \rightarrow \quad y^3(x^2 - 5x + 6) = x$$

$$y^3(x^2 - 5x + 6) = x \quad \rightarrow \quad (x^2 y^3 - 5xy^3 + 6y^3) - x = 0$$

$$(x^2 y^3 - 5xy^3 + 6y^3) - x = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 y^3 - 5xy^3 - x + 6y^3 = 0$$

$$y^3 x^2 - (5y^3 + 1)x + 6y^3 = 0 \quad \text{Donde}$$

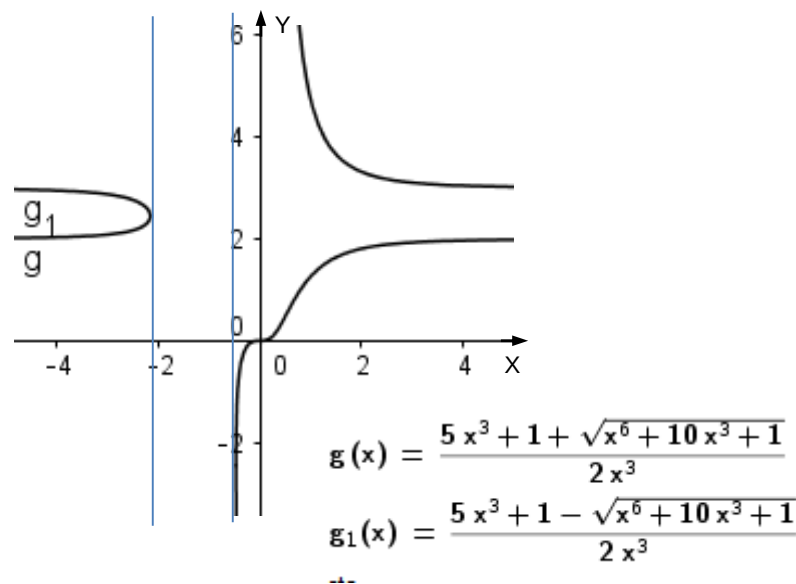
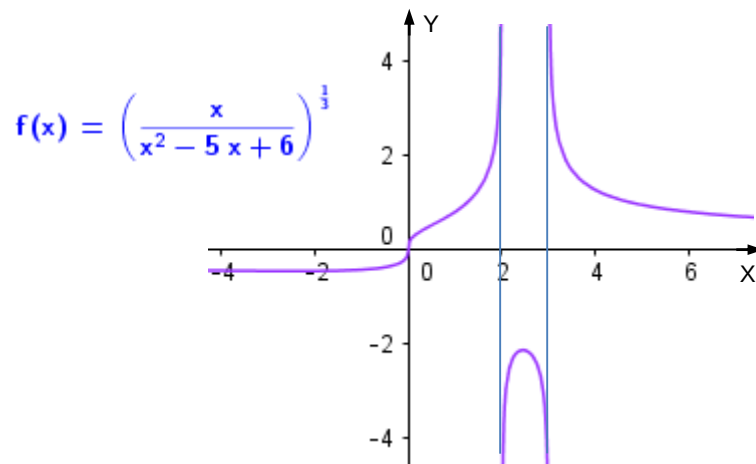
$$\left. \begin{array}{l} a = y^3 \\ b = -(5y^3 + 1) \\ c = 6y^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sustituyendo} \\ \text{en} \\ \text{fórmula} \end{array}$$

$$x = \frac{5y^3 + 1 \pm \sqrt{25y^6 + 10y^3 + 1 - 4(y^3)(6y^3)}}{2y^3}$$

$$x = \frac{5y^3 + 1 \pm \sqrt{y^6 + 10y^3 + 1}}{2y^3} \quad \text{Cambiando variables}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x^3 + 1 \pm \sqrt{x^6 + 10x^3 + 1}}{2x^3}; \quad 2x^3 \neq 0 \quad x \neq 0 \quad -2.15 \geq x \geq -0.47$$

$$Rf(y): \left\{ y / y \in \mathbf{R}; \quad -2.15 \geq y \geq -0.47; \quad y \neq 0 \right\} \quad (-\infty, -2) \cup (-0.5, 0) \cup (0, \infty)$$



Asíntotas.
(Raíces del radicando)

FUNCIONES PARES E IMPARES

Una función $f(x)$ es par si al evaluarla por $-x$ no cambia de signo.

$$f(-x) = f(x)$$

Ejemplo.

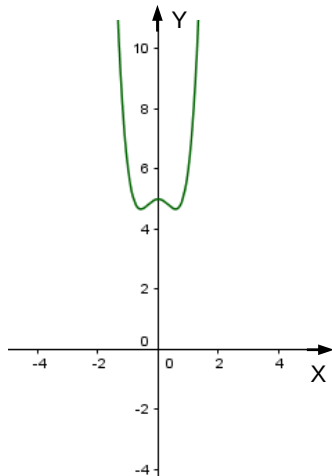
$$\text{Sea } f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$$

Evaluarla para $-x$

$$f(-x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$$

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5$$

$$f(-x) = 3x^4 - 2x^2 + 5 \quad \text{Función par}$$



Una función $f(x)$ es impar si al evaluarla por $-x$ cambia de signo.

$$f(x) = -f(x)$$

Ejemplo.

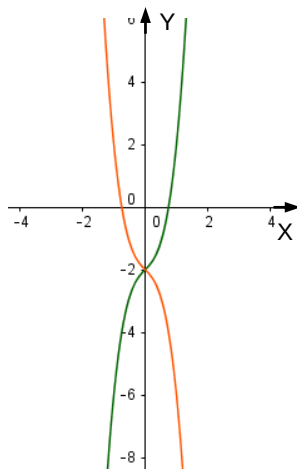
$$\text{Sea } g(x) = 3x^3 + x - 2$$

Evaluarla para $-x$

$$g(-x) = 3(-x)^3 + (-x) - 2$$

$$g(x) = -3x^3 - x - 2$$

Función impar



D. Dominio de la función irracional positiva de índice par.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

Nota: es una hipérbola coincidente con el eje x, toma la mitad de la grafica por ser el radicando positivo.

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad (x - 2)(x - 3) \geq 0 \quad \text{Analizando} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$Df(x): \{x / x \in \mathbf{R} ; x \leq 2, 3 \leq x\} \quad (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y^2 = x^2 - 5x + 6 \quad \text{Ordenando} \quad -x^2 + 5x - 6 + y^2 = 0 \quad \text{Donde}$$

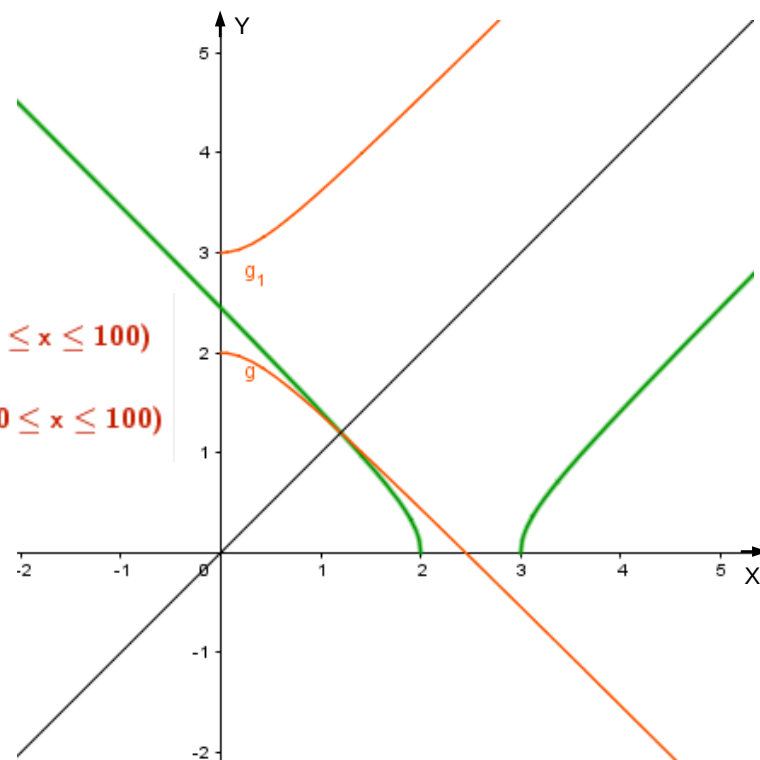
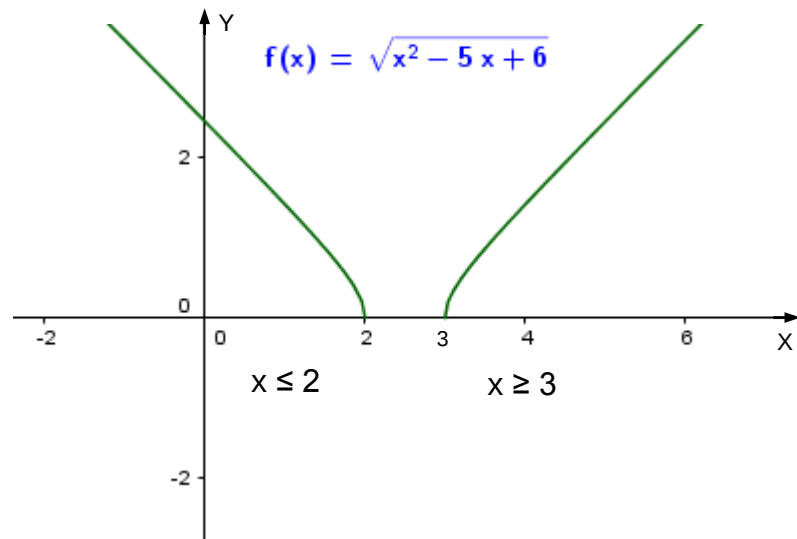
$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 + y^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sustituyendo} \\ \text{en} \\ \text{fórmula} \end{array}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-6 + y^2)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24 + 4y^2}}{2(-1)} \quad \text{Resumiendo y cambiando variables}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-5 + \sqrt{4x^2 + 1}}{-2}; \quad 4x^2 + 1 \geq 0; \quad x \geq \sqrt{-1/4}; \quad x \geq 0$$

$$Rf(y): \{y / y \in \mathbf{R}^+, y \geq 0\}; \quad [0, \infty)$$



Dominio y rango de una función racional combinada con una irracional par.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 4}$$

Solución:

Primer caso. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$; $(x - 2)(x - 3) \geq 0$ **Analizando** $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Segundo caso. $x + 4 \neq 0$; $x \neq -4$ Por lo tanto existe una asíntota, así que:

$$Df = \left\{ x / x \in \mathbb{R}; x \neq -4, x \leq 2, 3 \leq x \right\} \quad (-\infty, -4) \cup (-4, 2] \cup [3, \infty)$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y(x + 4) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \longrightarrow yx + y4 = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \longrightarrow (yx + y4)^2 = x^2 - 5x + 6$$

$$(y^2 x^2 + 8y^2 x + 16y^2) = x^2 - 5x + 6 \longrightarrow y^2 x^2 + 8y^2 x + 16y^2 - x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \text{Ordenar}$$

$$y^2 x^2 - x^2 + 8y^2 x + 5x + 16y^2 - 6 = 0 \quad \text{factorizando}$$

$$x^2(y^2 - 1) + x(8y^2 + 5) + 16y^2 - 6 = 0 \quad \text{Donde}$$

$$y = \frac{-8y^2 - 5 \pm \sqrt{(8y^2 + 5)^2 - 4(y^2 - 1)(16y^2 - 6)}}{2(y^2 - 1)}$$

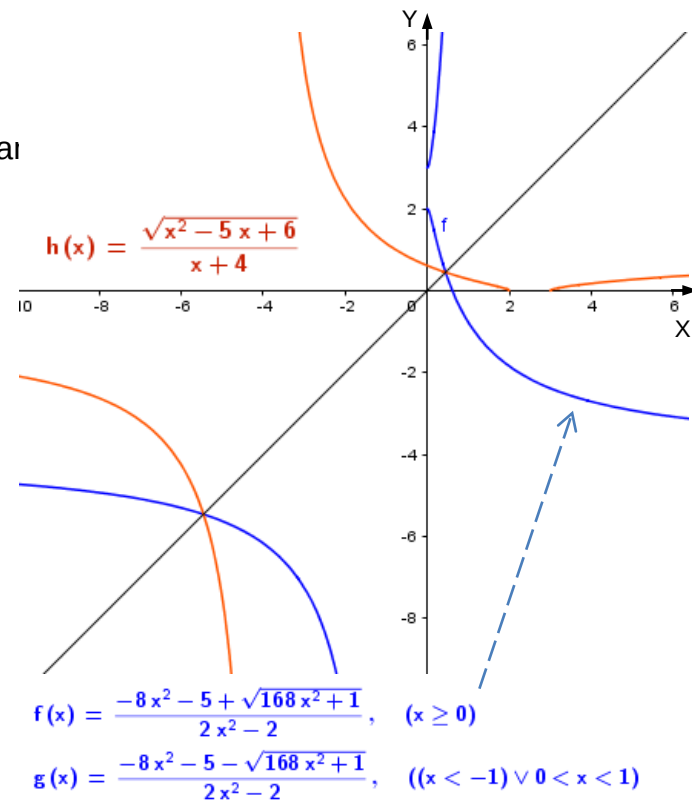
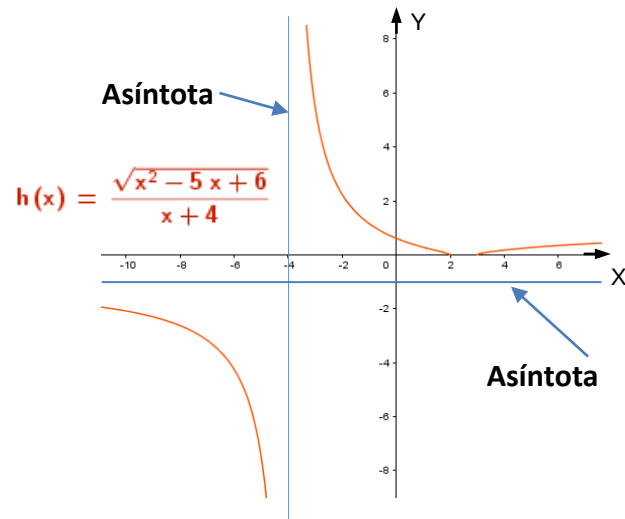
$$y = \frac{-8y^2 - 5 \pm \sqrt{64y^4 + 80y^2 + 25 - 64y^4 + 88y^2 - 24}}{2y^2 - 2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-8x^2 - 5 \pm \sqrt{168x^2 + 1}}{2x^2 - 2}$$

Caso 1 $2x^2 - 2 \neq 0 \longrightarrow x \neq 1$ Asíntota

Caso 2 $168x^2 + 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 0$

$$Rf = \left\{ y / y \in \mathbb{R} \quad y \neq -1, \quad 0 \leq y \right\} \quad (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$



Sustituyendo en fórmula

Resumiendo y cambiando variables

Dominio y rango de una función racional combinada con una irracional par.

$f(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Solución:

$x^2 - 5x + 6 > 0$; $(x - 2)(x - 3) > 0 \rightarrow x < 2$ y $x > 3$ Dos asíntotas

$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; x < 2, 3 > x\} \quad (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

Obtención del rango mediante la inversa.

$y\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x + 4 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = \frac{(x + 4)^2}{y^2} \rightarrow y^2(x^2 - 5x + 6) = (x + 4)^2$

$y^2x^2 - y^25x + 6y^2 = x^2 + 8x + 16 \rightarrow y^2x^2 - y^25x + 6y^2 - x^2 - 8x - 16 = 0$ Ordenando

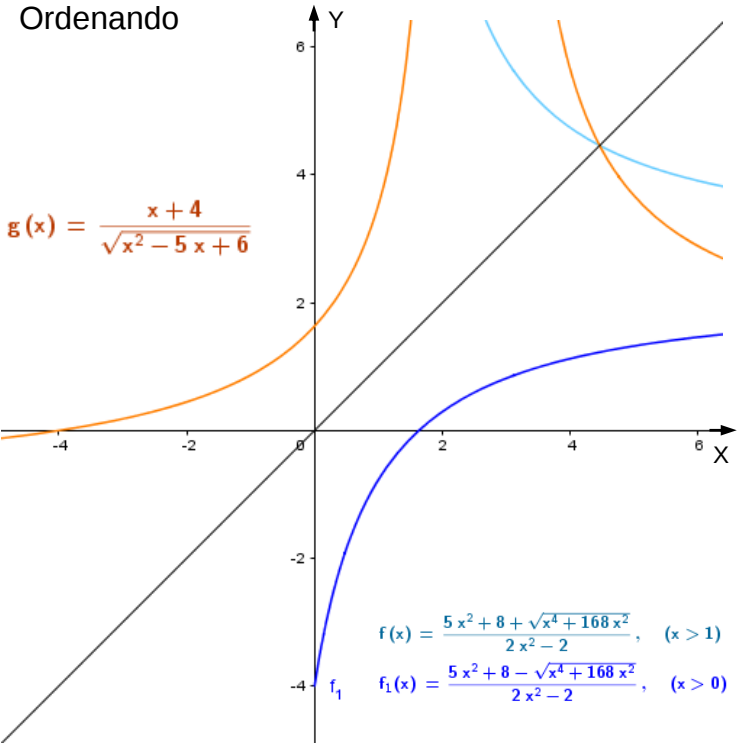
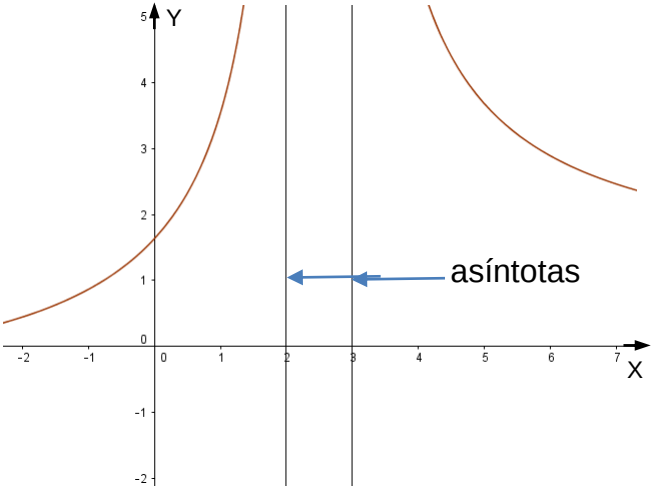
$y^2x^2 - x^2 - y^25x - 8x + 6y^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2(y^2 - 1) - x(5y^2 + 8) + 6y^2 - 16 = 0$

Donde $\begin{cases} a = y^2 - 1 \\ b = -(5y^2 + 8) \\ c = 6y^2 - 16 \end{cases}$ Sustituyendo en fórmula

$x = \frac{5y^2 + 8 \pm \sqrt{(5y^2 + 8)^2 - 4(y^2 - 1)(6y^2 - 16)}}{2(y^2 - 1)}$

$x = \frac{5y^2 + 8 \pm \sqrt{25y^4 + 80y^2 + 64 - 64y^4 + 64y^2 + 64y^2 - 64}}{2y^2 - 2}$ Resumiendo y cambiando variables

$f^{-1}(x) = \frac{5x^2 + 8 \pm \sqrt{x^4 + 168x^2}}{2x^2 - 2}$ Caso 1 $2x^2 - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$
Caso 2 $168x^2 + x^4 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$



$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}; -\infty < x < \infty\} \quad (-\infty, \infty)$

Dominio y rango de una función racional e irracional combinada.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{x^2-5x+6}}$$

Solución:

Para $x^2-5x+6 \neq 0$ $(x-2)(x-3) \neq 0$ $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ y $x+4 \neq 0$; $x \neq -4$

$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; \ -4 \leq x < 2, \ x > 3\}$ $[-4, 2) \cup (3, \infty)$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y^2 = \frac{x+4}{x^2-5x+6} \longrightarrow y^2(x^2-5x+6) = x+4 \longrightarrow y^2x^2 - y^25x + 6y^2 = x+4$$

$$y^2x^2 - y^25x + 6y^2 - x - 4 = 0 \longrightarrow y^2x^2 - y^25x - x + 6y^2 - 4 = 0$$

$$y^2x^2 - x(y^25 + 1) + 6y^2 - 4 = 0$$

Donde

$\left. \begin{aligned} a &= y^2 \\ b &= -(y^25 + 1) \\ c &= 6y^2 - 4 \end{aligned} \right\}$

Sustituyendo en fórmula

$\longrightarrow x = \frac{5y^2+1 \pm \sqrt{(5y^2+1)^2 - 4(y^2)(6y^2-4)}}{2y^2}$

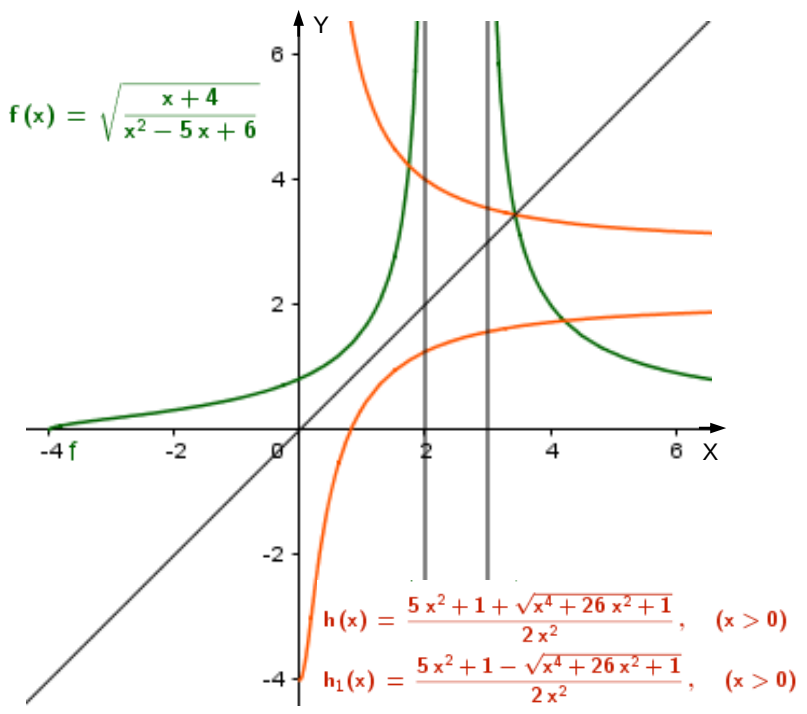
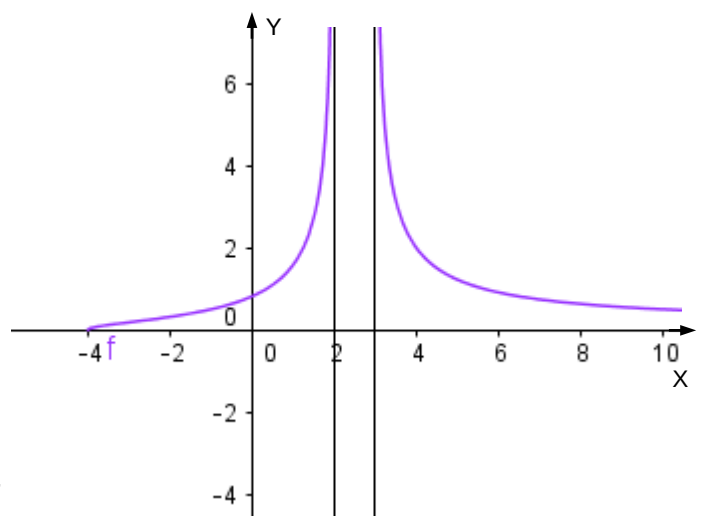
$$x = \frac{5y^2+1 \pm \sqrt{25y^4+10y^2+1-24y^4+16y^2}}{2y^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5y^2+1 \pm \sqrt{y^4+26y^2+1}}{2y^2}$$

cambiando variables

$$y_{1,2} = \frac{5x^2+1 \pm \sqrt{x^4+26x^2+1}}{2x^2}$$

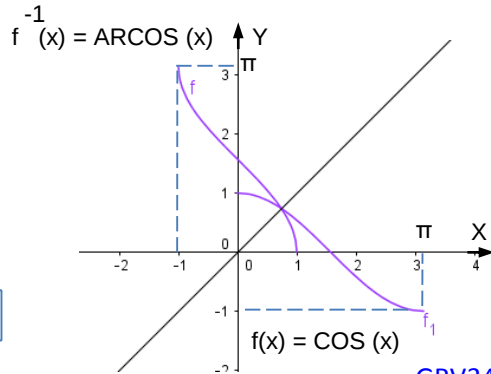
$2x^2 \neq 0$; $x \neq 0$ Por lo tanto



$Rf = \{y / y \in \mathbb{R}; \ 0 < y\}$ $(0, \infty)$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y SUS INVERSAS

$f(x) = \cos(x)$ Biunívoca



GRV341

Df: $[0, \pi]$; Rf: $[1, -1]$

$f^{-1}(x) = \arccos(x)$

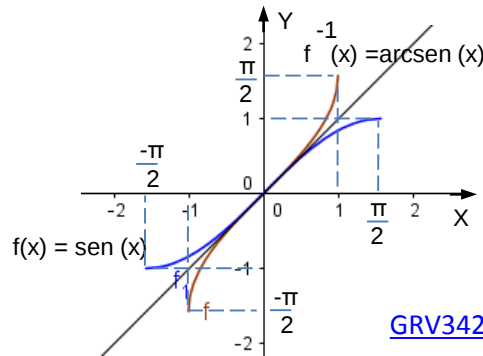
Rf $^{-1}$: $[-1, 1]$; Rf $^{-1}$: $[\pi, 0]$

$f(x) = \sin(x)$

Df: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; Rf: $[-1, 1]$

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

Df $^{-1}$: $[-1, 1]$; Rf $^{-1}$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



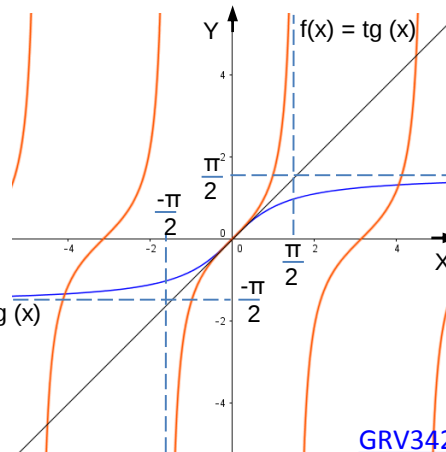
GRV342

$f(x) = \tan(x)$

Df: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; Rf: $(-\infty, \infty)$

$f^{-1}(x) = \arctan(x)$

Df $^{-1}$: $(-\infty, \infty)$; Rf $^{-1}$: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

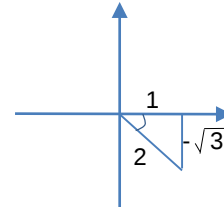


GRV342

Repaso: Calcular el valor del ángulo en radianes a partir de valores unitarios del triángulo rectángulo.

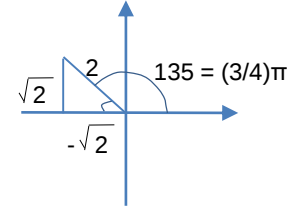
Para calcular estos valores se utilizan las inversas de los cosenos.

Para 60°



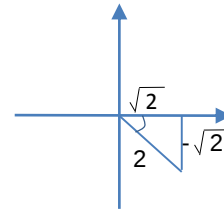
$$y = \arcsin(-\sqrt{3} / 2) = -\pi / 3$$

Para 45°



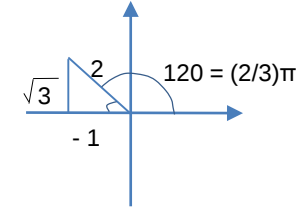
$$y = \arccos(-\sqrt{2} / 2) = (3/4)\pi$$

Para 45°

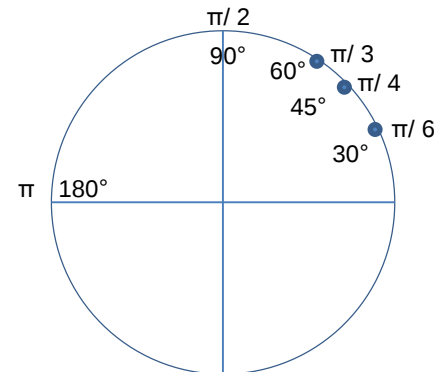


$$y = \arctan(-1) = -\pi / 4$$

Para 60°



$$y = \text{arccot}(-1 / \sqrt{3}) = (2/3)\pi$$



$$\text{Rad} = \frac{\theta}{180} \pi$$

Dominio y rango de una función seno.

$$y = \sin(x)$$

Solución:

Para limitar la ecuación y hacerla función biunívoca se hace $y = 1$.

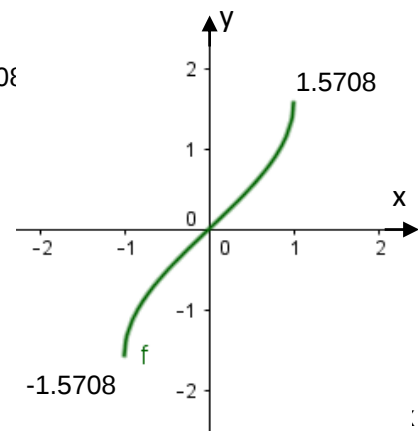
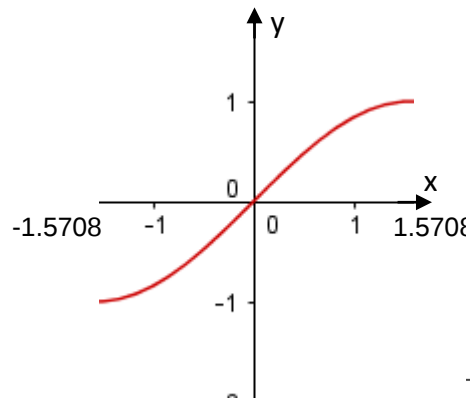
$$1 = \sin(x) \rightarrow \text{Despejando } x \rightarrow x = \arcsin(1) = 1.5708$$

$$\text{Para } x = -1.5708 \rightarrow y = \sin(-1.5708) = -1$$

$$\text{Para } x = 1.5708 \rightarrow y = \sin(1.5708) = 1$$

$$Df = \{x / -1.5708 \leq x \leq 1.5708\} ; \quad [-1.5708, 1.5708]$$

$$Rf = \{y / -1 \leq y \leq 1\} ; \quad [-1, 1]$$



Dominio y rango de una función coseno.

$$y = \cos(x)$$

Para limitar la ecuación y hacerla función biunívoca se hace $y = 1$ y $y = -1$.

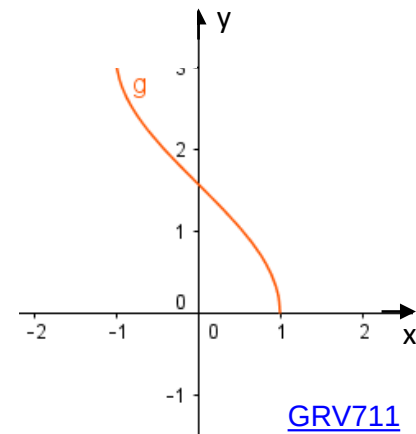
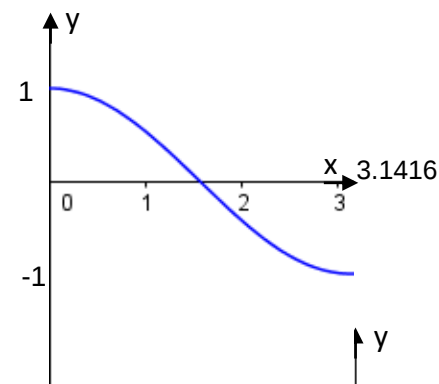
$$1 = \cos(x) \rightarrow \text{Despejando } x \rightarrow x = \arccos(1) = 0 \quad \text{y} \quad x = \arccos(-1) = 3.1416$$

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y = \cos(0) = 1$$

$$\text{Para } x = 3.1416 \rightarrow y = \cos(3.1416) = -1$$

$$Df = \{x / 0 \leq x \leq 3.1416\} ; \quad [0, 3.1416]$$

$$Rf = \{y / -1 \leq y \leq 1\} ; \quad [-1, 1]$$



FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

$$f(x) = b^x \quad \text{y} \quad f(x) = \log_b(x)$$

Donde $b \neq 0$

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = \log_2(x)$$

$$h(x) = 2^x + 1$$

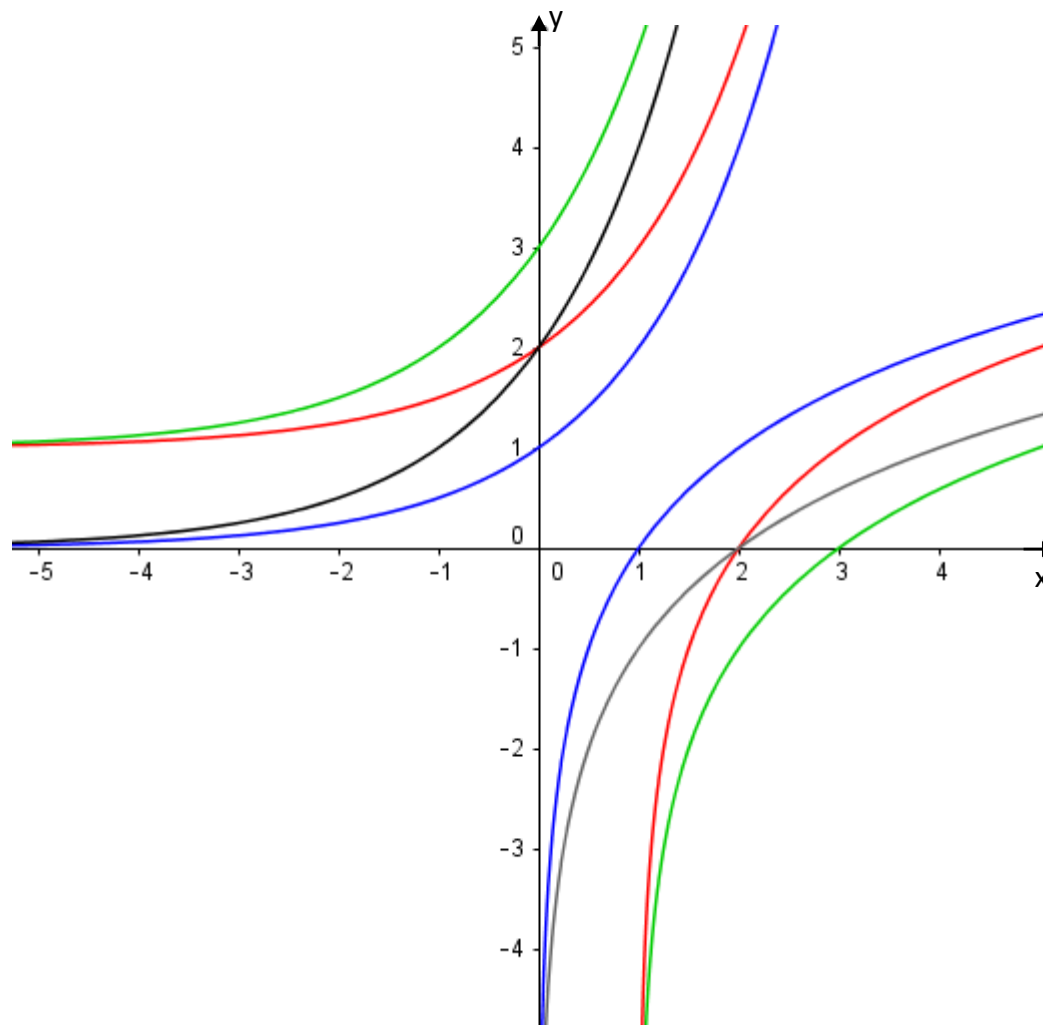
$$p(x) = \log_2(x - 1)$$

$$q(x) = 2^{x+1}$$

$$r(x) = \log_2(x) - 1$$

$$s(x) = 2^{x+1} + 1$$

$$t(x) = \log_2(x - 1) - 1$$



Dominio y rango de una función exponencial.

$$y = 2^x$$

Donde $b = 2$ por lo tanto $b > 0$ y $b \neq 1$

Intersección con los ejes.

$$\text{Para } x = 0 \quad y = 2^0 = 1$$

$$\text{Para } y = 0 \quad 0 = 2^x \quad x = \log_2(0) = \text{Ind.} \quad -\infty \text{ asintótica al eje } x$$

Obtención del dominio.

$$Df = \{x / x \in \mathbf{R}\}; \quad (-\infty, \infty)$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$x = \log_2(y) \quad \text{Cambiando variables}$$

$$y = \log_2(x)$$

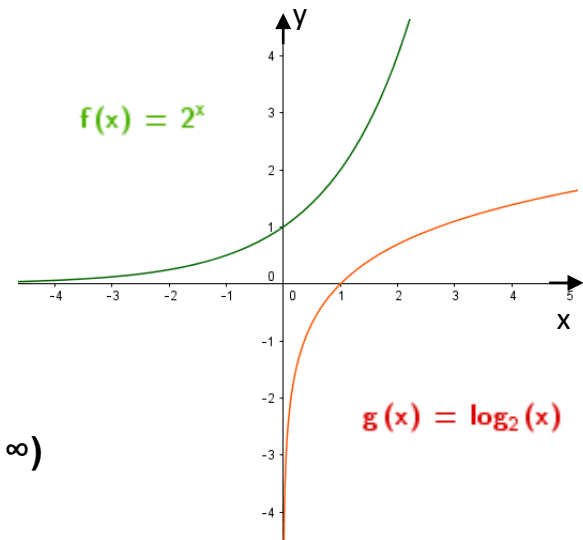
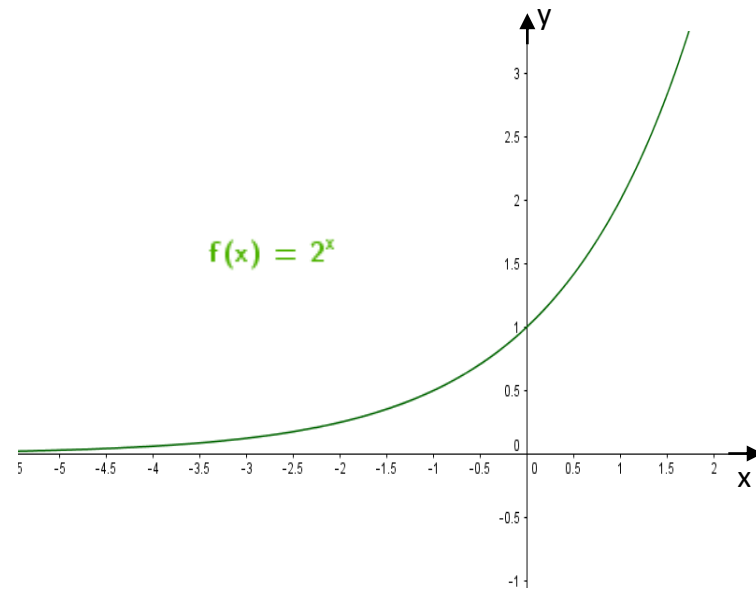
$$\text{Para } x = 0 \quad y = \log_2(0) = \text{Ind.} \quad -\infty \text{ asintótica al eje } y$$

$$\text{Para } y = 0 \quad 0 = \log_2(x) \quad x = 2^0 = 1 \quad Rf = \{y / 0 < y\}; \quad (0, \infty)$$

Nota. Valores para los cuales se hace indeterminada.

$$\text{Para } x = \infty \quad y = 2^\infty = \infty$$

$$\text{Para } x = -\infty \quad y = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = 0$$



Dominio y rango de una función exponencial.

$$y = 1 - \frac{1}{e^x}$$

$$\text{Para } 1 - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \ln(1) \rightarrow x = 0$$

$$Df = \left\{ x / x \in \mathbf{R} \right\}; \quad (-\infty, \infty)$$

Intersección con los ejes.

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y = 1 - \frac{1}{e^0} \rightarrow y = 0$$

$$\text{Para } y = 0 \rightarrow \frac{1 - 1}{e^x} = 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \ln(1) \rightarrow x = 0$$

Asíntota.

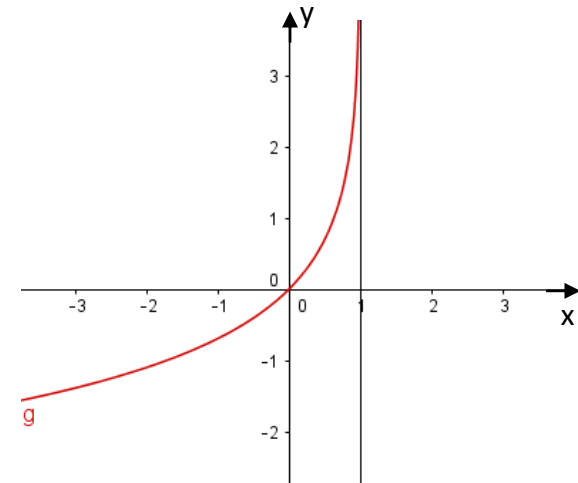
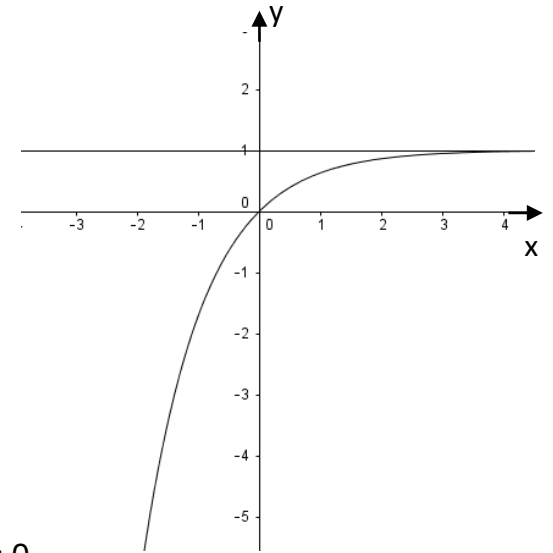
$$y = 1 - \frac{1}{e^\infty} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

Obtención del rango mediante la inversa.

$$y - 1 = - \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x (y - 1) = -1 \rightarrow e^x = - \frac{1}{y - 1}$$

$$x = \ln \left[\frac{-1}{y - 1} \right] \rightarrow \text{Cambiando signos y variables} \rightarrow y = \ln \left[\frac{1}{1 - x} \right] \quad \text{Ec. inversa}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1 - x} > 0 \rightarrow o' \rightarrow 1 - x > 0 \rightarrow 1 - x + x > 0 + x \rightarrow 1 > x$$



$$Rf = \left\{ y / y < 1 \right\}; \quad (-\infty, 1)$$

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

$$y = b^x \longrightarrow x = \log_b y; \quad \text{Donde: } b > 1 \quad \text{e} \quad y > 0$$

$$b \neq 0$$

$$y = e^x \longrightarrow x = \ln y; \quad \text{Log}_e x = \ln x$$

Ejemplo.

Obtener la función inversa de $y = 4e^{(x-3)} + 3$.

Cambio de variables.

$$x = 4e^{(y-3)} + 3 \quad \text{Despejando a "e"}$$

$$e^{(y-3)} = \frac{x-3}{4}$$

Multiplicando por logaritmo natural.

$$\ln e^{(y-3)} = \ln \left(\frac{x-3}{4} \right)$$

Recordando: $\ln(e^b) = b \ln(e)$ Parte izquierda de la ecuación.

$$\ln(e)^b = b \ln(1)$$

$$(y-3)\ln e = \ln \left(\frac{x-3}{4} \right)$$

$$y-3 = \ln \left(\frac{x-3}{4} \right)$$

$$y = \ln \left(\frac{x-3}{4} \right) + 3$$

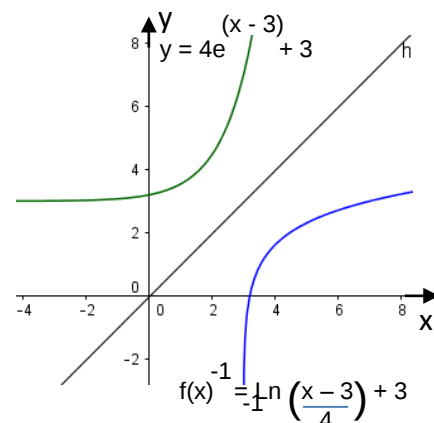
Cambio de variables.

$$f(x)^{-1} = \ln \left(\frac{x-3}{4} \right) + 3$$

$$Df = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-\infty, \infty)$$

$$\frac{y-3}{4} > 0 \quad y > 3$$

$$Rf = \left\{ y/y \in \mathbb{R}; y > 3 \right\}; \quad (3, \infty)$$



Nota: $e^0 = 1$ $\ln(e) = 1$
 $e^1 = 2.7183$ $\ln(1) = 0$

Ejemplo.

Obtener la función inversa de $f(x) = \log_{10}(2x-1) + 5$

Cambio de variables.

$$x = \log_{10}(2y-1) + 5$$

$$\log(2y-1) = x - 5$$

$$2y - 1 = 10^{(x-5)}$$

$$2y = 10^{(x-5)} + 1$$

$$y = \frac{10^{(x-5)} + 1}{2}$$

$$f(x)^{-1} = \frac{10^{(x-5)} + 1}{2}$$

Para $f(x)$: $\longrightarrow 2x - 1 > 0 \longrightarrow x > 1/2$

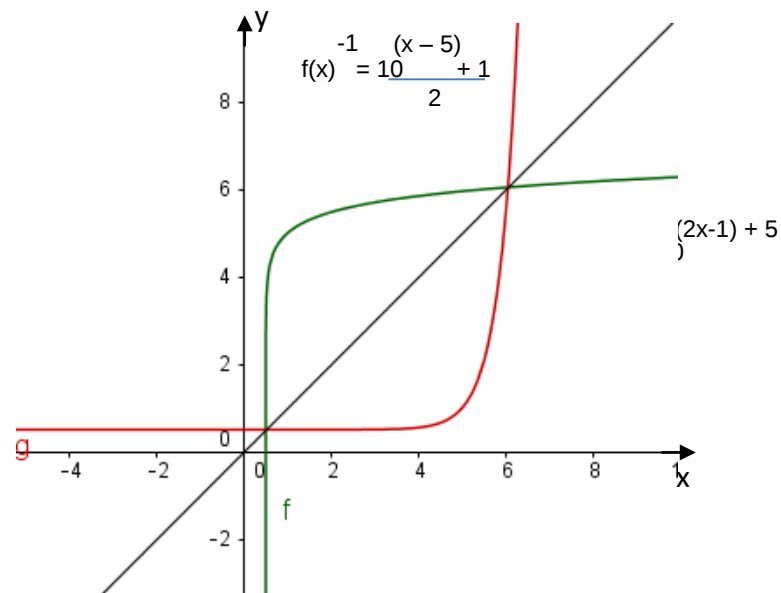
$$Df = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \right\}; \quad (1/2, \infty)$$

$$Rf = \left\{ y/y \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-\infty, \infty)$$

Para $f^{-1}(x)$: $\longrightarrow y > 1/2$

$$Df = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-\infty, \infty)$$

$$Df = \left\{ y/y \in \mathbb{R} \right\}; \quad (1/2, \infty)$$



Ejemplo.

Obtener la función inversa de $f(x) = 5^{(2+x)} - 3$.

Cambio de variables.

$x = 5^{(2+y)} - 3$ Despejando
a "y"

$5^{(2+y)} = x + 3$

$2 + y = \text{Log}_5(x + 3)$

$y = \text{Log}_5(x + 3) - 2$

$f^{-1}(x) = \text{Log}_5(x + 3) - 2$

Para $f(x)$: $\rightarrow y > -3$

Para $x=0$; $y = 22$

$Df = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-\infty, \infty)$

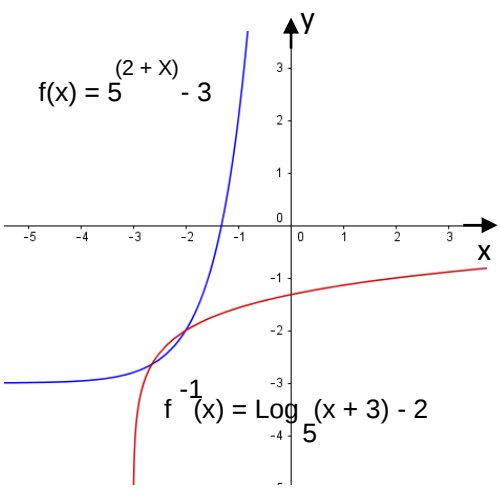
$Rf = \left\{ y/y \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-3, \infty)$

Para $f^{-1}(x)$: $\rightarrow x = -3$

Para $x=0$; $y = -1.32$

$Df = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-3, \infty)$

$Rf = \left\{ y/y \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-\infty, \infty)$



PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Producto :

$$\text{Log}_b (m \cdot n \cdot p) = \text{Log}_b (m) + \text{Log}_b (n) + \text{Log}_b (p)$$

Cociente :

$$\text{Log}_b \left[\frac{m}{n} \right] = \text{Log}_b (m) - \text{Log}_b (n)$$

Potencia :

$$\text{Log}_b [m^n] = n \text{Log}_b (m)$$

Raíz:

$$\text{Log}_b \left[\sqrt[n]{m} \right] = \frac{\text{Log}_b (m)}{n}$$

CAMBIO DE BASE

Por definición

$$\text{Log}_a x = m \iff a^m = x$$

De la definición

$$a^m = x$$

Aplicando logaritmo de base **b** a ambos lados

$$\text{Log}_b a^m = \text{Log}_b x$$

De acuerdo al logaritmo de una potencia

$$m \text{Log}_b a = \text{Log}_b x \quad \text{Despejando a m}$$

$$m = \frac{\text{Log}_b x}{\text{Log}_b a}$$

Sustituyendo a **m** queda:

$$\text{Log}_a x = \frac{\text{Log}_b x}{\text{Log}_b a}$$

Ejemplo

Calcular el $\log_7 2401 = x$

Solución

$$a = 7$$

$$x = 2401$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 7 \\ x = 2401 \end{array} \right\} \log_7 2401 = m = \frac{\text{Log}_{10} 2401}{\text{Log}_{10} 7} = \frac{3.3804}{0.8451} = 4$$

Comprobación

$$7^4 = 2401$$

Ejemplo

Calcular el $\log_2 2401 = x$

Solución

$$a = 2$$

$$x = 2401$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ x = 2401 \end{array} \right\} \log_2 2401 = m = \frac{\text{Log}_{10} 2401}{\text{Log}_{10} 2} = \frac{3.3804}{0.3010} = 11.23$$

Comprobación

$$2^{11.23} = 2401$$

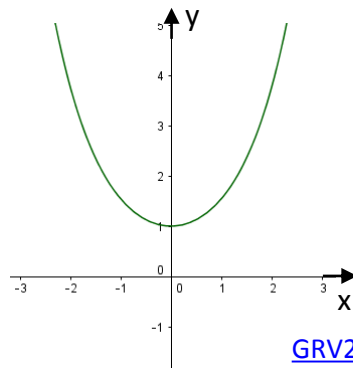
FUNCIONES HIPERBOLICAS DIRECTAS.

Este tipo de ecuaciones se relacionan con el número de Euler ($e = 2.7183$).

$$1. \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}\} ; [1, \infty)$$

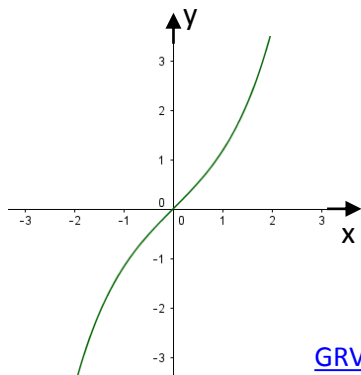


[GRV241](#)

$$2. \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

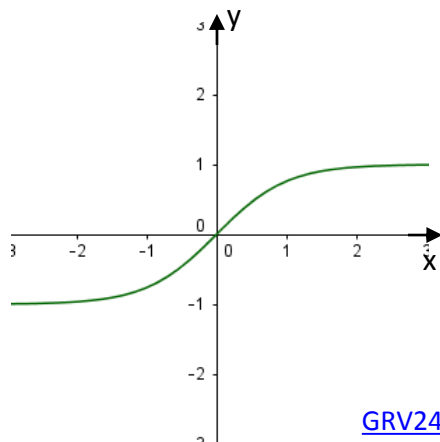


[GRV242](#)

$$3. \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}\} ; (-1, 1)$$



[GRV243](#)

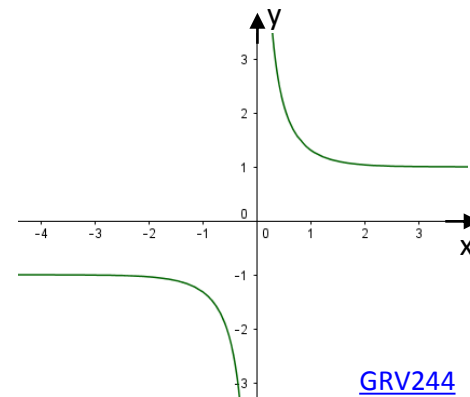
$$4. \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} ;$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}; x < -1, x > 1\} ;$$

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

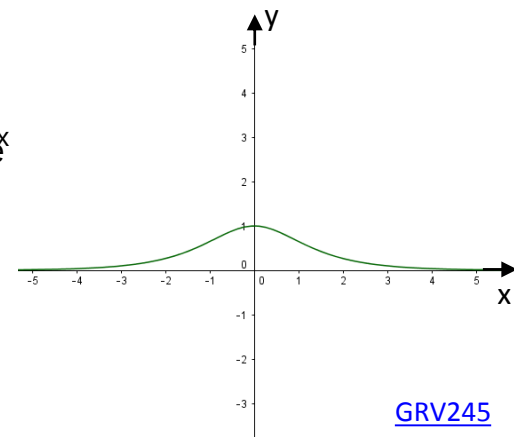


[GRV244](#)

$$5. \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}^+\} ; (0, 1]$$



[GRV245](#)

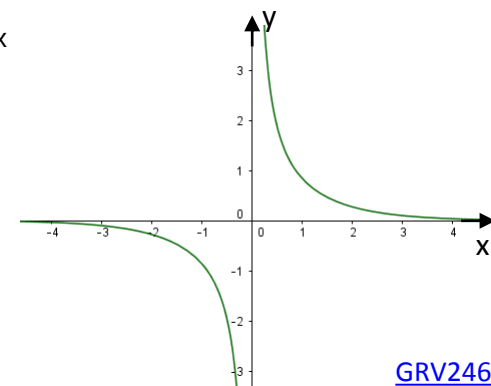
$$5. \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} ;$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}; y \neq 0\} ;$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



[GRV246](#)

IDENTIDADES HIPERBOLICAS

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tgh}^2 x = 1$
- $\cotgh^2 x - \operatorname{cosch}^2 x = 1$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\sinh a + \sinh b = 2 \sinh$
- $\cosh a + \cosh b = 2 \cosh$
- $2\sinh^2 = \cosh x - 1$
- $2\cosh^2 = \cosh x + 1$
- $(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh(nx) + \cosh(nx)$

FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS.

1. $y = \cosh^{-1}(x) = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \in \mathbb{R}, [1, \infty)$ [GRV343](#)
2. $y = \sinh^{-1}(x) = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in (-\infty, \infty)$ [GRV344](#)
3. $y = \tanh^{-1}(x) = \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{1+x}{1-x} \right] \quad -1 < x < 1$ [GRV345](#)
4. $y = \operatorname{coth}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{x+1}{x-1} \right]; |x| > 1; x < -1 \text{ o } 1 < x$ [GRV346](#)
5. $y = \operatorname{sech}^{-1}(x) = \operatorname{Ln} \left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right] \quad 0 < x \leq 1$ [GRV347](#)
6. $y = \operatorname{csch}^{-1}(x) = \operatorname{Ln} \left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right] \quad x \neq 0$ [GRV348](#)

Demostración de la siguiente identidad:

$$\sinh^{-1}(x) = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y = \sinh^{-1}(x) \quad \text{Despajando a } x$$

$$x = \sinh(y)$$

$$x = \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y - e^{-y}$$

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0 \quad \text{Multiplicando por } e^y$$

$$(e^y)^2 - 2x e^y - e^{-y} e^y = 0$$

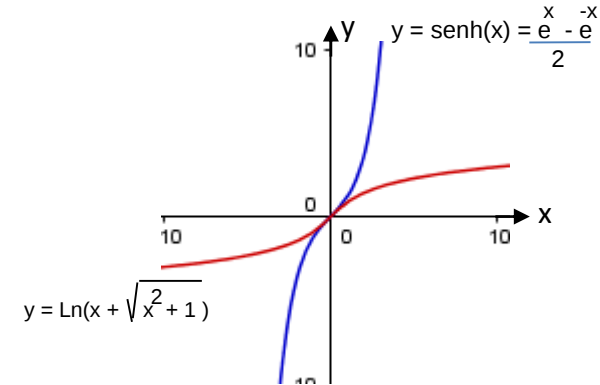
$$(e^y)^2 - 2x e^y - 1 = 0 \quad \text{Si } w = e^y$$

$$w^2 - 2xw - 1 = 0 \quad \text{Utilizando la cuadrática.}$$

$$w = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = \frac{2x \pm \sqrt{4(x^2 + 1)}}{2}$$

$$w = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{Si } e^y = w$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow y = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{l.q.q.d.}$$



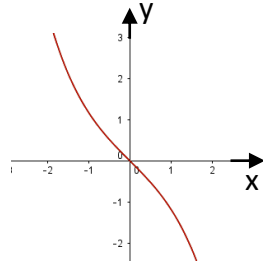
FUNCIONES HIPERBOLICAS.

1. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$

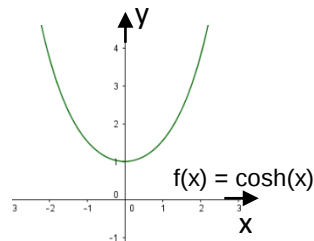
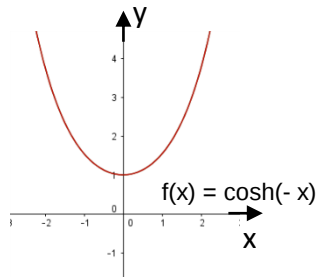
$$Rf = \{y/y \in \mathbb{R}\} ; (-\infty, \infty)$$



[GRV141](#)

2. $\cosh(-x) = \cosh(x)$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$



[GRV142](#)

Demostración de la siguiente identidad:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} - (e^{-x})^2)}{4} =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - ((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} - (e^{-x})^2)}{4} =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^{x-x} - (e^{-x})^2 - (e^x)^2 + 2e^{x-x} + (e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{2e^0 + 2e^0}{4} = \frac{2(1) + 2(1)}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{l.q.q.d.}$$

Ejemplo físico.

En una carretera que esta a 50 m. de altura pasa un vehículo a una velocidad de $v = 5$ m/s. por un punto ubicado a 10 m. antes del precipicio. Determinar el momento y distancia en que choca, así como trazar la trayectoria.

Datos.

$g \approx 10$ m/s. Por tratarse de una caída de un objeto.

$h_v = 50$ m.

$d_i = 10$ m.

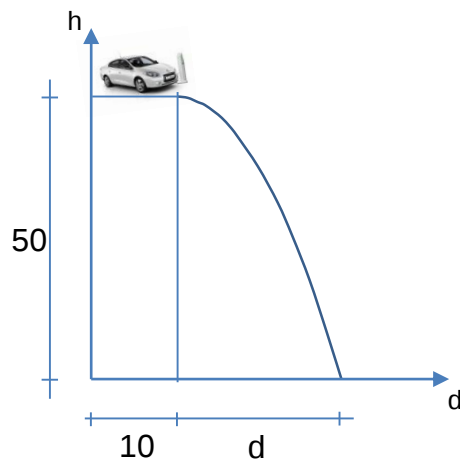
$t_i = 0$

$V = 5$ m/s.

Planteamiento de las ecuaciones.

$$dh = di + v t \dots\dots\dots (1)$$

$$h_v = h - \frac{g t^2}{2} \dots\dots\dots (2)$$



Sustituyendo datos

$$dh = 10 + 5 t \dots\dots\dots (3)$$

$$h_v = 50 - \frac{10 t^2}{2} = 50 - 5 t^2 \dots\dots\dots (4)$$

Para el momento del choque $h_v = 0$, por lo tanto, de ec. 4.

$$0 = 50 - 5 t^2 \longrightarrow t = 3.1623 \text{ s.}$$

Para el momento del choque $t = 3.1623$, por lo tanto, de ec. 3.

$$dh = 10 + 5 (3.1623) = 25.81 \text{ m.}$$

Para determinar la ecuación de la parábola de 3 y 4 se despeja t y se igualan o se sustituye.

$$t = \frac{dh - 10}{5} \qquad t^2 = \frac{-h_v + 50}{5}$$

$$\left[\frac{d - 10}{5} \right]^2 = \frac{-h + 50}{5} \longrightarrow (d - 10)^2 = 5(-h + 50)$$

$$(d - 10)^2 = -5(h + 50) \longrightarrow V(10, -50)$$

t	dh	h _v
0	10	50
1	15	45
2	20	30
3	25	5
3.162	25.8115	-0