MATRICES

Una matriz de **m**x**n** con elementos en $\mathbb{C}$ se define como un arreglo de la forma

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11},\ a_{12},\cdots,a_{mn}\ \in \mathbb{C}$ y $m,n\in\mathbb{Z}$

- **Igualdad de Matrices**

Sea $M_1=\left[a_{ij}\right]$ y $M_2=\left[b_{ij}\right]$ dos matrices del mismo orden, podemos decir que M_1 y M_2 son iguales, lo que se representamos con $M_1=M_2$, sí:

$$a_{ij}=b_{ij}\text{; para i=1, 2, … ,m y j=1, 2, … ,n}$$

- **Adición**

Sea $M_1=\left[a_{ij}\right]$ y $M_2=\left[b_{ij}\right]$ dos matrices del mismo orden, la adición de M_1+M_2 es una matriz $M_3=\left[c_{ij}\right]$, la operación está definida por:

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}\text{ ; para i=1, 2, … ,m y j=1, 2, … ,n}$$

Cumple con las siguientes propiedades:

- Asociatividad
$$M_1+\left(M_2+M_3\right)=\left(M_1+M_2\right)+M_3$$
- Conmutatividad
$$M_1+M_2=M_2+M_1$$
- Elemento Idéntico, existe una matriz 0 tal que $M_1+0=M_1$
- Elemento Neutro, existe una matriz M_1 tal que $M_1-M_1=0$

- **Sustracción**

Sea $M_1=\left[a_{ij}\right]$ y $M_2=\left[b_{ij}\right]$ dos matrices del mismo orden, la sustracción M_1-M_2 es una matriz $M_3=\left[c_{ij}\right]$, la operación está definida por:

$$M_1-M_2=M_1+\left(-M_2\right)$$

donde $a_{ij}-b_{ij}=c_{ij}$; para i=1, 2, … ,m y j=1, 2, … ,n

- **Multiplicación**

Sea $M_1 = \left[a_{ij}\right]$ de orden **m**x**n** y $M_2 = \left[b_{ij}\right]$ de orden **n**x**p**, la multiplicación de $M_1 * M_2$ es una matriz $M_3 = \left[c_{ij}\right]$ de orden **mxp**, la operación está definida por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ ; para } i=1, 2, \dots, m \text{ y } j=1, 2, \dots, n$$

Cumple con la siguiente propiedad:

- Asociatividad

$$M_1\left(M_2 M_3\right) = \left(M_1 M_2\right) M_3$$

donde M_1 es de orden **m**x**n**, M_2 de orden **n**x**p** y M_3 de orden **p**x**r**.

- Distributividad

Sea M_1 de orden **m**x**n**, M_2 de orden **n**x**p**, M_3 de orden **n**x**p**, M_4 de orden **m**x**n**, entones:

- ✓ $M_1\left(M_2 + M_3\right) = \left(M_1 M_2\right) + \left(M_1 M_3\right)$
- ✓ $\left(M_1 + M_4\right) M_2 = \left(M_1 M_2\right) + \left(M_4 M_2\right)$

- **Multiplicación por un escalar**

Sea $M_1 = \left[a_{ij}\right]$ una matriz de orden mxn con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, el producto por un escalar αM_1 es una matriz $M_2 = \left[b_{ij}\right]$ del mismo orden que M_1, la operación está definida por:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \text{; para } i=1, 2, \dots, m \text{ y } j=1, 2, \dots, n$$

Cumple con las siguientes propiedades:

- Asociatividad

$$\left(\alpha\beta\right) M_1 = \alpha\left(\beta M_1\right)$$

- Conmutatividad

$$\alpha M_1 = M_1 \alpha$$

- Distributividad

$$\left(\alpha + \beta\right) M_1 = \alpha M_1 + \beta M_1$$

$$\alpha\left(M_1 + M_2\right) = \alpha M_1 + \alpha M_2$$

- **Matriz Identidad**

Sea una matriz de orden **m**x**m** la cual podemos denominar cuadrada de la forma

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se llama matriz identidad a $I_m = \left[\delta_{ij}\right]$, tal que:

$$\delta_{ij} = 1,\ \text{si}\ \ i = j \qquad \text{y} \qquad \delta_{ij} = 0,\ \text{si}\ \ i \neq j$$

$$\left(\text{a}\ \delta_{ij}\ \ \text{se le conoce como delta de Kronec ker}\right)$$

Cumple con las siguientes propiedades:

- $I_m\, M = M$
- $M\, I_n = M$

donde A es una matriz de **m**x**n.**

- **Matriz Inversa**

Para una matriz M, es posible hallar una matrix X denominada inversa y se representa como M^{-1}, tal que:

$$XM = I \quad \text{ó} \quad I = MX$$

A las matrices para las cuales existe inversa se les conoce como no singulares.

Sea M_1 y M_2 dos matrices no singulares del mismo orden y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces cumple con lo siguiente:

- M_1^{-1} es única
- $\left(M_1^{-1}\right)^{-1} = M_1$
- $\left(M_1\, M_2\right)^{-1} = M_2^{-1}\, M_1^{-1}$
- $\left(\lambda M_1\right)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} M_1^{-1}$, si $\lambda \neq 0$
- $\left(M_1^{n}\right)^{-1} = \left(M_1^{-1}\right)^{n}$
- $\left(M_1^{T}\right)^{-1} = \left(M_1^{-1}\right)^{T}$
- $\left(M_1\right)^{-1} = \dfrac{1}{\det M_1}\left(\text{Adj}M_1\right)$ donde Adj A es la adjunta de A.

- **Matrices elementales**

Una matriz elemental es aquella que se obtiene aplicando a I_n una transformación elemental y se representa con:

- $I_n^{(i,j)}$ si se obtiene intercambiando los renglones i y j de I_n.
- $I_n^{k(i)}$ si se obtiene multiplicando por un número $I_n^{k(i)}$ el renglón i de I_n.
- $I_n^{k(i,j)}$ si se obtiene multiplicando por k el renglón i de I_n y sumando el resultado al renglón j.

Si A es una matriz de **mxn** con elementos en ℂ, entonces:

- $I_m^{(i,j)}A$ es la matriz que se obtiene intercambiando los renglones i y j de la matriz A.
- $I_m^{k(i)}A$ es la matriz que se obtiene multiplicando k el renglón i de la matriz A.
- $I_m^{k(i,j)}A$ es la matriz que se obtiene sumando al renglón j de la matriz A el renglón i multiplicado por k.

Las matrices elementales son no singulares.

El producto de matrices elementales es una matriz no singular.

- **Ecuaciones con matrices**

Las ecuaciones matriciales, pueden resolverse siguiendo el mismo procedimiento que se emplea para resolver las ecuaciones planteadas con números; esto es, tratando de "despejar" la incógnita en términos de los otros elementos que intervienen en la ecuación respetando el álgebra de matrices.

- **Tipos especiales de matrices cuadradas**

  - Diagonal principal, triángulo superior y triángulo inferior

En una matriz cuadrada pueden distinguirse tres "regiones":

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Triángulo Superior

Diagonal principal

Triángulo Inferior

La "diagonal principal", constituida por los elementos a_{ij} tales que $i = j$; es decir por los elementos de la forma a_{ii}.

El "triángulo superior", constituido por los elementos a_{ij} tales que $i < j$.

El "triángulo inferior", constituido por los elementos a_{ij} tales que $i > j$.

- **Traza**

Sea $A = \left[a_{ij} \right]$ una matriz de **nxn** con elementos en ℂ. Se llama traza de A, y se representa con $tr\ A$, al número.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Si A y B son dos matrices de **nxn** con elementos en ℂ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

- $tr(A+B) = (tr\ A) + (tr\ B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha (tr\ A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

- **Matrices triangulares**

Sea $A = \left[a_{ij} \right]$ una matriz de **nxn** con elementos en ℂ. Se dice que:

- A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$
- A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Si A y B son dos matrices triangulares superiores (inferiores) del mismo orden y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

- $A + B$ es triangular superior (inferior).
- αA es triangular superior (inferior).

- AB es triangular superior (inferior)

- **Matriz diagonal y matriz escalar**

Sea $A=\left[a_{ij}\right]$ una matriz de **nxn** con elementos en ℂ. Se dice que A es una matriz diagonal si $a_{ij}=0$ para $i=j$, y se representa con:

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$$

Si A y B son dos matrices diagonales tales que $\mathrm{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$ y $\mathrm{B}=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},...,B_{nn})$ y $\alpha\in\mathbb{C}$, entonces:

- $\mathrm{A+B}=\mathrm{diag}(a_{11}+b_{11},a_{22}+b_{22},...,a_{nn}+b_{nn})$
- $\alpha\mathrm{A}=\mathrm{diag}(\alpha a_{11},\alpha a_{22},...,\alpha a_{nn})$
- $\mathrm{AB}=\mathrm{diag}(a_{11}b_{11},a_{22}b_{22},...,a_{nn}b_{nn})$
- $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{diag}(\frac{1}{a_{11}},\frac{1}{a_{22}},...,\frac{1}{a_{nn}}),\ si\ \ A\ es\ no\ singular.$

- **Transposición**

Sea $A=\left[a_{ij}\right]$ una matriz de **mxn** con elementos en ℂ. Se llama transpuesta de A a la matriz de **nxm** $A^T=\left[c_{ij}\right]$ tal que

$$c_{ij}=a_{ji}$$

Si A y B son dos matrices con elementos en ℂ y $\alpha\in\mathbb{C}$, entonces:

- $(A^T)^T=A$
- $(\alpha A)^T=\alpha A^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T\ \ ,\ si\ \ A+B\ \ puede\ \ obtenerse$
- $(AB)^T=B^TA^T\ \ ,\ si\ \ AB\ \ puede\ \ obtenerse$

- **Matrices simétricas y antisimétricas**

Sea A una matriz de **nxn** con elementos en ℂ. Se dice que:

- A es simétrica si $A^T=A$
- A es antisimétrica si $A^T=-A$

Si A y B son dos matrices simétricas (antisimétricas) de **nxn** con elementos en ℂ y $\alpha\in\mathbb{C}$, entonces:

- A+B es simétrica (antisimétrica)
- α A es simétrica (antisimétrica)

Si A es una matriz de **nxn** con elementos en ℂ, entonces:

- $A + A^T$ es simétrica
- $A - A^T$ es antisimétrica

- **Conjugación**

Sea $A = \left[a_{ij} \right]$ una matriz de **mxn** con elementos en ℂ. Se llama conjugada de A a la matriz de **mxn** $\overline{A} = \left[c_{ij} \right]$ tal que

$$c_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Si A y B son dos matrices con elementos en ℂ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

- $\overline{\left(\overline{A} \right)} = A$
- $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$
- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ *, si A+B puede obtenerse*
- $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ *, si AB puede obtenerse*

- **Matrices reales e imaginarias**

Sea A una matriz de **mxn** con elementos en ℂ. Se dice que:

- A es real si $\overline{A} = A$
- A es imaginaria si $\overline{A} = -A$

Si A y B son dos matrices reales (imaginarias), entonces:

- $A + B$ es real , (imaginaria), si A+B puede obtenerse
- AB es real (real), si AB puede obtenerse

Si A es una matriz de **mxn** con elementos en ℂ, entonces:

- $A + \overline{A}$ es real
- $A - \overline{A}$ es imaginaria

- **Conjugación-transposición.**

Sea A una matriz de **mxn** con elementos en ℂ. Se llama conjugada-transpuesta de A, y se representa con A*, a la matriz de **nxm** definida por

$$A* = \left(\overline{A} \right)^T$$

Si A es una matriz de **mxn** con elementos en ℂ, entonces:

$$A* = \left(\overline{A}\right)^T = \left(\overline{A^T}\right)$$

Si A y B son dos matrices con elementos en ℂ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

- $(A*)* = A$
- $(\alpha A)* = \overline{\alpha} A*$
- $(A+B)* = A* + B*$, $si\ \ A+B\ \ puede\ \ obtenerse$
- $(AB)* = B*A*$, $si\ \ AB\ \ puede\ \ obtenerse$

- **Matrices hermitianas y antihermitianas**

Definición: Sean $A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$ con $a_{i\,j} \in \mathbb{C}$

i) A es hermitiana si $A = A*$
ii) A es antihermitiana si $A = -A*$
iii) Una matriz hermitiana se distingue porque los elementos de la diagonal principal de la matriz son reales y los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal son conjugados entre sí.

Propiedades:

1) $A+B$ es hermitiana, si *A* y *B* son hermitianas
2) $AA*$ es hermitiana
3) $A*A$ es hermitiana, $AA* \neq A*A$
4) $A+A*$ es hermitiana, si $A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$

Matriz antihermitiana

Una matriz antihermitiana se reconoce porque los elementos de la diagonal principal son imaginarios puros o ceros y los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal son iguales en la parte imaginaria y en la parte real difieren de signo.

Se puede obtener otra matriz antihermitiana de otra que no lo es, utilizando la propiedad A-A* es una matriz antihermitiana si A es cuadrada.

Matriz ortogonal

Si *B* es ortogonal entonces $B^{-1} = B^T$

El producto punto entre renglones es cero.

El producto punto entre columnas es cero.

El determinante de una matriz ortogonal es $\det \mathrm{A} = |1|$

Matriz Unitaria

$A^{*} = A^{-1}$ sí A es cuadrada con elementos en $\mathbb{C}$:

Propiedades

$A^{*}A = I$; entonces *A* es una matriz unitaria.

El determinante de una matriz unitaria es $\det A = |1|$

Potencia de una matriz

La matriz es involutoria si $A^2 = I$

Matriz idempotente de A si cumple que

$$A^2 = A$$

La matriz es nilpotente si $A^n = 0$

La matriz es periódica si $A^n = A$

Potencia de matrices

$A^0 = I_m$

$A^n = AA^{n-1}$

Determinantes

Hay diversos métodos para el cálculo del valor del determinante.

En este caso se utilizará el cálculo del valor del determinante por la regla de Sarrus

Recordando:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

El inconveniente es que si quisieramos calcular un determinante de una matriz de mayor orden ya no se podría efectuar, la regla de Sarrus únicamente se puede utilizar para determinantes de matrices de 2x2 y 3x3.

Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba

Método de cofactores

Utilizando el método de cofactores, que dice que si *B* $\left[b_{ij}\right]_{nxn}$ con elementos en ℂ, y $r \in \mathbb{Z}$, *r* es un número tal que $1 \le r \le n$, entonces:

1) $\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} b_{rj} M_{rj}$
2) $\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} b_{ir} M_{ir}$

Se elegirá aquel renglón o columna que tenga el mayor número de ceros posibles

Método de la matriz triángular

En este caso se utilizará el cálculo del valor del determinante de una matriz triangular, en que dicho valor se obtiene del producto de las entradas de la diagonal principal.

Utilizando transformaciones elementales reduciremos a la matriz hasta obtener la matriz triangular superior.

Propiedades de determinates

1.- $\left|C^T\right| = \left|C\right|$

2) $\left|C^{-1}\right| = \frac{1}{\left|C\right|}$, suponiendo que C^{-1} existe

3) det(CD)=det (C)det(D)
4) Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante son nulos, el valor del determinante es nulo.
5) Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales el determinante es cero.
6) Si todos los elementos de una fila o columna se multiplicand por un escalar, el valor del determinante queda multiplicado por dicho escalar.

7) $\left|\, 2C \,\right| = 2^{OrdenDeLaMatriz} \left|C\right| = 2^n \left|C\right|$

8) Si se intercambia un renglón por otro al determinante se le cambia el signo.

Si se intercambia una columna por otra, al determinante se le cambia el signo.
Se mantiene su valor absoluto.

9) La matriz A es una matriz triangular superior. Por lo que el teorema dice:

Si $C = \left[C_{ij}\right]$ es una matriz triangular (inferior) (superior), entonces el $detC$ = producto de las entradas de la diagonal principal, es decir, $\det C = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} C_{ii}$

10) Si a una fila o columna de un determinate se le suma el múltiplo de cualquier otra (fila o columna), el valor del determinate no varía.
11) Si det(A) =0, A es una matriz singular
12) Si det (A) $\neq$ 0, A es una matriz no singular

PROPIEDAD DE LA ADJUNTA:

A(Adj A)=(Adj A) A= det (A) I_n donde A es una matriz cuadrada de orden n.

Regla de Cramer

Sea n un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x1+a_{12}x2+\ldots+a_{1n}xn=b_1\\
&a_{21}\ x1+a_{22}\ x2+\ldots+a_{2n}\ xn=b2\\
&\ldots\\
&a_{n1}\ x1+a_{n2}\ x2+\ldots+a_{nn}\ xn=b_n
\end{aligned}
$$

Y sea $A=[a_{ij}]$ su matriz de coeficientes.

$$Si\ \ detA\ \neq 0$$

Entonces

$$x_k=\frac{detA_k}{detA}\ ,\ \ k=1,\ 2,\ \ldots,n$$

donde

$A_k=[c_{ij}]$ es tal que

$$C_{ij}=\begin{cases} a_{ij,}\ para\ \ j\neq k\\ bi,\ para\ \ j=k\end{cases}$$

Bibliografía:

SOLAR G. E., L. Speziale, Apuntes de Álgebra Lineal. 3ª. Edición, México, Limusa-Facultad de Ingeniería-UNAM, 1996

POOLE, D., Álgebra Lineal. 2ª. Edición, México, Thomson Editores, 2006.

GROSSMAN, S.I., J.J. Flores G., Álgebra Lineal. 7ª. Edición, México. Mc Graw Hill, 2012