Ejercicios de las Cónicas

Ejemplo 1

Obtener la ecuación cartesiana general de la circunferencia que coincide con el punto (4, 3) y cuyo centro coincide con el origen.

Solución:

Partiendo de la ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Donde: $x = 4$, $y = 3$, $h = 0$, $k = 0$

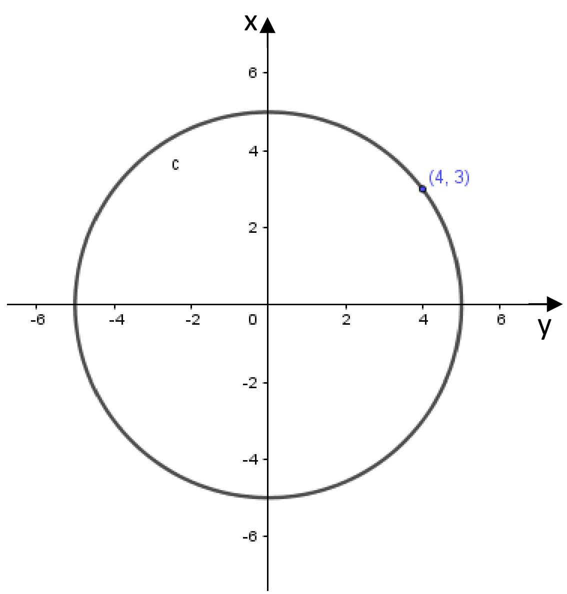
Sustituyendo:

$(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = r^2$ Desarrollando.

$16 + 9 = r^2 \Longrightarrow r = 25^2$

Volviendo a sustituir.

$x^2 + y^2 = 25$ Ecuación cartesiana general.



Ejemplo 2

Obtener la ecuación cartesiana general de la circunferencia que coincide con el punto (-1, 5) y cuyo centro es (5, -2).

Solución:

Partiendo de la ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Donde: $x = -1$, $y = 5$, $h = 5$, $k = -2$

Sustituyendo:

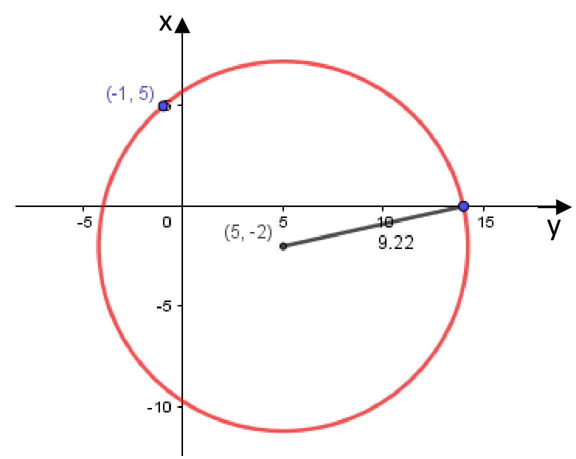
$(-1 - 5)^2 + (5 - (-2))^2 = r^2$ Desarrollando. $(-1 - 5)^2 + (5 + 2)^2 = r^2$

$r^2 = 85$ $r = 9.22$

Volviendo a sustituir. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 85$ ecuación ordinaria

$x^2 - 5x + 25 + y^2 + 4x + 4 = 85$

$x^2 - 10x + y^2 + 4y - 56 = 0$ Ecuación cartesiana general de la circunferencia



Ejemplo 3

Obtener la ecuación cartesiana general de la circunferencia para la cual uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos (5, -1) y (-3, 7).

Solución:

El centro de la circunferencia estará en el punto medio del segmento que une los dos puntos, por lo tanto las coordenadas del centro serian.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1 \qquad ; \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

C (h, k) = C (1, 3)

Para obtener el radio se utiliza: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Sustituyendo las coordenadas de cualquiera de los dos puntos y las del centro de la circunferencia:

$(5 - 1)^2 + (-1 - 3)^2 = r^2$ Desarrollando. $(4)^2 + (-4)^2 = r^2$

$r^2 = 32 \Longrightarrow r = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4 \times \sqrt{2}$

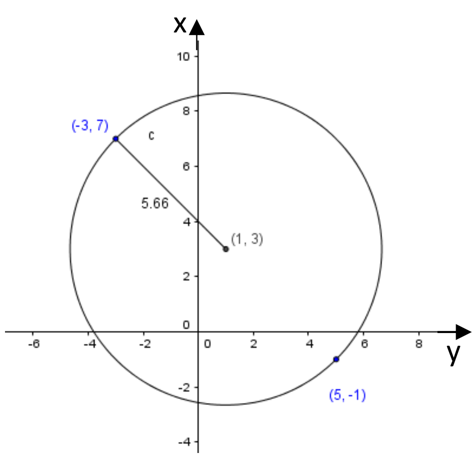
Obtención de la ecuación cartesiana general. sustituyendo.

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 = 32$

$x^2 - 2x + y^2 - 6y - 22 = 0$

Ecuación cartesiana general de la circunferencia



Ejemplo 4

Dada la ecuación cartesiana general de la circunferencia, obtener la ecuación ordinaria, las coordenadas del centro y su radio.

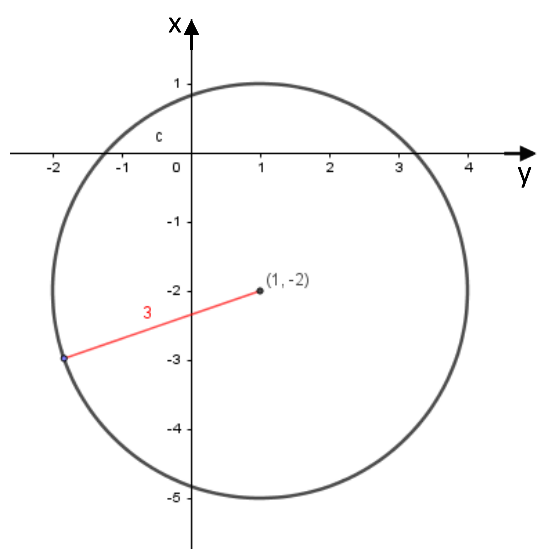
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Solución:

Agrupando términos y completando cuadrados:

$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0 \qquad x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4x + 4 - 4 - 4 = 0$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \Longrightarrow$ C (1, -2) $r = \sqrt{9} = 3$



Ejemplo 5

Obtener la ecuación cartesiana general de la elipse con centro en C (2, -3), cuyo semieje mayor es 5 y semieje menor es 4.

Solución:

Partiendo de la ecuación ordinaria de la elipse: $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

Sustituyendo:

$\dfrac{(x - 2)^2}{5^2} + \dfrac{(y + 3)^2}{4^2} = 1$ Como a > b representa una elipse horizontal.

Desarrollando.

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1 \Longrightarrow \frac{16(x - 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 1}{400}$$

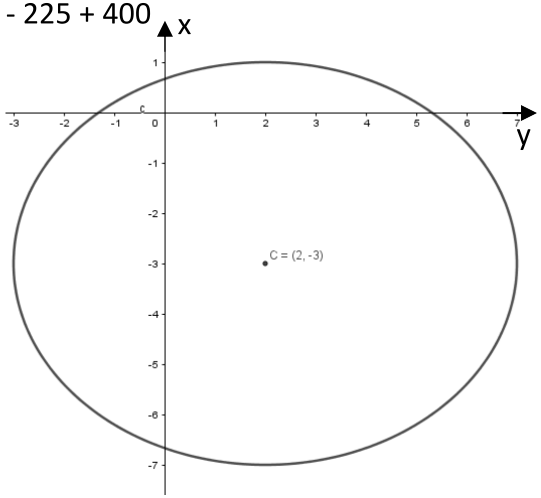
$$16(x - 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 400 \Longrightarrow 16(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 6y + 9) = 400$$

$$16x^2 - 64x + 64 + 25y^2 + 150y + 225 = 400$$

$$16x^2 - 64x + 25y^2 + 150y = - 64 - 225 + 400$$

$$16x^2 - 64x + 25y^2 + 150y = 111$$

$$16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y = 111$$



Ejemplo 6

Obtener los puntos de intersección entre la elipse y la recta, cuyas ecuaciones se muestran a continuación:

Solución:

$4x^2 + 5y^2 - 15y - 20 = 0$ **;** $4x - 3y + 5 = 0$

De la ecuación de la recta, despejamos "y" para sustituir en la ecuación cartesiana general de la elipse y obtener las coordenadas en "x" de los puntos .

$y = \dfrac{4x + 5}{3}$ Sustituyendo en le ecuación cartesiana general.

$$4x^2 + 5\left[\frac{4x + 5}{3}\right]^2 - 15\left[\frac{4x + 5}{3}\right] - 20 = 0$$

$$4x^2 + \frac{5}{9}(4x + 5)^2 - \frac{15}{3}(4x + 5) - 20 = 0$$

$$4x^2 + \frac{5}{9}(16x^2 + 40x + 25) - \frac{15}{3}(4x + 5) - 20 = 0$$

$$4x^2 + 8.89x^2 + 22.22x + 13.89 - 20x - 25 - 20 = 0$$

$12.89x^2 + 2.22x - 13.11 = 0$ Sustituyendo en:

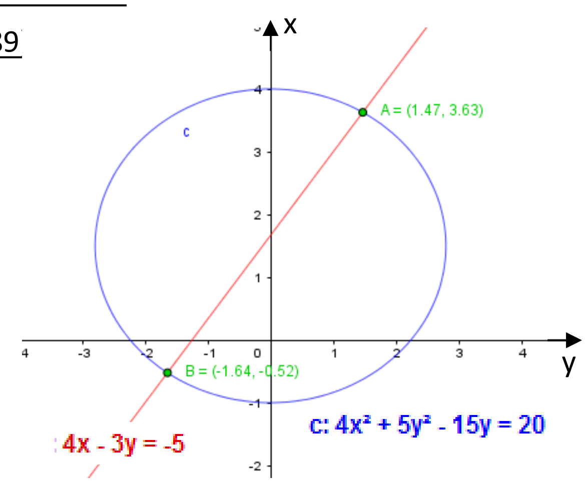
$$x = \frac{-2.22 \pm \sqrt{(2.22)^2 - 4(12.89}}{2(12.89)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2.22 \pm 40.11}{25.78} = \begin{cases} 1.47 \\ -1.64 \end{cases}$$

Sustituyendo en la recta:

$$y_1 = \frac{4(1.47) + 5}{3} = 3.63$$

$$y_2 = \frac{4(-1.64) + 5}{3} = -0.52$$



Ejemplo 7

Dada la siguiente ecuación cartesiana general, determinar si se trata de una elipse, en cuyo caso, obtener la ecuación ordinaria, su centro y sus semiejes mayor y menor.

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$$

Solución:

Partiendo de: $\mathbf{I = B^2 - 4AC} = 0 - 4(1)(4) = -16 < 0$

Por lo que la ecuación representa un tipo de **elipse** (un punto o ningún lugar geométrico).

Ordenando y completando cuadrados:

$$x^2 - 6x + 4y^2 + 16y + 21 = 0; \qquad x^2 - 6x + 4(y^2 + 4y) + 21 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) + 21 = 0$$ Desarrollando.

$$x^2 - 6x + 9 + 4(y^2 + 4y + 4) - 9 - 16 + 21 = 0; \qquad (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 - 4 = 0$$

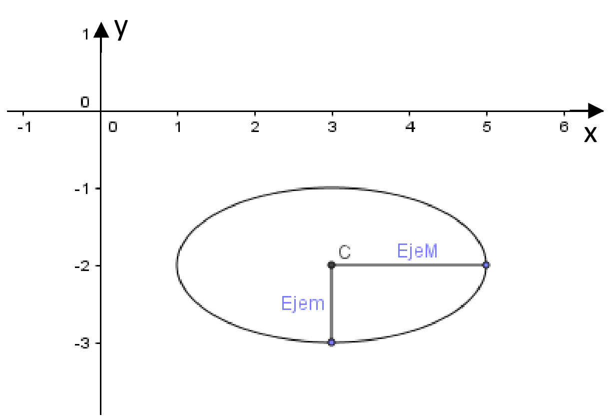
$$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 - 4 = 0; \qquad (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$$

Dividiendo entre 4.

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{4(y + 2)^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{1} = 1$$

$$\frac{(x - 3)^2}{2^2} + \frac{(y + 2)^2}{1^2} = 1$$



Ejemplo 8

Obtener la ecuación de la elipse de centro (4, -1), uno de los focos tiene por coordenadas $F_1(1.-1)$ y pasa por el punto (8, 0).

Solución:

Partiendo de la figura.

cálculo de F_2.

Como F_1, C y F_2 están sobre el eje mayor y es horizontal.

$\overline{F_1 C} = 4 - 1 = 3$; $\overline{C F_2} = 4 + 3 = 7$

$F_2(7, -1)$; Cálculo de L_1 y L_2

$$L_1 = \sqrt{(8 - 1)^2 + (0 + 1)^2} = 7.07$$

$$L_2 = \sqrt{(8 - 7)^2 + (0 + 1)^2} = 1.41$$

Definición: La suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos geométricos a dos puntos fijo F1 y F2 (focos) es constante.

$\overline{F1\,P} + \overline{P\,F2} = 7.07 + 1.,41 = 8.48$

$\overline{F1\,F2} = 7 - 1 = 6$

$$\overline{F2\,V2} = \frac{8.48 - 6}{2} = 1.24$$

$a = \overline{C\,V2} = 3 + 1.24 = 4.24$ Semieje mayor.

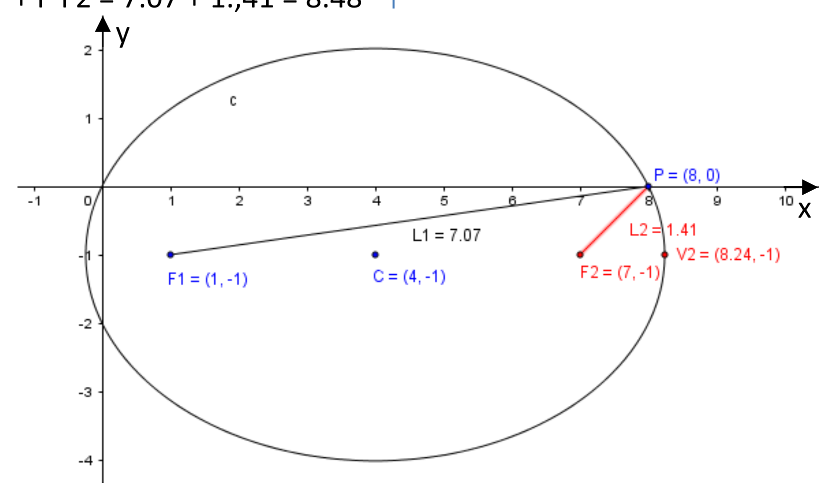
Sustituyendo en ecuación ordinaria.

$$\frac{(8 - 4)^2}{4.24^2} + \frac{(0 + 1)^2}{b^2} = 1; \qquad \frac{16}{17.98} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$b = 3.01$

Volviendo a sustituir:

$$\frac{(x - 4)^2}{4.24^2} + \frac{(y + 1)^2}{3.01^2} = 1$$



Ejemplo 9

Demostrar que la ecuación cartesiana general $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola y obtener las coordenadas del vértice.

Solución:

$\mathbf{I = b^2 - 4ac} = 0^2 - 4(4)(0) = 0$

Por lo que representa una parábola paralela al eje y.

$4(x^2 - 5x) = 24y - 97$

Dividiendo entre 4.

$$(x^2 - 5x) = 6y - \frac{97}{4}$$

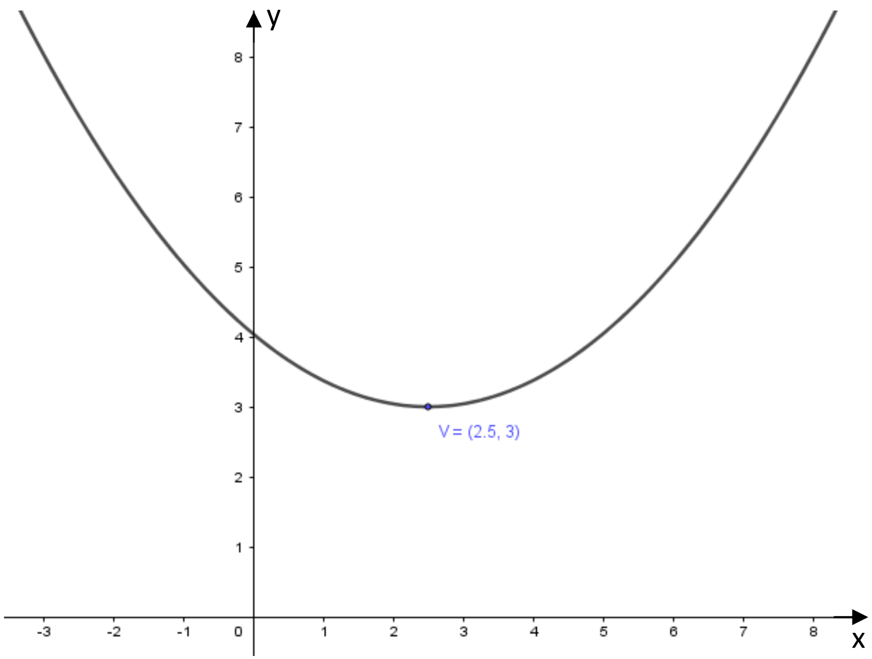
$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 6y - \frac{97}{4}$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 6y - \frac{97}{4} + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6y - \frac{72}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6y - 18$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 4\,\frac{3}{2}\,(y - 3)$$

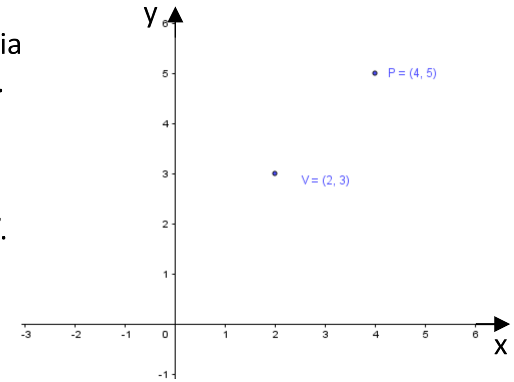


Ejemplo 10

Obtener la ecuación cartesiana general de la parábola de vértice (2, 3) y eje paralelo al eje coordenado "Y", y que pase por el punto (4,5).

Solución:

Partiendo de la ecuación ordinaria de la parábola paralela al eje "Y".



$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Sustituyendo y despejando a "p".

$$(4 - 2)^2 = 4p(5 - 3)$$

$$(2)^2 = 4p(2) \rightarrow 4 = 8p \rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo.

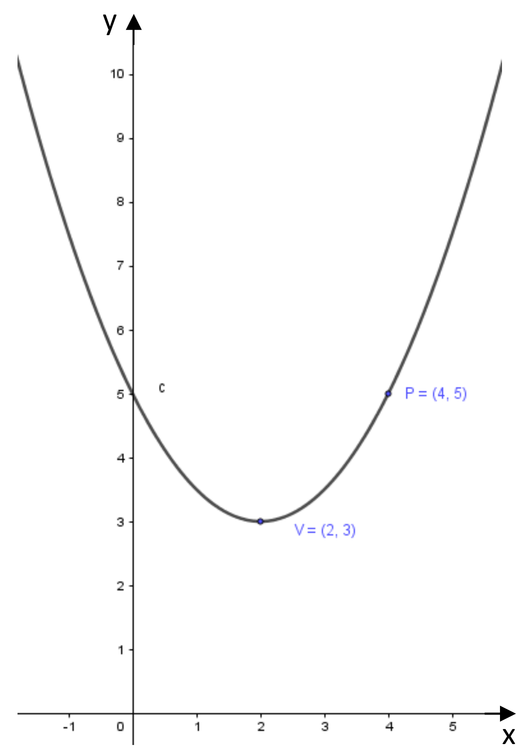
$$(x - 2)^2 = 4\frac{1}{2}(y - 3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2(y - 3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2y - 6$$

$$x^2 - 4x + 4 - 2y + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

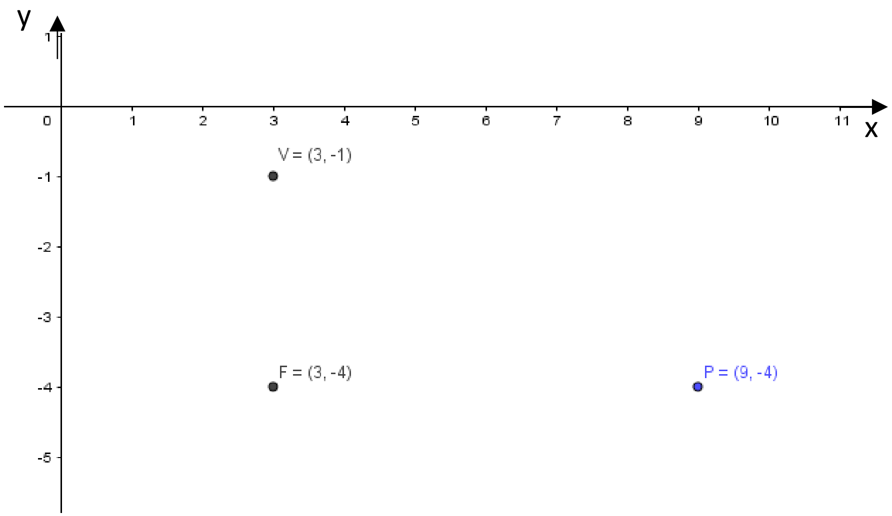


Ejemplo 11

Obtener la ecuación cartesiana general de la parábola de vértice (3, -1), foco (3,-4) y que pase por el punto (9, -4).

Solución:

Partiendo de la ubicación de las coordenadas del vértice, foco y punto, se determina que la parábola es paralela al eje “Y” y abre hacia abajo, por lo tanto la ecuación ordinaria es:.



$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ Sustituyendo.

$(9 - 3)^2 = 4p(-4 + 1)$

$36 = -12p$

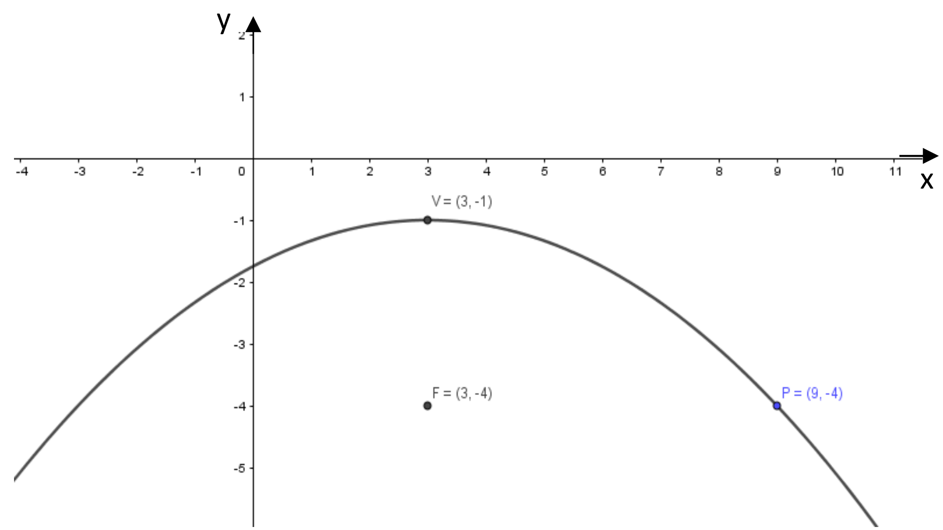
$P = -\frac{36}{12} = -3$

Sustituyendo de nueva cuenta.

$(x - 3)^2 = 4(-3)(y + 1)$

$x^2 - 6x + 9 = -12y - 12$

$x^2 - 6x + 12y + 21 = 0$



Ejemplo 12

Dada la ecuación general $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$, determinar si representa a una hipérbola, en su caso, obtener su ecuación ordinaria, sus coordenadas del centro, focos, y las ecuaciones de sus asíntotas.

Solución:

$\mathbf{I = b^2 - 4ac} = 0^2 - 4(9)(-16) = 576 > 0$ Por lo que representa una hipérbola.

Ordenando.

$$9x^2 - 18x - 16y^2 - 64y - 199 = 0 \Longrightarrow 9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) - 199 = 0$$

Completando cuadrados. $9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 16(y^2 + 4y + 4 - 4) - 199 = 0$

Ordenando. $9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) - 9 + 64 - 199 = 0$

Producto notable. $9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 - 144 = 0$

$9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$ Dividiendo entre 144. $\dfrac{9(x - 1)^2}{144} - \dfrac{16(y + 2)^2}{144} = \dfrac{144}{144}$

$$\frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1 \Longrightarrow \frac{(x - 1)^2}{4^2} - \frac{(y + 2)^2}{3^2} = 1$$

$c(1, -2)$; $V1 = 1 - 4 = -3$; $V2 = 1 + 4 = 5$; $C = \sqrt{16 + 9} = 5$

$f1 = 1 - 5 = 4$;

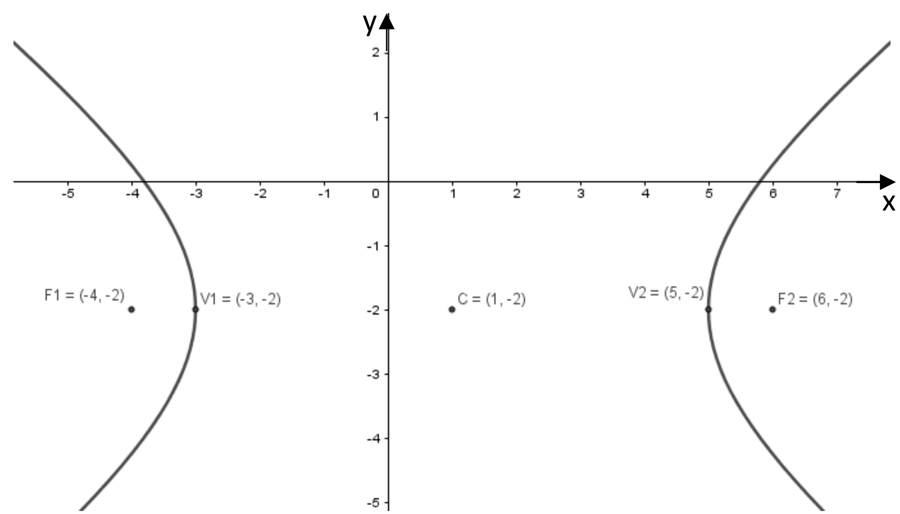
$f2 = 1 + 5 = 6$

Obtención de las asíntotas.

$y + k = \dfrac{b}{a}(x - h)$ y $y + k = -\dfrac{b}{a}(x - h)$

$y + 2 = \dfrac{3}{4}(x - 1) \Longrightarrow -3x + 4y = -11$

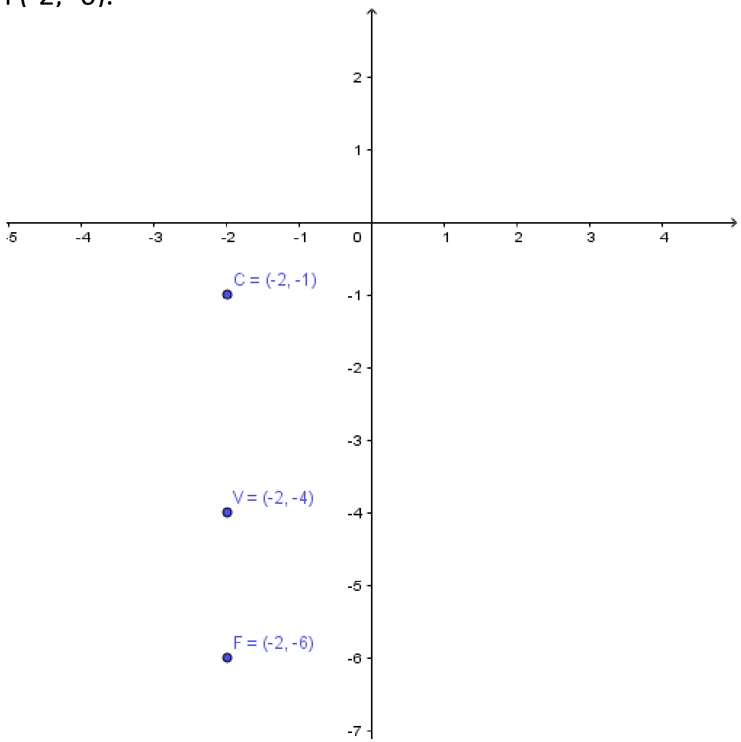
$y + 2 = -\dfrac{3}{4}(x - 1) \Longrightarrow 3x + 4y = -5$



Ejemplo 12

Determine las ecuaciones en forma ordinaria y general de la hipérbola que tiene uno de sus vértices en V (-2, -4), centro en C (-2, -1) y uno de sus focos en (-2, -6).

Solución:



De la figura se observa que los tres puntos son colineales formando un eje paralelo al eje Y, por lo tanto, la ecuación ordinaria es:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

De la figura:

$a = -1 - (-4) = 3$

$C = -1 - (-6) = 5$

Sustituyendo en:

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$

$5 = \sqrt{3^2 + b^2}$

Despejando b.

$b = 4$

Sustituyendo en ecuación ordinaria:

$$\frac{(y+1)^2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{4^2} = 1$$

Desarrollando.

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

$$\frac{16(y+1)^2 - 9(x+2)^2}{(9)(16)} = 1$$

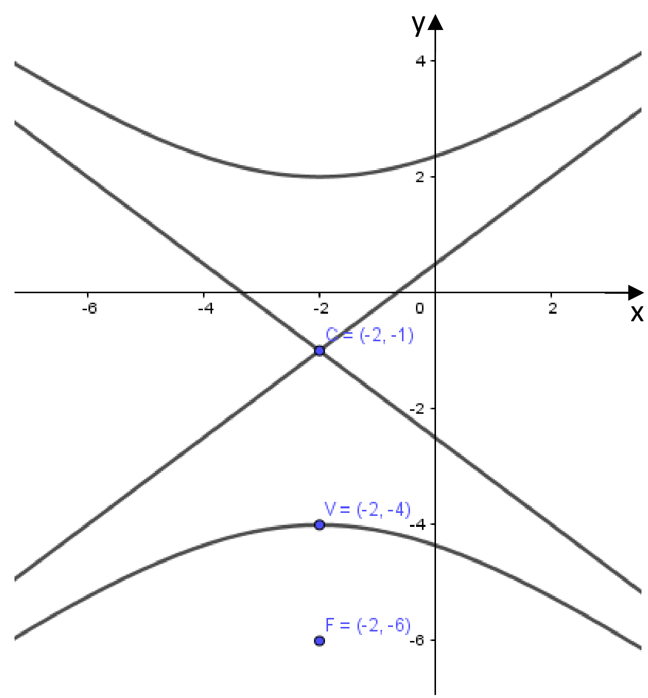
$$16(y+1)^2 - 9(x+2)^2 = 144$$

$$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 144$$

$$16y^2 + 32y + 16 - 9x^2 - 36x - 36 = 144$$

$$16y^2 + 32y - 9x^2 - 36x - 20 = 144$$

$$16y^2 + 32y - 9x^2 - 36x = 164$$



Hipérbola conjugada.- Tienen las mismas asíntotas y el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra

Hipérbola ordinaria.	Hipérbola ordinaria conjugada.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

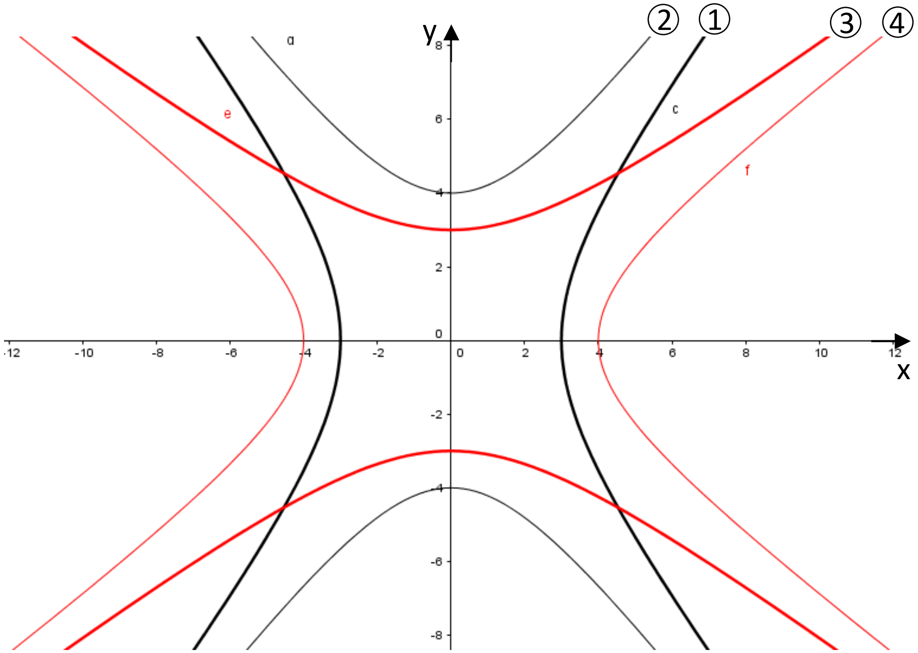
Ejemplo 13

$\frac{x^2}{9^2} - \frac{y^2}{16^2} = 1$ ------ ①

$\frac{y^2}{16^2} - \frac{x^2}{9^2} = 1$ ------ ②

$\frac{y^2}{9^2} - \frac{x^2}{16^2} = 1$ ------ ③

$\frac{x^2}{16^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1$ ------ ④

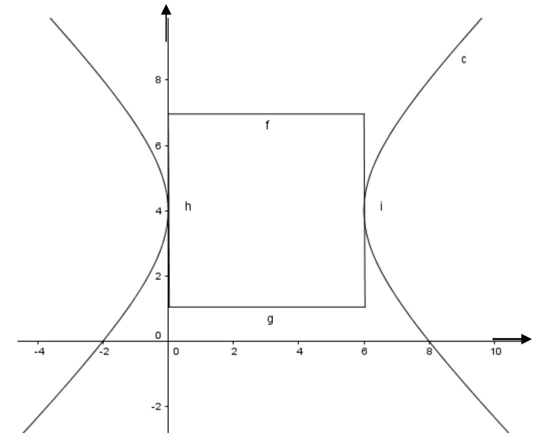


Hipérbolas equilátera o rectangular.- Sus ejes conjugado y transverso son de igual longitud. $b = a$

$(x - h)^2 - (y - k)^2 = a^2$

Ejemplo 14

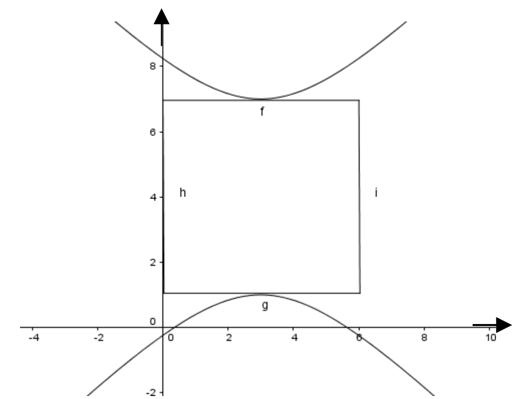
$(x - 3)^2 - (y - 4)^2 = 9^2$



$(y - k)^2 - (x - h)^2 = a^2$

Ejemplo 15

$(y - 4)^2 - (x - 3)^2 = 9^2$



Ejemplo 16

$xy = 1$