ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO

Un espacio vectorial con producto interno en el que se define al producto interno como una función $f : V \times V \to \mathbb{C}$ y cumple con

$a)\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = \overline{\left(\bar{v}\middle|\bar{u}\right)}$

$b)\left(\bar{u}\middle|\bar{v}+\bar{w}\right) = \left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) + \left(\bar{u}\middle|\bar{w}\right)$

$c)\left(\alpha\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = \alpha\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right)$

$d)\left(\bar{u}\middle|\bar{u}\right) > 0$, si $\bar{u} \neq \bar{0}$

Propiedades adicionales

$1)\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = 0$ si $\bar{u} = \bar{0}$

$2)\left(\bar{u}\middle|\alpha\bar{v}\right) = \bar{\alpha}\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right)$ si $\alpha \in \mathbb{C}$

$3)\left(\bar{u}\middle|\bar{u}\right) \in \mathbb{R}$

$4)\left(\bar{u}\middle|\bar{v}-\bar{w}\right) = \left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) - \left(\bar{u}\middle|\bar{w}\right)$

Notación

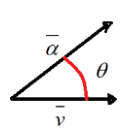
$< \quad , \quad >$ $\qquad$ $< \bullet \mid \bullet >$ $\qquad$ $< prefactor \mid postfactor >$

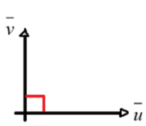
prefactor posfactor

El producto punto, es producto usual

$\bar{u} \bullet \bar{v} \in \mathbb{R}$

$\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\bullet\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$ $\qquad$ $\bar{u}\bullet\bar{v} = 0$ $\qquad$ $proy_{\bar{v}}\bar{u} = \dfrac{\bar{u}\bullet\bar{v}}{|\bar{v}|}\bullet\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ $\qquad$ $|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$





Determinar si la función definida por

$\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ $\qquad$ $\bar{u} = (x_1, x_2)$ $\qquad$ $\bar{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$

$1)\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = \left(\bar{v}\middle|\bar{u}\right)$ Como las componentes son reales

$\left(\bar{u}|\bar{v}\right)=\left(\bar{v}|\bar{u}\right)$ $\quad\left(x_1,x_2\right)|\left(y_1,y_2\right)=\left(y_1,y_2\right)|\left(x_1,x_2\right)$

$x_1y_1-x_2y_1-x_2y_1+3x_2y_2\neq y_1x_1-y_2x_1+3y_2x_2$ $\quad\therefore$ No cumple

Ejemplo, mismo ejercicio, pero con

$\bar{u}=\left(x_1,y_1\right)\quad\bar{v}=\left(x_2,y_2\right)\quad\left(x_1,y_1\right)|\left(x_2,y_2\right)=\left(x_2,y_2\right)|\left(x_1,y_1\right)$

$x_1x_2-y_1x_2-y_1x_2+3y_1y_2=x_2x_1-y_2x_1$ $\quad\therefore$ No cumple, no es producto

En el espacio vectorial $\quad w=\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{bmatrix}\quad\left[a,b\in\mathbb{R}\right]$

Sobre $\mathbb{R}$ se define la función $\quad\left(\bar{u}|\bar{v}\right)=ac-2ad-2bc+4bd$

$\bar{u}=\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{bmatrix}\qquad\bar{v}=\begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c\end{bmatrix}$

1) $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} c & d \\ c+d & 2c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} c & d \\ c+d & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{pmatrix}$

$ac-2ad-2bc+4bd=ca-2bc-2da+4db$ $\quad\therefore$ Sí cumple

2) $\left(\bar{u}|\bar{v}+\bar{w}\right)=\left(\bar{u}|\bar{v}\right)+\left(\bar{u}|\bar{w}\right)$

$\bar{w}=\begin{bmatrix} f & g \\ f+g & f\end{bmatrix}\qquad\bar{v}+\bar{w}=\begin{bmatrix} c+f & d+g \\ c+d+f+g & 2\left(c+f\right)\end{bmatrix}$

$\left(\bar{u}|\bar{v}+\bar{w}\right)$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix} c+f & d+g \\ c+d+f+g & 2\left(c+f\right)\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix} f & g \\ f+g & 2f\end{bmatrix}\right)$$

$a\left(c+f\right)-2a\left(d+g\right)-2b\left(c+f\right)+4b\left(d+g\right)=ac-2ad-2bc+4bd+af+2ag-2bf+4bg$ $\quad\therefore$ Sí cumple

3) $\left(\alpha\bar{u}|\bar{v}\right)=\alpha\left(\bar{u}|\bar{v}\right)\qquad\begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b \\ \alpha a+\alpha b & 2\alpha a\end{bmatrix}$

4) $\left(\bar{u}|\bar{u}\right)>0\qquad\left[\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 2a\end{pmatrix}\right]$

$$a^2-2ab-2ab+4b^2 \qquad (a-2b)^2$$
$$a^2-4ab+4b^2 \qquad (a-2b)^2=0$$
$$(a-2b)(a-2b)>0 \qquad a=2b$$

Como $a=2b$ entonces no cumple w no es producto interno

Módulo, NORMA o tamaño de un vector

La norma de un vector con producto interno se define por $\|\bar{u}\|=\sqrt{\bar{u}|\bar{u}}$; $\quad \|\bar{u}\|>0$

Propiedades:

1) $\|\bar{u}\|\geq 0 \qquad \bar{u}=\bar{0}$
2) $\|\bar{u}\|=0$, si y sólo si $\bar{u}=\bar{0}$
3) $\|\alpha\bar{u}\|=|\alpha|\|\bar{u}\| \qquad si\ \ \alpha\in\mathbb{C} \Rightarrow \ |\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$; $\quad \alpha=a+bi$; Si $\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow|\alpha|=\alpha$
4) $\|\bar{u}+\bar{v}\|\leq\|\bar{u}\|+\|\bar{v}\|$

Ejercicio: Obtener la norma del vector $\bar{u}=2x^2-x-1$ si $(p|q)=\sum_{i=0}^{2}a_ib_i$

$$p=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2 \qquad q=b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2$$

Sol:

$$(p|q)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$$

$$\|\bar{u}\|=\sqrt{\bar{u}|\bar{u}} \qquad (\bar{u}|\bar{u})=(2x^2-x-1|2x^2-x-1)$$
$$=\sqrt{(-1)(-1)+(-1)(-1)+2(2)}$$
$$=\sqrt{1+1+4}$$
$$\|\bar{u}\|=\sqrt{6}=\sqrt{6}$$

Ejercicios teóricos:

A) Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno en V es una función
   1) $f:V\to V$
   2) $f:V\times V\to\mathbb{C}$
   3) $f:V\times V\to V$
   4) $f:V\to\mathbb{C}$

B) La función definida por $(\bar{x}|\bar{y})=x_1y_2+x_2y_2$, donde $\bar{x}=(x_1,x_2)$ $\quad \bar{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

   El axioma que no satisface para ser producto interno interno

   $1)(\bar{x}|\bar{y})=(\bar{y}|\bar{x})$ $\qquad 3)(\bar{x}|\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}|\bar{y})+(\bar{x}|\bar{z})$

   $2)(\alpha\bar{x}|\bar{y})=\alpha(\bar{x}|\bar{y})$ $\qquad 4)(\bar{x}|\bar{x})>0$

$1)\left(\overline{x}\middle|\overline{y}\right)=\left(\overline{y}\middle|\overline{x}\right)$

$\left((x_1,x_2)\middle|(y_1,y_2)\right)=(y_1,y_2)\middle|(x_1,x_2)$

$x_1y_2+x_2y_1=y_1x_2+y_2x_1$

Sí cumple

$3)\left(\overline{x}\middle|\overline{y}+\overline{z}\right)=\left(\overline{x}\middle|\overline{y}\right)+\left(\overline{x}\middle|\overline{z}\right)$

$\overline{y}+\overline{z}(y_1,y_2)+\overline{z_1}\overline{z_2}=y_1+z_1,y_2+z_2$

$\left((x_1,x_2)\middle|y_1+z_1,y_2+z_2\right)=\left(x_1,x_2\middle|y_1,y_2\right)+\left(x_1,x_2\right)$

$x_1(y_2+z_2)+x_2(y_1+z_1)=x_1y_2+x_2y_1+x_1z_2+x_2z_1$

Sí cumple

$2)\left(\alpha\overline{x}\middle|\overline{y}\right)=\alpha\left(\overline{x}\middle|\overline{y}\right)$

$\left(\alpha(x_1,x_2)\middle|(y_1,y_2)\right)=\alpha\left((x_1,x_2)\middle|(y_1,y_2)\right)$

$\left((\alpha x_1,\alpha x_2)\middle|(y_1,y_2)\right)=\alpha(x_1y_2+x_2y_1)$

$\alpha x_1y_2+\alpha x_2y_2=\alpha x_1y_2+\alpha x_2y_1$

Sí cumple

$4)\left(\overline{x}\middle|\overline{x}\right)>0$

$\left|(x_1,x_1)\middle|(x_1,x_1)\right|>0$

$x_1^2+x_1^2$

$2x_1^2>0$

No cumple ya que puede ser que $x_1=-x_2$

C) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno $(\ \bullet\ |\ \bullet\ )$ para todo $\overline{u}\in V$ se tiene que $\left(\overline{u}\middle|\overline{u}\right)$ pertenece a

1) Los reales
2) V
3) $\mathbb{C}$
4) $V\times V$

D) Si $\left(\overline{v}\middle|-i\overline{u}\right)=-3$ y $\left(\overline{v}\middle|\overline{v}+\overline{u}\right)=3+3i$ entonces la norma del valor $\overline{v}$ es:

1) 3 2) $\sqrt{3}$ 3) 45 4) $\sqrt{45}$

$\left\|\overline{v}\right\|=\sqrt{\overline{v}|\overline{v}}\rightarrow\left(\overline{v}\middle|\overline{v}\right)=\sqrt{\left\|\overline{v}\right\|}$

$\left(\overline{v}\middle|\overline{v}+\overline{u}\right)=\left(\overline{v}\middle|\overline{v}\right)+\left(\overline{v}\middle|\overline{u}\right)=3+3i$

$\left(\overline{v}\middle|\overline{v}\right)=3+3i-\left(\overline{v}\middle|\overline{u}\right)$

$\left(\overline{v}\middle|\overline{v}\right)=3+3i-3i$

$\left(\overline{v}\middle|\overline{v}\right)=3$

$\left\|\overline{v}\right\|=3$

$\left\|\overline{v}\right\|=\sqrt{\overline{v}|\overline{v}}=\sqrt{3}$

$\left(\overline{v}\middle|-i\overline{u}\right)=2\left(\overline{v}\middle|\overline{u}\right)$

$=i\left(\overline{v}\middle|\overline{u}\right)$

$i\left(\overline{v}\middle|\overline{u}\right)=\frac{-3}{i}$

$=\frac{-3(-i)}{i(-i)}=\frac{3i}{i}$

E) Sean A un espacio vectorial con producto interno $\mathbb{C}$ y $\overline{w}\in A$, $\left\|3i\overline{w}\right\|$ es

1) $3i\left\|\overline{w}\right\|$

2) $-3i\left\|\overline{w}\right\|$

3) $3\left\|\overline{w}\right\|$

4) $9\left\|\overline{w}\right\|$

$\left\|\alpha\overline{w}\right\|=|\alpha|\left\|\overline{w}\right\|$

$|0+3i|=\sqrt{0^2+3^2}=3$

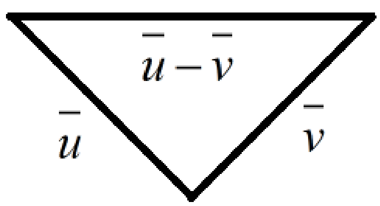
$\left\|3i\overline{w}\right\|=3\left\|\overline{w}\right\|$

Ejercicio:

Si $\left\|\bar{u}\right\| = 4$ entonces $(\bar{u}\,|\,2i\bar{u})$ es:

$$= -2i(\bar{u}|\bar{u}) = -2i\left\|\bar{u}\right\|^2 = -2i(16) = -32i$$

DISTANCIA ENTRE VECTORES



Sea $\bar{u},\bar{v} \in V$ dos vectores que pertenecen a un espacio vectorial v con producto interno $\left(\bar{u}|\bar{v}\right)$

$$\left\|\bar{u}-\bar{v}\right\| = \left\|\bar{v}-\bar{u}\right\|$$
$$\left\|\bar{u}-\bar{v}\right\| = \sqrt{\left(\bar{u}-\bar{v}\right)\left|\left(\bar{u}-\bar{v}\right)\right.}$$

Propiedades

$1)\, d\left(\bar{u},\bar{v}\right) = \left\|\bar{u}-\bar{v}\right\| \geq 0$ $\quad 2)\, d\left(\bar{u},\bar{v}\right) = d\left(\bar{v},\bar{u}\right)$

$3)\, d\left(\bar{u},\bar{v}\right) = 0$ si $\bar{u} = \bar{v}$ $\quad 4)\, d\left(\bar{u},\bar{w}\right) \leq d\left(\bar{u},\bar{v}\right) + d\left(\bar{u},\bar{w}\right)$

Eje. Sea el espacio vectorial $P_2 = \left\{ax^2+bx+c \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ con producto interno definido por $\left(p|q\right) = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i$

$\forall\ \ p\left(x\right) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ \ q\left(x\right) = b_2x^2 + b_1x + b_0$

Determinar la distancia entre los polinomios $p\left(x\right) = 2x^2 - x + 1,\quad q\left(x\right) = -x^2 + 2x$

Sol.

$$\bar{p}-\bar{q} = 2x^2 - x + 1 - \left(-x^2+2x\right) = 3x^2 - 3x + 1$$
$$\left\|\bar{p}-\bar{q}\right\| = \sqrt{\left(p-q\right)\left|\left(p-q\right)\right.} = \sqrt{3x^2-3x+1\,|\,3x^2-3x+1}$$

$$\left(p|q\right) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$
$$= (1)(1) + (-3)(-3) + (3)(3) = 1+9+9 = 19$$

$$\left\|\bar{p}-\bar{q}\right\| = \sqrt{19}$$

Ejemplo.

En el espacio vectorial

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d,e,f,g,h,i\in\mathbb{R}\right\}$$

Se define el producto interno interno $\left(A|B\right)=tr\left(B^T A\right);\forall A,B$

Considerando las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule

a) La norma de la matriz A b) La distancia entre A y B

$$\left\|\bar{u}\right\|=\sqrt{\bar{u}|\bar{u}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\Bigg|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=Tr\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=10$$

$$\left\|A\right\|=\sqrt{10}$$

b) $\left\|A-B\right\|=\sqrt{\left(A-B\right)|\left(A-B\right)}$ $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left\|A-B\right\|=\sqrt{tr\left[\left(A-B\right)^T\left(A-B\right)\right]}$

$$Tr\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=16 \qquad \left\|A-B\right\|=\sqrt{16}=4$$

Vector Unitario

Sea $u\in V$ sobre un producto interno dado

$\bar{u}_u=\dfrac{1}{\left\|\bar{u}\right\|}$ $\bar{u}_u=\dfrac{1}{\sqrt{\bar{u}|\bar{u}}}$ La norma siempre vale 1

Ángulo entre vectores

Sea $\overline{u},\overline{v}\in V$ sobre un campo $\mathbb{C}$ con producto interno $<\overline{u},\overline{v}>$

$$\cos\theta=\frac{\mathbb{R}e\left(\overline{u}\middle|\overline{v}\right)}{\left\|\overline{u}\right\|\left\|\overline{v}\right\|}\qquad \mathbb{R}e=\text{parte real}\qquad \begin{array}{l}-1\le\cos\theta\le 1\\ 0^\circ\le\theta\le 180^\circ\end{array}$$

Ejemplo

En el espacio vectorial $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$ el producto interno $\left(A\middle|B\right)=tr\left(AB^T\right),\forall A,B\in M$

Para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

Obtener el ángulo entre A y B

$$tr\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix}=14;\qquad \left(A\middle|B\right)=14;\qquad \left\|A\right\|=\sqrt{A|A}=\sqrt{11}$$

$$\left(A\middle|A\right)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=11$$

$$\left\|B\right\|=\sqrt{B|B}=\sqrt{23};\qquad \left(B\middle|B\right)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 21\end{pmatrix}=23$$

$$\cos\theta=\frac{14}{\left(\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{23}\right)}=\frac{14}{\sqrt{11(23)}};\qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{11(23)}}\right)=28^\circ$$

Ejemplo:

Sea F el espacio vectorial de funciones reales de variante real continuas en el intervalo $[0,2\pi]$ y el producto interno

$$\left(f\,|g\right)=\int_0^{2\pi}f\left(x\right)g\left(x\right)dx;\forall f,g\in P$$

Calcule el ángulo entre los vectores $f\left(x\right)=3$ y $g\left(x\right)=\cos x$, $\forall x\in[0,2\pi]$

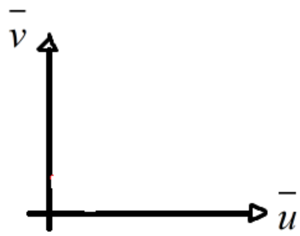
$$\left(f\,|g\right)=\int_0^{2\pi}3\cos x dx=3\int_0^{2\pi}\cos x dx=3senx\Big|_0^{2\pi}\quad=3sen\left(2\pi\right)-3\left(0\right)=0$$

$$\cos\theta=\frac{0}{\left\|\overline{u}\right\|\left\|\overline{v}\right\|}\qquad \cos\theta=0\qquad \theta=ang\cos\left(0\right)=90^\circ$$

Significa que son perpendiculars los vectores.

Ortogonalidad entre vectores

Sean $\bar{u},\bar{v}\in V$ sobre un campo K con producto interno $(.|.)$; $(\bar{u}|\bar{v})=0$



El ángulo entre dichos vectores es 90 grados.

Ejemplo:
En el espacio vectorial F de funciones continuas reales en el intervalo $[-\pi,\pi]$ se define el producto interno

$$(f|g)=\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)g(t)dt;\forall f,g\in\mathbb{R}$$

Determine si las funciones $f(t)=sent$ y $g(t)=\cos t$ son ortogonales

$$(f|g)=\int_{-\pi}^{\pi} sent\cos tdt \qquad u=sent \qquad \frac{du}{dx}=\cos t$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} udt = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = \left.\frac{sen^2t}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{sen^2\pi}{2}+\frac{sen^2\pi}{2}=0$$ f y g son ortogonales

Ejemplo:

Sea el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c|a,b,c\in\mathbb{R}\}$ con producto interno $(p|q)=\int_0^1 p(x)q(x)dx$

Obtener el conjunto de valores de $k\in\mathbb{R}$ que hacen que el conjunto $G=\{2x^2-x,kx^2-1\}$ sea ortogonal

$$(p|q)=(2x^2-x|kx^2-1)=0 \qquad \int_0^1(2kx^4-2x^2-kx^3-x)dx=$$

$$2k\int_0^1 x^4dx-2\int x^2dx-k\int x^3dx-\int xdx$$

$$\left.\frac{2kx^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-\frac{kx^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right|_0^1= \frac{2k(1)^5}{5}-\frac{2(1)^3}{3}-\frac{k(1)^4}{4}-\frac{(1)^2}{2}=0 \quad ; \quad \frac{2k}{5}-\frac{2}{3}-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{8k-5k}{20}=\frac{3}{20}k \qquad \frac{3}{20}k-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=0 \qquad \frac{3}{20}k=\frac{2}{3}-\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{20}k=\frac{1}{6} \qquad \frac{7}{6}\left(\frac{20}{3}\right)=k$$

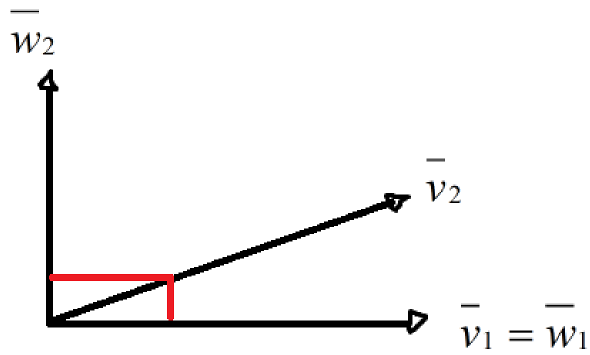
$k=\frac{20}{18}$; $\qquad k=\frac{10}{9}$

Proceso de Gram-Schmidt

Sea $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\ldots,\overline{v}_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V

$Bor=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3,\ldots,\overline{w}_n\}$ una base ortogonal obtenida con base a B

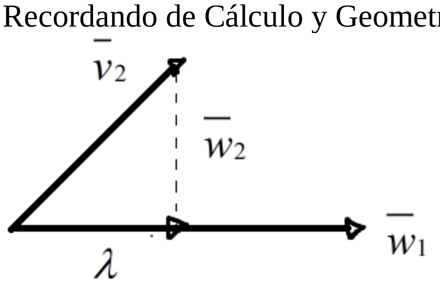
$$\overline{V}_2=\overline{w}_2+\overline{w}_1$$
$$\overline{W}_2=\overline{v}_2+\overline{w}_1$$
$$\left(\overline{w}_1\middle|\overline{w}_2\right)=0$$
$$\left(\overline{w}_1\middle|\overline{v}_2-\overline{w}_1\right)=0$$
$$\left(\overline{w}_1\middle|\overline{v}_2\right)-\left(\overline{w}_1\middle|\lambda\overline{w}_1\right)=0$$
$$\left(\overline{w}_1\middle|\overline{v}_2\right)-\lambda\left(\overline{w}_1\middle|\overline{w}_1\right)=0$$



$$\lambda=\frac{\left(\overline{w}_1\middle|\overline{v}_2\right)}{\left(\overline{w}_1\middle|\overline{w}_1\right)}\quad;\qquad \overline{w}_2=\overline{v}_2-\lambda\overline{w}_1\qquad \overline{w}_2=\overline{v}_2-\frac{\left(\overline{v}_2\middle|\overline{w}_1\right)}{\left(\overline{w}_1\middle|\overline{w}_1\right)}\overline{w}_1\qquad \overline{w}_2=\overline{v}_2-proy_{\overline{w}1}\overline{v}_2$$

$$\overline{w}_3=\overline{v}_3-\frac{\left(\overline{v}_3\middle|\overline{w}_1\right)}{\left(\overline{w}_1\middle|\overline{w}_1\right)}\overline{w}_1-\frac{\left(\overline{v}_3\middle|\overline{w}_2\right)}{\left(\overline{w}_2\middle|\overline{w}_2\right)}\overline{w}_2\quad;\qquad w_k=\overline{V}_n-\sum_{k=1}^{n-1}proy_{w_k}\overline{v}_n$$

Recordando de Cálculo y Geometría Analítica



$$\lambda\overline{w}_1+\overline{w}_2=\overline{v}_2$$
$$\overline{w}_2=\overline{v}_2-\lambda\overline{w}_1$$
$$\frac{\overline{a}\bullet\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}\;\frac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}$$

$$\frac{\left(\overline{a}\bullet\overline{b}\right)\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|^2}$$
$$\frac{\left(\overline{a}\bullet\overline{b}\right)\overline{b}}{\left(\sqrt{\overline{b}\bullet\overline{b}}\right)^2}=comp.Vect_{\,\overline{b}}\;\overline{a}$$

Base ortonormal

Sea $B_{or}=\{\overline{w_1},\overline{w_2},\overline{w_3},\ldots\ldots,\overline{w_n}\}$ Una base ortogonal; $\quad B_{oN}=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3},\ldots,\overline{e_n}\}$ una base ortonormal

$$\left\{\frac{\overline{w_1}}{\left\|\overline{w_1}\right\|},\frac{\overline{w_2}}{\left\|\overline{w_2}\right\|},\frac{\overline{w_3}}{\left\|\overline{w_3}\right\|},\ldots\ldots,\frac{\overline{w_n}}{\left\|\overline{w_n}\right\|}\right\}$$

Vectores unitarios, que son ortogonales entre sí y tienen norma igual a 1

Ejercicio

En el espacio vectorial complejo se define al producto interno usual

$$\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right)=\overline{u_1}\,\overline{v_1}+\overline{u_2}\,\overline{v_2} \qquad \forall\ \bar{u}=\left(\overline{u_2},\overline{u_2}\right), \qquad \bar{v}=\left(\overline{v_2}\,,\overline{v_2}\right)\in\mathbb{R}^2$$

Donde $a\in\mathbb{C}$ para el conjunto $D=\{(1+i,2i),(3+i,a)\}$

Determinar el valor de a para D sea una base ortogonal. Además, a partir de la base D, obtener una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$:

$$(1+i,2i)\middle|\left(3+i,\bar{a}\right)=0$$

$$(1+i)(3+i)+2i\left(\bar{a}\right)=0$$

$$(1+i)(3+i)+2i\bar{a}=0$$

$$4+2i++2i\bar{a}=0$$

$$\bar{a}=\frac{-4-2i}{2i}$$

$$\bar{a}=\frac{-4-2i}{2i}\left(\frac{-2i}{-2i}\right)$$

$$\bar{a}=\frac{-4+8i}{4}$$

$$\bar{a}=-1+2i$$

$$\bar{\bar{a}}=-1-2i$$

$$D_{of}=\{(1+i,2i),(3+i,-1-2i)\}$$

$$\|(1+i,2i)\|=\sqrt{(1+i,2i)|(1+i,2i)}$$

$$\sqrt{(1+i)\left(\overline{1+i}\right)+2i\left(\overline{2i}\right)}=\sqrt{2+2^2}=\sqrt{6}$$

$$\sqrt{9+1+1+4}=\sqrt{15}$$

$$\|3+i,-1-2i\|=\sqrt{(3+i,-1-2i)|(3+i,-1-2i)}$$

$$\sqrt{(3+i)(3-i)+(-1-2i)(-1+2i)}$$

$$D_{ON}=\left\{\frac{(1+i,2i)}{\sqrt{6}},\frac{3+i,-1-2i}{\sqrt{15}}\right\}$$

Ejemplo:

Obtener una base ortonormal a partir de $M=\{(0,-1,1),(1,-2,-1),(1,-1,0)\}$ con respecto al producto interno usual

$$\overline{w_1}=(0,-1,1) \qquad \overline{w_2}=(0,2,-1)-proy_{\overline{w_1}}\overline{v_2} \qquad \overline{w_2}=(1,-2,-1)-\frac{(1,-2,-1)|(0,-1,1)}{(0,-1,1)|(0,-1,1)}(0,-1,1)$$

$$\overline{w_2}=(1,2,-1)+\frac{3}{2}(0,-1,1); \qquad \overline{w_2}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad ; \qquad \overline{w_3}=(1,-1,0)-proy_{\overline{w_1}}\overline{v_3}-proy_{\overline{w_2}}\overline{v_3}$$

$$proy_{\overline{w_1}}\overline{v_3}=\frac{\overline{v_3}|\overline{w_1}}{\left(\overline{w_1}|\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}\ ; \qquad \frac{(1,-1,0)|(0,-1,1)}{((1,-1,1)|(0,-1,1))}(0,-2,1)=\frac{1}{2}(0,-1,1)=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$proy_{\overline{W_2}}\overline{v_3}=\frac{(1,-1,0)\left|\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right.}{\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left|\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right.}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\quad ;\qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$$

$$\overline{w_3}=(1,-1,0)-\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\qquad \overline{w_3}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Base ortogonal $\left\{(0,-1,1)-\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$

Ahora la base ortonormal:

$$\|(0,-1,1)\|=\sqrt{(0,-1,1)|(0,-1,1)}=\sqrt{2}\quad ;\qquad \left\|\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|=\sqrt{\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left|\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right.}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\left|\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right.}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$B_{ON}=\left\{\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}},\frac{\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}},\frac{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right\};\qquad B_{ON}=\left\{\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}{2}\right\}$$

COMPLEMENTO ORTOGONAL

Sea V un espacio vectorial sobre un campo V_1 y sea W un subespacio de V

$$W^{+}=\left\{\bar{v}\in V\left|\left(\bar{v}|\bar{w}\right)=0,\bar{w}\in W,\bar{v}\in V\right.\right\}$$

Ejercicio

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ una de cuyas bases es $B=\{(1,1,-2),(1,-1,0)\}$ determinar una base y la dimensión del complemento ortogonal de W

$\bar{v}\in\mathbb{R}^3$; $\quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

$(1,1,-2)|(a,b,c)=0 \quad \Rightarrow \quad a+b-2c=0$

$(1,-1,0)|(a,b,c)=0 \quad \Rightarrow \quad a-b=0 \quad ; \quad b+b-2c=0 \quad ; \quad 2b-2c=0 \quad ; \quad -2c=-2b$

$c=b$

$W^{+}=\{(1,1,1)\}$; $\quad dimW^{+}=1$

Comprobando:

$(1,1,-2)|(1,1,1)=1+1-2=0$; $\quad (1,-1,0)|(1,1,1)=1-1+0=0$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, y sea $\bar{v} \in V$ un vector W un subespacio de V

$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots\ldots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de W; $\bar{w} = \sum_{l=1}^{n} (\bar{v}|\bar{e}_i)\bar{e}_i$

TEOREMA DE PROYECCIÓN

$$\|\bar{v} - \bar{w}\| \leq \|\bar{v} - \overline{w^+}\|$$

Ejercicio

Sean M el espacio vectorial de matrices cuadradas de ordenadas con elementos reales y el producto interno en M definido por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = ax + by + cz + dw \qquad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in W \quad \text{y sea}$$

$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & ab \\ b & a \end{bmatrix} \Bigg| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de M

a) Determine el complemento ortogonal $W^+ \in W$

b) Exprese al vector $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ como la suma de $B + C$ donde $B \in W$ y $C \in W^+$

c) Obtenga la proyección del vecor A sobre W^+

a) $B_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$; $\begin{matrix} -b + c = 0 \\ c = b \end{matrix}$

$a + b + d = 0$

$$\begin{matrix} -b + c = 0 \\ c = b \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a + b + d = 0 \\ a = -c - d \end{matrix} \quad ; \quad W^+ = \left\{ \begin{pmatrix} -c - d & c \\ c & d \end{pmatrix} \Bigg| c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a - b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c - d & c \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} a - c - d = 3 \\ a - b + c = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b + c = 2 \\ a + d = 0 \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -5d = 10 \\ c - 4 = -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} d = -2 \\ c = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -b + 2 - 2 = -1 \\ b = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a - 1 + 2 = 3 \\ a = 2 \end{matrix}$$

c) $B=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$; $\left(W_1^+ \middle| W_2^+\right)\neq 0$; $1\neq 0$; $W_1^+=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$W_2^+=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \qquad W_2^+=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 1\\ 3 & \\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ;$$

$$W_2^+=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$B_{OR}=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{3}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{9}{9}}=\sqrt{\frac{15}{9}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$B_{ON}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\frac{3}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\right\}$$

Vector más próximo a A es $\sum_{l=1}^{n}\left(A\middle|\overline{e}_i\right)\overline{e}_i$

$$\left[\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\middle|\frac{3}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$\left[\frac{3}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}(1)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\left(\frac{-10}{3}\right)\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1.- Sea el espacio vectorial real $P_2=\left\{ax^2+bx+c \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$ con el producto interno definido por

$\left(\overline{p}\middle|\overline{q}\right)=\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \;\; \forall p,q\in P_2$ y sean W un subespacio de P_2 y $B_{ON}=\{x,2\}$ una base ortonormal de W.

a) Determinar una base ortonormal de W
b) Obtener una proyección de $\overline{p}=x^2-2x$ sobre W.

Solución:

a) $\|x\|=\left(\int_{-1}^{1} xxdx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\|2\|=\left(\int_{-1}^{1} 4dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{8}}$; $B_{ON}=\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}x,\frac{2}{\sqrt{8}}\right\}$

$$proy_{\overline{w}}\overline{p}=(\overline{p}|\hat{e}_1)\hat{e}_1+(\overline{p}|\hat{e}_2)\hat{e}_2$$

$$= proy_{w}\overline{p}=(x^2-2x\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x\right.)\sqrt{\frac{3}{2}}x+(x^2-2x\left|\frac{2}{\sqrt{8}}\right.)\frac{2}{\sqrt{8}}$$

$$= proy_{\overline{w}}\overline{p} = \frac{3}{2}(x^2-2x|x)x + (x^2-2x)\frac{1}{2}$$

$$= proy_{\overline{w}}\overline{p} = \frac{3}{2}(\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x\right)xdx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x\right)dx$$

$$= proy_{\overline{w}}\overline{p} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right)_{-1}^{1} x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{-4}{3}x + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= -2x + \frac{1}{3}$$

2.- Sea $P_2 = \left\{ax^2+bx+c \ \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 de coeficientes reales y sea W un subespacio de P_2 y $B_{OR} = \left\{1, 3x^2+3x-2\right\}$ una base ortogonal de W con el producto interno en P_2 definido por $\left(\overline{p}|\overline{q}\right) = \sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \ \forall p,q \in P_2$

Obtener el polinomio $\overline{r} \in W$ cuya distancia a $\overline{f} = 2x^2+x+3$ respecto al producto interno dado sea mínima.

$$B_{OR} = \left\{1, 3x^2+3x-2\right\}$$

$$\|1\| = \left(1|1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1|1\right)^{\frac{1}{2}} = (1)(1)+(1)(1)+(1)(1) = \sqrt{3}$$

$$\left\|3x^2+3x-2\right\| = \left(3x^2+3x-2 \middle| 3x^2+3x-2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (-2)(-2)+(-2)(-2)+(4)(4) = \sqrt{24}$$

$$B_{ON} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{24}}\left(3x^2+3x-2\right)\right\} = \left\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\right\}$$

$$proy_w\overline{f} = (\overline{f}|\hat{e}_1)\hat{e}_1 + (\overline{f}|\hat{e}_2)\hat{e}_2$$

$$proy_w\overline{f} = ((2x^2+x+3)\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + ((2x^2+x+3)\left|\frac{1}{\sqrt{24}}\left(3x^2+3x-2\right)\right)\frac{1}{\sqrt{24}}\left(3x^2+3x-2\right)$$

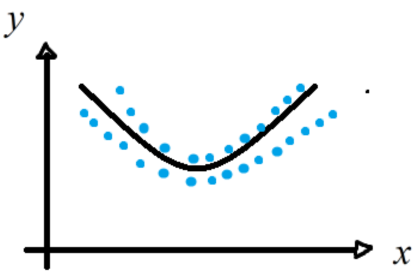
$$proy_w \overline{f} = \frac{1}{4}(4(1)+3(1)+6(1))1+\frac{1}{24}\left(4(-2)+3(-2)+6(4)\right)(3x^2+3x-2)=$$

$$\frac{13}{3}+\frac{5}{12}(3x^2+3x-2)=\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{21}{6}$$

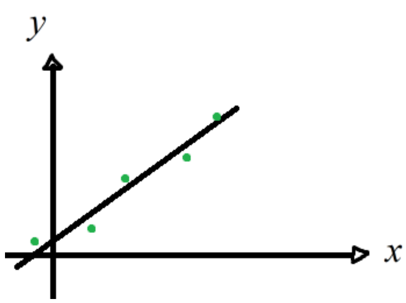
MÍNIMOS CUADRADOS

$$y = mx+b$$

$$y = c^{+}$$



Ejemplo



$$A=(-1,0)$$
$$B=(2,1)$$
$$C=(3,2)$$

$$y = mx+b$$
$$o = m(-1)+b$$
$$1 = m(2)+b$$
$$2 = m(3)+b$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$Ax = B$$
$$\left(A^T A\right)x = A^T B$$
$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{12}{26}x+\frac{10}{26} \qquad y = \frac{6}{13}x+\frac{5}{13}$$

Ejemplo:

Determinar la recta $y = mx+b$ por mínimos cuadrados que mejor se ajuste a $A(-2,3)$, $B(0,0)$ y $C(4,4)$

$$3 = -2m+b$$
$$0 = 0m+b$$
$$4 = 4m+b$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -8 & -2 & 10 \\ 24 & 20 & 12 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -8 & -2 & 10 \\ 24 & 20 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 16 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{16}{56}x + \frac{120}{56} \qquad y = \frac{8}{28}x + \frac{60}{28} \qquad y = \frac{4}{14}x + \frac{30}{14} \qquad y = \frac{2}{7}x + \frac{15}{7}$$

Ejemplo:

Determinar la ecuación y= mx + b de la línea de mínimos cuadrados que se ajuste mejor a los puntos (2,1), (5,2); (/,3), (8,3)

Se puede escribir este sistema como X= $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Para la solución de mínimos cuadrados de X β =y, se obtienen las ecuaciones normales

$$X^T X \beta = X^T y$$

Para la solución de este ejemplo se tiene:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 142 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 57 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales son:

$$\begin{bmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 57 \end{bmatrix}$$

De donde $\begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 142 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}$

Por lo que la recta de mínimos cuadrados es: $y = \frac{5}{14}x + \frac{2}{7}$