EJERCICIOS DE MATRICES Y DETERMINANTES

Obtención de la *Matriz Inversa* utilizando transformaciones elementales.

Recordando: Una matriz elemental se puede obtener aplicando el siguiente procedimiento

1. Se pueden intercambiar filas (renglones).
2. Se puede multiplicar a todo un renglón por un número distinto de cero.
3. Se puede multiplicar el renglón *i* por un escalar diferente de cero y el resultado, se puede adicionar al renglón *j.*

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Obtener la matriz no singular, si existe de A.

<u>Solución</u>

Ampliamos la matriz *A* añadiéndole la matriz identidad del lado derecho.

$$(A \mid I)$$

El objetivo será que a través del método de transformaciones elementales se obtendrá la matriz inversa del lado izquierdo y la matriz identidad del lado derecho, es decir:

$$(I \mid A^{-1})$$

De la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ampliamos dicha matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos al primer renglón por $\left(\frac{1}{2}\right)$, quedando la matriz ampliada:

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim R_1(1) + R_2 \rightarrow R_2$$

El renglón 1 se multiplica por 1 y se añade al renglón 2 remplazando el renglón dos.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim R_1(2) + R_2 \rightarrow R_2$$

$$1x + (-2) = 0$$
$$x = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim R_2(-1) + R_3 \rightarrow R_3$$

$$5x + (5) = 0$$
$$5x = -5$$
$$x = \frac{-5}{5}$$
$$x = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora escalonamos de abajo hacia arriba a la matriz.

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & | & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim R_3(-5) + R_2 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & | & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim R_3(-3) + R_1 \to R_1$$

Ahora el renglón

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & | & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim R_2\left(\frac{1}{5}\right) \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & | & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim R_2(-2) + R_1 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

La matriz inversa es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5}-\frac{8}{5}+\frac{6}{2} & \frac{6}{5}+\frac{24}{5}-6 & -2-4+6 \\ \frac{1}{5}-\frac{6}{5}+\frac{2}{2} & \frac{-3}{5}+\frac{18}{5}-2 & 1-3+2 \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}+0 & \frac{-6}{5}+\frac{6}{5}+0 & 2-1+0 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Obtener la matriz inversa de *A* utilizando el método de la matriz adjunta.

Solución

Recordando la definición:

Sea $B=\left[b_{ij}\right]_{nxn}$ con elementos en $\mathbb{C}$, y sea C_{ij} el cofactor del elemento b_{ij} .

La adjunta de B a la matriz es $Adj\ B = \left[m_{ij} \right]$, donde $mij = cij$.
La matriz inversa de B es:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} AdjB$$

El determinante de B se puede calcular a través de diversos métodos.

Se recomienda utilizar el teorema:

Si *B* es una matriz de *nxn* con elementos en ℂ, entonces:
$B\ adjB = (adjB)B = \ (detB)In$

Para nuestro ejemplo, calcularemos cada uno de los cofactores de todos los elementos de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cada cofactor se calcula seleccionando virtualmente columna y renglón asociado, por ejemplo, para el cofactor C_{11}

$C_{11} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ donde M_{ij} es el menor asociado (es el determinante que se obtiene suprimiendo en *A* el renglón *i*, y la columna *j*), y, $(-1)^{i+j}$ se le conoce como característica del elemento.

Así la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El cofactor C_{11} es:

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$C_{11} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{11} = +(0(3) - (2)(-1))$$

$$C_{11} = 0 + 2$$

$$C_{11} = 2$$

Ahora el cofactor C_{12} es:

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^3 (2(3) - (-1)(-1))$$

$$C_{12} = -(6-1)$$

$$C_{12} = -5$$

Calculamos el cofactor C_{13} es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = +(2(2) - (0)(-1))$$

$$C_{13} = 4$$

Ahora el cofactor C_{21} es:

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -((-1)(3) - 2(4))$$

$$C_{21} = -(-3-8)$$

$$C_{21} = 11$$

Calculando el cofactor C_{22} es:

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +((3)(3)-(-1)(4))$$

$$C_{22} = 9+4$$

$$C_{22} = 13$$

Ahora el cofactor C_{23} es:

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6-1)$$

$$C_{23} = (-1)(5)$$

$$C_{23} = -5$$

Calculando el cofactor C_{31} es:

De $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-0(4))$$

$$C_{31} = 1$$

El cofactor C_{32} es:

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(3(-1)-2(4))$$

$$C_{32} = -(-3-8) = 11$$

$$C_{32} = 11$$

Ahora el cofactor C_{33}

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (3(0) - 2(-1))$$

$$C_{33} = 0 + 2$$

$$C_{33} = 2$$

La matriz adjunta es:

$$AdjA = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 11 & 13 & -5 \\ 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}^T$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -5 & 13 & 11 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora múltiplicando la matriz A del ejemplo con la adjunta obtenida.

$$A\ AdjA = \ detA\ I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -5 & 13 & 11 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = 27I$$

Por lo que el determinante de la matriz *A* es **27**.

Finalmente la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -5 & 13 & 11 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sean las matrices:

$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ y $D=\begin{bmatrix}x & 6\\ z & y\end{bmatrix}$

Obtener los valores de x, y e z$\in\mathbb{R}$ que satisfacen a la ecuación $D=AB+C$

<u>Solución</u>

Multiplicamos

$AB=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ *A* es una matriz de 2x3 y B es una matriz de 3x2. AB es una matriz de 2 x 2.

$$AB=\begin{bmatrix}2(2)+3(1)+(-1)(-1) & 2(0)+3(2)+(-1)(0)\\ 3(2)+(-1)(1)+2(-1) & 3(0)+(-1)(2)+2(0)\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

Ahora sumamos elemento a elemento de las matrices AB+C:

$$AB+C=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento de la ecuación:

D= AB+C

$$\begin{bmatrix}x & 6\\ z & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

Por lo que:

x=7
6=6
z=5
y=1

entonces:

x=7
y=1

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

z=5

Matriz hermitiana y Matriz antihermitiana

Definición: Sean $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ con $a_{i\,j}\in\mathbb{C}$

i) A es hermitiana si $A=A*$

ii) A es antihermitiana si $A\;=-A*$

iii) Una matriz hermitiana se distingue porque los elementos de la diagonal principal de la matriz son reales y los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal son conjugados entre sí.

Por ejemplo:

$$G=\begin{bmatrix}3 & i & 1+i\\ -i & 4 & 3-i\\ 1-i & 3+i & 5\end{bmatrix}$$

Ejemplo: Si tenemos una matriz que no es hermitiana como este ejemplo:

$A=\begin{bmatrix}2-i & 3 & 2+i\\ 7 & 8 & 2i\\ i & -i & 0\end{bmatrix}$ podemos crear una matriz hermitiana con las siguientes propiedades:

1) $A+B$ es hermitiana, si *A* y *B* son hermitianas

2) $AA*$ es hermitiana

3) $A*A$ es hermitiana, $AA*\neq A*A$

4) $A+A*$ es hermitiana, si $A=\left[a_{ij}\right]_{nxn}$

Para el ejemplo $A+A*$se tiene que

- $A+A*=\begin{bmatrix}2-i & 3 & 2+i\\ 7 & 8 & 2i\\ i & -i & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2+i & 7 & -i\\ 3 & 8 & i\\ 2-i & -2i & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 10 & 2\\ 10 & 16 & 3i\\ 2 & -3i & 0\end{bmatrix}$ es hermitiana

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$AA^* = \begin{bmatrix} 2-i & 3 & 2+i \\ 7 & 8 & 2i \\ i & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+i & 7 & -i \\ 3 & 8 & i \\ 2-i & -2i & 0 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 19 & 40-11i & -1+i \\ 40+11i & 117 & i \\ -1-i & -i & 2 \end{bmatrix}$ es hermitiana

$$AA^* = \begin{bmatrix} 2+i & 7 & -i \\ 3 & 8 & i \\ 2-i & -2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i & 3 & 2+i \\ 7 & 8 & 2i \\ i & -i & 0 \end{bmatrix}$$

- $A^*A = \begin{bmatrix} 55 & 61+3i & 3+18i \\ 61-3i & 74 & 6+19i \\ 3-18i & 6-19i & 9 \end{bmatrix}$ es hermitiana

Matriz antihermitiana

Una matriz antihermitiana se reconoce porque los elementos de la diagonal principal son imaginarios puros o ceros y los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal son iguales en la parte imaginaria y en la parte real difieren de signo.

Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} i & 3-i \\ -3+i & -2i \end{bmatrix}$$

Se puede obtener otra matriz antihermitiana de otra que no lo es, utilizando la propiedad A-A* es una matriz antihermitiana si A es cuadrada.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2i & 3i & 2i \\ 1-i & 2 & 4-i \\ 5i & 2+i & -i \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & -5i \\ -3i & 2 & 2-i \\ -2i & 4+i & i \end{bmatrix}$$

$$A - A^* = \begin{bmatrix} -2i & 3i & 2i \\ 1-i & 2 & 4-i \\ 5i & 2+i & -i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2i & 1+i & -5i \\ -3i & 2 & 2-i \\ -2i & 4+i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4i & -1+2i & 7i \\ 1+2i & 0 & 2 \\ 7i & -2 & -2i \end{bmatrix}$$

Matriz Unitaria

$A^* = A^{-1}$ sí A es cuadrada con elementos en $\mathbb{C}$:

Propiedades

$U^*U = UU^* = In$

Si estas interesado en consultar como obtener cualquier matriz unitaria consulta el boletín Matemáticas y Cultura N.153 Titulado "MÉTODO PARA CONSTRUIR MATRICES UNITARIAS Y/O BASES ORTONORMALES A PARTIR DE UN SOLO VECTOR".

Ejemplo:

Obtener la matriz X que satisface la ecuación

$A^* AX \;\; + XB = diag(1,2) - tr(B)X$

Donde:

$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ una matriz unitaria y $B = \begin{bmatrix} i & 3 \\ -3 & -2i \end{bmatrix}$

<u>*Solución*</u>

$A^* A = I$; entonces *A* es una matriz unitaria.

$A^* \;\; = A^{-1}$; el determinante de una matriz unitaria es $\det \mathrm{A} = |1|$

$(A^* A)X \;\; + XB = diag(1,2) - tr(B)X$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$IX + XB = diag\left(1,2\right) - (-i)X$$
$$XI + XB - X\left(i\right) = diag\left(1,2\right)$$

$$X\left(I + B - iI\right) = diag\left(1,2\right);$$

$$X = \left(I + B - iI\right)^{-1} diag\left(1,2\right),\ la\ matriz\ diag(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I + B - iI = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 3 \\ -3 & -2i \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$I + B - iI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1-3i \end{pmatrix}$$

$$(I + B - iI)^{-1} = \frac{1}{10-3i}\begin{pmatrix} 1-3i & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{10-3i}\begin{pmatrix} 1-3i & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$X = \frac{1}{10-3i}\begin{pmatrix} 1-3i & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sean las matrices:

$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B^{*} = \begin{bmatrix} -i & 2i \\ i & -i \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & -i \end{bmatrix}$

Obtener la matriz X que satisface la ecuación $X(AAB)^{-1}+15C=B^{T}X$.

Solución

La matriz es involutoria si $A^2 = I$

$$XB^{-1}(A^2)^{-1}+15C=B^TX$$

$$XB^{-1}(I)^{-1}+15C=B^TX$$

$$XB^{-1}-B^TX=-15C \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{pero } B=4I,\\ (\alpha B)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}B^{-1}\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} X\left(\dfrac{1}{4}I\right)-4IX=-15C \\ X\left(\dfrac{1}{4}I-4I\right)=-15C \\ X\left(\dfrac{-15}{4}I\right)=-15C \end{array}\right\} X=\cancel{-15}\,\frac{4}{\cancel{-15}}C \therefore\ X=4C=\begin{bmatrix}8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Sean las matrices

$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ una matriz idempotente, y sea $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 3\\ 5 & -5 & 5\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 4\end{bmatrix}$

Obtener la matriz X que satisface la ecuacion: $(BX^*)^*+XA^2=C$,
donde X^* es la conjugada transpuesta de X.

__Solución__

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$(X^*)^*B^* + XA^2 = C$; Sabiendo que $(X^*)^* = X$

$XB^* + XA^2 = C$ Como es idempotente A y aplicando $A^2 = A$

$X(B^* + A) = C$ Despejando a la matriz X, como $(B + A)$ está posmultiplicando entonces $(B + A)^{-1}$ pasa del lado derecho posmultiplicando

$$X = C(B^* + A)^{-1} \quad \text{y} \quad B^* = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^* + A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (B + A)^{-1} = I_3$$

$$X = C(B + A)^{-1} \quad \therefore \quad X = CI = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Determinantes

Sea la matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) Obtener $\det C$.

b) $\left|C^T\right|$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\left|C^{-1}\right|$

e) $\left|2C\right|$

f) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

<u>Solución</u>

a)

Utilizando el método de cofactores, que dice que si *B* $\left[b_{ij}\right]_{nxn}$ con elementos en $\mathbb{C}$, y $r \in \mathbb{Z}$, *r* es un número tal que $1 \le r \le n$, entonces:

1) $\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} b_{rj} M_{rj}$

2) $\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} b_{ir} M_{ir}$

Se elegirá aquel renglón o columna que tenga el mayor número de ceros posibles
En el ejemplo se tomará la columna 2 de la matriz C

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)[4+3] = 1(7) = 7$$

$\det C = 7$

b) $\left|C^T\right| = \left|C\right| = 7$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Calculando

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{(-1)^{3+2}(0)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + (-1)^{3+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1(1)-2(1)) + 2(3(1)-1(-1)) \\ &= 3(-1-2) + 2(3+1) \\ &= 3(-3) + 2(4) \\ &= -9 + 8 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 1 = 6$$

d) $\left|C^{-1}\right| = \dfrac{1}{|C|} = \dfrac{1}{7}$

e) $|\,2C\,| = 2^{OrdenDeLaMatriz}\,|C| = 2^3\,|C| = 8(7) = 56$

f) Si se intercambia un renglón por otro al determinante se le cambia el signo, por ejemplo, en este caso se intercambió el renglón 1 por el renglón 3.

Si $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$; entonces $-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -7$

h) Si se intercambia una columna por otra, al determinante se le cambia el signo, Si $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$ entonces se intercambia la columna 1 por la columna 2

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & -5 & 4 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 4 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$ Si a, b, c, d $\in \mathbb{Z}^+$, y a, b, c, d ≠ 0.

Calcular el determinante de la matriz

Solución:

La matriz A es una matriz triangular superior. Por lo que el teorema dice:

Si $C = \left[C_{ij}\right]$ es una matriz triangular (inferior) (superior), entonces el $detC$ = producto de las entradas de la diagonal principal, es decir, $\det C = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} C_{ii}$

El determinante de la matriz A es = a(b)(c)(d) $\in \mathbb{Z}^+$

Ej: Calcular el determinante de la matriz

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Como A es una matriz triangular inferior, el determinante es:

$\det(A) = 2(2)(-2) = -8$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz diagonal es su det(B) es:

$detB \ = 2\left(-1\right)\left(3\right) = -6$

Ejemplo:

Sean $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Obtener la matriz *X* que satisface la ecuación:

$$tr\left(B\right)CX=3X+X\left(detC\right)+C$$

donde B es una matriz simétrica de orden 2x2 que se obtiene a partir de $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

<u>Solución</u>

Tomando en cuenta que una matriz simétrica se puede obtener con: $AA^T;\ A^TA$ y $A+A^T$

En este caso para que sea conformable con *C* utilizaremos

$$AA^T=B\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$tr\left(B\right)=5+2=7$, la tr(B) es la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$7CX-3X-\det CX=C$$
$$(7C-3I-detCI)X=C$$
$$El\ detC=2\left(1\right)-0\left(-1\right)=2$$

Para que haya cerradura en la adición de matrices, el escalar se convertirá en matriz escalar al multiplicarla por la matriz identidad.

$$\left.\begin{aligned}&(7C-3I-2I)\ \mathrm{X}=C\\&(7C-5I)X=C\\&X=(7C-5CI)^{-1}C\end{aligned}\right\}$$

Despejando la X, al estar premultiplicando a la X, o a la inversa del lado izquierdo estará premultiplicando.

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$7C = 7\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$7C - 5I = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(7C - 2I)^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & +7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = (7C - 5I)^{-1}C = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ es ortogonal y } C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtener la matriz *X* que satisface la ecuación:

$$A + (BX^T)^T B = detC\ X$$

<u>Solución</u>

$\left(X^T\right)^T B^T B = detCX - A$ por propiedad $(AB)^T = B^T A^T$

$XB^T B = detC\ X - A$, como $detC = -6$ porque *C* es una matriz triangular superior

$XB^T B - \det C\ X = -A$; $X(B^T B - \det CI) = -A$

$X = (-A)(B^T B - \det CI)^{-1}$ Al estar postmultiplicando $\left(B^T B - detCI\right)$ se despeja a X y la inversa queda también postmultiplicando.

$B^T B = I$ ya que *B* es ortogonal y entonces $B^{-1} = B^T$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

El $detC = -6$ porque *C* es una matriz triangular superior.

El producto de las entradas de la diagonal principal de una matriz triangular es el determinante de la matriz.

Ahora

$$X = (-A)(I + 6I)^{-1}$$

$$X = (-A)(7I)^{-1}$$

Recordemos que $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, α es una escalar por lo que la inversa de $(7I)^{-1}$ es: $\frac{1}{7}$ I

$$X = (-A)\frac{1}{7}\ \mathrm{I} = -\frac{1}{7}A = -\frac{1}{7}(2I) = -\frac{2}{7}I_3$$

Ejemplo:

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ x & -x & 3 \end{bmatrix}$;

obtener los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que A sea una matriz no singular (invertible)

Solución

Obteniendo el $\det A \neq 0$; utilizando el método de cofactores, por conveniencia elegimos el renglón que tenga el mayor número de ceros, en este caso elegimos el renglón 2.

$$\underbrace{(-1)^{2+3}}_{\text{característica}} \underbrace{(-3)}_{\text{elemento } a_{23}} \underbrace{\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ x & -x \end{vmatrix}}_{\text{menor asociado}}$$

$$3\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ x & -x \end{vmatrix} = 3\left[(2-x)(-x)-(1)(x)\right]$$

$$= 3\left[-2x+x^2-x\right]$$

$$= 3\left[x^2-3x\right] \neq 0 \quad \therefore \quad (x^2-3x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) \neq 0 \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Ejemplo:

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtener la matriz *X* que satisface la ecuación:

$$\left(B+C\right)X = -2detCX + 3A$$

Solución

Despejaremos al incognita *X*.

Vamos a agrupar los términos semejantes que contienen a la matriz *X* como sigue y pasamos el inverso aditivo de $-2detX$ al lado izquierdo$\left(B+C\right)X \ +2detCX = \ 3A$

Ahora factorizaremos a *X*, hay que observar que *X* está del lado derecho.
Se debe respetar donde se encuentra la X ya que no hay conmutatividad, en la multiplicación de matrices. También le agregamos a *2det* la matriz identidad, de lo contrario $\left(B+C-2detC\right)$ no es una operación cerrada ya que no se puede sumar a las matrices un número.

El número se multiplica por la matriz identidad para que se convierta en una matriz escalar y así se pueda adicionar con otra matriz quedando como sigue:

$$\left(B+C\right)X + \ 2detCIx = \ 3A$$

$$\left(\left(B+C\right)+2detCI\right)X \ \ =3A$$

Ahora despejemos a *X* como $\left(B+C+2detCI\right)$ están premultiplicando a *X*, entonces vamos a premultiplicar tanto el lado izquierdo como el lado derecho de la ecuación quedando así:

$$((B+C)+2\det CI)^{-1}(B+C+2\det CI)X=((B+C)+2\det CI)^{-1}(3A)$$

Es muy importante observar si la matriz que se va a despejar se encuentra premultiplicando o postmultiplicando con respecto a la matriz X.

Ahora recordemos la propiedad $AA^{-1}=I=A^{-1}A$ por lo que $(B+C+\det CI)^{-1}(B+C+\det CI)=I$ (Matriz Identidad).
Recordado la propiedad, $IX=X$, entonces tenemos que la incognita está despejada como

$$X=(B+C+\det CI)^{-1}(3A)$$

Ahora efectuemos operaciones con las matrices, antes calculemos el $det\,C$, recordemos que el determinante de una matriz triangular inferior

el determinante es el producto de las entradas de la diagonal principal por lo que el $det\ C = \ 2\left(3\right)\left(-1\right) \ = \ -6$

$$B+C+detCI=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

$$B+C+detCI=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&2\\3&-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2&0\\0&-3&2\\3&-1&-4\end{pmatrix}$$

Ahora obtendremos la matriz inversa de $\left(B+C+\ detCI\right)$ por el método de la matriz adjunta recordando la inversa de una matriz *M* es $M^{-1}=\frac{1}{\det A}AdjA$. El $\det AI=(AdjA)(A)$.

Calculamos los cofactores de los elementos de "*A*":

$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, $(1)^{i+j}$ es la característica del cofactor M_{ij} es el menor que se obtiene suprimiendo virtualmente el renglón *i* y columna *j* del elemento i y j.

$$C_{11}=\left(-1\right)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&2\\-1&-4\end{vmatrix}=+(+14)=14$$

$$C_{12}=\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2\\3&-4\end{vmatrix}=6$$

$$C_{13}=\left(-1\right)^{1+3}\begin{vmatrix}0&-3\\3&-1\end{vmatrix}=+(+9)=9$$

$$C_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\-1&-4\end{vmatrix}=-2(-4)=8$$

$$C_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\begin{vmatrix}-5&0\\3&-4\end{vmatrix}=+(-5)(-4)-0=20$$

$$C_{23}=\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix}-5&2\\3&-1\end{vmatrix}=-[(-5)(-1)-2(3)]=-(-1)=1$$

$$C_{31}=\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\-3&2\end{vmatrix}=4$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-10) = 10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = +(-5)(-3) = 15$$

La matriz adjunta de $B+C+\det CI$ es: Matriz de Cofactores.

Matriz de cofactores = $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 6 & 20 & 10 \\ 9 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

Calculando el determinante es:

$$\left(B+C+\det CI\right) adj\left(B+C+\det CI\right) = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 6 & 20 & 10 \\ 9 & 1 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -58 & 0 & 0 \\ 0 & -58 & 0 \\ 0 & 0 & -58 \end{bmatrix} = -58I$$

El valor del determinante es -58

$$\therefore (B+C+\det CI)^{-1} = \frac{1}{-58}\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 6 & 20 & 10 \\ 9 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Recordemos que *X* es:

$$X = (B+C+\det CI)^{-1}(3A)$$
$$X = -\frac{3}{58}(B+C+\det CI)^{-1} A$$

$$X = -\frac{3}{58}\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 6 & 20 & 10 \\ 9 & 1 & 15 \end{bmatrix}_{3x3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} = \frac{-3}{58}\begin{bmatrix} 24 & 2 \\ 2 & 34 \\ 3 & 22 \end{bmatrix}$$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

Ejemplo:

Sea la matriz unitaria

$$A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Calcular el determinante de dicha matriz y comprobar que $A^*A=I$

Recordando que el determinante de la matriz es el módulo del valor del determinante obtenido.

Solución:

$$\det(A)=(i)(-\mathrm{i})=1$$

Comprobando:

$$A^*A=I$$

$$A^*A=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que $A^* = \mathrm{A}^{-1}$

Ejemplo:

Sea la matriz unitaria

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i \\ \frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular el det A = $|1|$ y comprobar que $A^* A = I$, as

Recordando que el determinante de la matriz es el módulo del valor del determinante obtenido.

Solución:

$$\det(A) = -\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} i\right) = \frac{-1}{9} + 4\frac{\sqrt{5}}{9} i$$

Para comprobar que det A = $|1|$

Entonces recordemos como calcular el módulo de un número complejo a + bi

Que es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$

Entonces

$$\sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^2 + \left(4\frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{81}\right) + \left(\frac{80}{81}\right)} = \sqrt{\left(\frac{81}{81}\right)} = |1|$$

Comprobando:

$A^* A = I$

$$A^* A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} i \\ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} i \\ \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que $A^* = \mathrm{A}^{-1}$

Regla de Cramer

Sea n un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$a_{11}x1+a_{12}x2+\ldots+a_{1n}xn=b_1$$
$$a_{21}\ x1+a_{22}\ x2+\ldots+a_{2n}\ xn=b2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}\ x1+a_{n2}\ x2+\ldots+a_{nn}\ xn=b_n$$

Y sea $A=\left[a_{ij}\right]$ su matriz de coeficientes.

$$Si\ \ detA\ \neq 0$$

Entonces

$$x_k=\frac{detA_k}{detA}\ \ ,\ \ k=1,\ 2,\ \ \ldots,n$$

donde

$A_k=\left[c_{ij}\right]$ es tal que

$$C_{ij}=\begin{cases} a_{ij,}\ para\ \ j\neq k \\ bi,\ para\ \ j=k \end{cases}$$

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & z & = & 5 \\ -x & + & y & - & z & = & -3 \\ 3x & - & y & - & z & = & -1 \end{array}$$

Resolver, si es posible, utilizando la regla de Cramer. En caso de que no sea posible, explicar porqué no lo fue.

<u>Solución</u>

Calculamos el deteminante de la matriz del sistema A

det(A) = $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

Hay diversos métodos para el cálculo del valor del determinante.

En este caso se utilizará el cálculo del valor del determinante por la regla de Sarrus

Recordando:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$2(1)(-1) + (-1)(-1)(3) + 1(-1)(-1) -$$

$$\left[(-1)(-1)(-1) + (2)(-1)(-1) + (1)(1)(3)\right]$$

$$= -2 + 3 + 1 - (-1 + 2 + 3) = 2 - 4 = -2$$

El inconveniente es que si quisieramos calcular un determinante de una matriz de mayor orden ya no se podría efectuar, la regla de Sarrus únicamente se puede utilizar para determinantes de matrices de 2x2 y 3x3.

Calcularemos los determinantes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}$$

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

El determinante $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ lo calcularemos por el método de cofactores.

Tomamos el primer renglón como pivote

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(5)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5)[-1-1] - 1(-1)[3-1] + 1(1)[3+1] = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

De la misma forma calcularemos el valor de la incógnita y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(5)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2)[3-1] - 1(5)[1+3] + 1(1)[1+9] = -6$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\-1 & -3 & -1\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-6}{-2}=3$$

Ahora calcularemos el valor de la incógnita z

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\-1 & 1 & -3\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\-1 & 1 & -3\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{1+1}(2)\begin{vmatrix}1 & -3\\-1 & -1\end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}-1 & -3\\3 & -1\end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+3}(5)\begin{vmatrix}-1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=1(2)\left[-1-3\right]-1(-1)\left[1+9\right]+1(5)\left[1-3\right]=-8$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\-1 & 1 & -3\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\3 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-2}=4$$

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 9 \end{array}$$

Resolver, si es posible, utilizando la regla de Cramer. En caso de que no sea posible, explicar porqué no lo fue.

Solución:

Calculamos el deteminante de la matriz del sistema A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Hay diversos métodos para el cálculo del valor del determinante.

En este caso se utilizará el cálculo del valor del determinante de una matriz triangular, en que dicho valor se obtiene del producto de las entradas de la diagonal principal.

Utilizando transformaciones elementales reduciremos a la matriz hasta obtener la matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} R_1(3) + \mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_2 \\ R_1(2) + \mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} R_2\left(-\frac{3}{2}\right) + \mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema tiene un renglón con ceros, por lo cual el determinante es cero.

Además, el producto de las entradas de la diagonal principal de dicha matriz es (-1)*(2)*(0)=0

Por lo que no es posible utilizar la regla de Cramer para obtener la solución de dicho sistema de ecuaciones lineales.

Autoras: Ávila Núñez María del Rocío
Rodríguez Chávez Rosalba
Revisó: Balmori Negrete Gustavo
2018

Se sugiere obtener el conjunto solución por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} R_1(3)+\mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_2 \\ R_1(2)+\mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2\left(\frac{1}{2}\right) \to \mathrm{R}_2 \\ R_3\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) R_2\left(-1\right)+\mathrm{R}_3 \to \mathrm{R}_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Re}\,\textit{duciendo de abajo hacia arriba}$

$R_2\left(-1\right)+\mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-x=-3;\ x=3;\ y=3+z,\ z\in\mathbb{R}$

Un conjunto solución es: $\left\{\left(3,\ 3+z,\ z\ \right) \mid z\in\mathbb{R}\right\}$

Referencias bibliográficas:

SOLAR G. E., L. Speziale, Apuntes de Álgebra Lineal. 3ª. Edición, México, Limusa-Facultad de Ingeniería-UNAM, 1996

POOLE, D., Álgebra Lineal. 2ª. Edición, México, Thomson Editores, 2006.

GROSSMAN, S.I., J.J. Flores G., Álgebra Lineal. 7ª. Edición, México. Mc Graw Hill, 2012