ÁLGEBRA DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Adición

Sean $T:V \to W$ y $S:V \to W$; Se observa que los espacios del dominio y del codominio son iguales. Ya que sino no se podría efectuar la adición $(T+S)(\overline{v}) = T(\overline{v}) + S(\overline{v})$

$$M_B^A(T) + M_B^A(S) = M_B^A(T+S)(\overline{v})$$

Ejemplo

Obtener $T+S$ si $T(x,y) = (2x-y, y, x)$ y $S(x,y) = (-x,-y,y)$

Si se tienen las dos reglas de correspondencia entonces simplemente sumamos, si es que son conformables.

$$T+S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$\left(T+S\right)\left(\overline{v}\right) = (x-y, 0, x+y)$, si se observa, se puede obtener la matriz asociada a la transformación ya que no nos dan bases, nos referimos a las bases canónicas. En la primera columna se escriben los coeficientes de x y en las segunda columna los coeficientes de y.

$$M_B^A(T) + M_B^A(S) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M_B^A(T+S)$$

Multiplicación de un escalar y una transformación lineal

Sea $\alpha \in C, T:V \to W \qquad \alpha T:V \to W$

Ejemplo

Sea $\alpha = 3-i$ y $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^3 \qquad T(x,y) = (x+y, y, -x)$

$\alpha T = ? \qquad \alpha T\left(\overline{V}\right) = \left[(3-i)x + (3-i)y, (3-i)y, (3-i)(-x)\right]$

$$\alpha T = \begin{bmatrix} 3-i & 3-i \\ 0 & 3-i \\ -3+i & 0 \end{bmatrix}$$

Composición de transformaciones lineales

Sean $T:V \to W$ y si S: $A \to V$ implica $T \circ S : A \to W$

Primero entra la función S y se compone con T, si hay intersección del codominio de la primera función con el dominio de la segunda función, entonces se puede ver como: $\begin{matrix} T \circ S : A \to ?? \\ A \to V \quad V \to W \end{matrix}$

$T \circ S \neq S \circ T$
$S \circ T : V \to W; A \to V$

Ejemplo

Sean $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sea $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T(x,y)=(x-y,y,x)$; $S(x,y)=(y,-x,x+y)$

Efectuar si es possible

a) $S \circ T$ b) $T \circ S$ ¨

a) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ No se puede efectuar

b) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ No se puede efectuar

Ejemplo

Sean las transformaciones $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y si $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Obtener si es posible

a) $T \circ S$ b) $S \circ T$ c) $T \circ T$

a) S y luego T; $\mathbb{R}^3 \to \boxed{\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^3$ No se puede efectuar

b) T y luego S: $\mathbb{R}^3 \to \boxed{\mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^2 =>$ $S \circ T = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

c) T y luego T: $\mathbb{R}^3 \to \boxed{\mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^3$ $T \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Más adelante se presentan ejercicios.

TRANSFORMACIÓN INVERSA

Sea $T:V \to W$ una transformación lineal $T^{-1}:W \to V$

T^{-1} existe si

1) Es biyectiva
Inyectiva cuando $N(T)=\{\bar{0}\}$
Suprayectiva cuando el recorrido es igual al codominio $T(V)=W$

La dimensión del dominio es igual a la dimensión del codominio

Sea $T:V \to W$ una transformación lineal. La inversa de T es una transformación $T^{-1}:W \to V$ y se cumple que

a) $T^{-1} \circ T = I_V$ b) $T \circ T^{-1} = I_W$

Donde I_V y I_W son transformaciones identidad

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal A y B bases de V y W respectivamente

a) T^{-1} existe si $M_B^A(T)$ no es singular

b) $M_B^A(T)$ si es no singular entonces $\left(M_B^A(T)\right)^{-1} = M_A^B(T)$

Ejemplo

Sea $T: M \rightarrow P$ definida por $T = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = (a-b)x + (a+b)$; obtener la transformación inversa si es que existe.

Como no se dan bases, se toman como base de M y de P las canónicas.

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener una regla de correspondencia se sigue el procedimiento

Recordando
$$M_B^A(T)\left[\overline{V_A}\right] = \left[T\left(\bar{v}\right)\right]_B = T\left(\bar{v}\right)$$
$$M_A^B(T)\left(\bar{v}\right)_B = \left[T\left(\bar{v}\right)\right]_A = T\left(\bar{v}\right)$$

$M_A^B(T)\left(\bar{v}\right)_B = \left[T\left(\bar{v}\right)\right]_A \Rightarrow T^{-1}\left(\bar{v}\right)$ para nuestro problema

$T^{-1} \cdot \underset{Dominio}{P_1} \rightarrow \underset{codominio}{M}$ $\bar{v} \in P_1, \left[\bar{v}\right]_B$; Proponemos *a la base natural o estándar de* P_1; $B = \{x, 1\}$

$$ax + b = \alpha x + \beta(1)$$
$$\alpha = a$$
$$\beta = b$$

$$\left[\bar{v}\right]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad ; \quad M_A^B(T)\left(\bar{v}\right)_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Una base A es: $A = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]$

$M_A^B(T)\left(\bar{v}\right)_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a-b}{2} \\ \dfrac{-a+b}{2} \end{bmatrix}$. Recordando que el vector de coordenadas contiene escalares dentro de él. Hacemos la combinación lineal.

$$T^{-1}(ax+b)=\frac{a+b}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\frac{-a+b}{2}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(ax+b)=\begin{bmatrix}\frac{a+b}{2} & \frac{-a+b}{2}\\ \frac{-a+b}{2} & \frac{a+b}{2}\end{bmatrix}$$; Su matriz asociada si nos la solicitarán

$$M\left(T^{-1}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Ejercicio:

Sea la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x,x+y,2x+2y+2z)$

Determinar la regla de transformación $\left[2\left(T\circ T\right)-T-4I\right](x,y,z)$ donde I es la transformación identidad

$S\left(\bar{v}\right)=\left[S\left(\bar{v}\right)\right]_B=M_B^A(S)\left(\bar{v}\right)_A$ A y B son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$

$$M(T)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix};$$

$2T\circ T-T-4I$

$$2M(T)M(T)=2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 8 & 6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 16 & 12 & 8\end{bmatrix}$$

$2T\circ T-T-4I$

$$M_B^A(S)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 16 & 12 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 0\\ 14 & 10 & 2\end{bmatrix}$$

$M_B^A\left(S\right)\left(\bar{v}_A\right)=\left[S(\bar{v})\right]_B=S\left(\bar{v}\right);\quad \bar{v}\in V=\mathbb{R}^3$

$A=\left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\}$; $\qquad \bar{v}=(a,b,c)$

$(a,b,c)=\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)$; $\qquad (a,b,c)=(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\begin{aligned}\alpha&=a\\ \beta&=b\\ \gamma&=c\end{aligned}\quad;\quad \left[\bar{v}\right]_A=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\quad;\quad \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 0\\ 14 & 10 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix}$$

; *La base* B *está en* $W=\mathbb{R}^3$

$S\left(\bar{v}\right) = -3a(1,0,0) + 3a - 3b(0,1,0) + 14a + 10b + 2c(0,0,1)$

$S(a,b,c) = (-3a, 3a - 3b, 14a + 10b + 2c)$

Ejemplo: Dadas las transformaciones lineales

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (8x + 5y, x + 2y)$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S(x,y) = (x + 2y, x + y)$

$R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(x,y) = (2x + y, 3x + y)$

Determina las componentes del vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\left[\left(T - 25\right) \circ R^{-1}\right]\bar{u} = (7,-1)$

$M(T) = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad M(R) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$M\left(R^{-1}\right) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \left[\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right]$

$\left[M(T) - 2M(S)\right]M\left(R^{-1}\right)$

$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\bar{u} = (7,-1) \qquad M_B^A(W)\left(\bar{u}\right)_A = \left[W\right]_B = W$

$\bar{u} = (x,y), \left[\bar{u}\right]_A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad ; \qquad (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1); \qquad \begin{matrix} \alpha = x \\ \beta = y \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x & 4y \\ x & -y \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} -3x + 4y(1,0) + (x - y)(0,1) \\ (-3x + 4y, x - y) = (7,-1) \end{matrix} \qquad \left\{\begin{matrix} -3x + 4y = 7 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\}$

$\begin{matrix} -3x + 4y = 7 \\ +3x - 3y = -3 \\ y = 4 \end{matrix} \qquad ; \qquad \begin{matrix} x - 4 = -1 \\ x = 3 \end{matrix} \qquad ; \qquad \bar{u} = (3,4)$

Otra forma

$T - 2S = \left(6x + y, -x\right) \qquad R^{-1} = (2y + y, 3y + 1) \qquad R^{-1}(x\beta) = (-x + y, 3x - 2y)$

$(T - 2s) \circ R^{-1} \qquad (T - 2s)R^{-1}$

$\left(6(-x + y) + 3x - 2y, x - y\right)$

$\left(-6x + 6y + 3x - 2y, x - y\right) = (-3x + y, x - y) \Big| (T - 2S) \circ R^{-1}$

$(-3x + 4y, x - y) = (0,-1)$

$x=3 \qquad y=4 \qquad u=(3,4)$

Ejemplo:

;

Dada la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(x-y,2x+2y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Obtener la transformación lineal S, de manera que

$$\left(2M(T)^{-1}-M(S)-3I\right)(x,y)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & -1\end{bmatrix}$$

Solución:

$$2M(T)^{-1}-M(S)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & -1\end{bmatrix}+3I$$

$$M(T)^{-1}M(S)=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & -1\end{bmatrix}+3I\right\}; \qquad M(S)=M(T)\left[\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & -1\end{bmatrix}+3I\right\}\right]$$

$$M(T)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & -1\end{bmatrix}+\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$M(S)\left(\bar{v}\right)_A=\left[S\right]_B;\ \bar{v}=(a,b); \qquad \left[\bar{v}\right]_A=\left(\alpha,\beta\right)$$

$$(a,b)=\alpha(1,0)+\beta(0,1); \qquad a=\alpha \quad ; \qquad b=\beta$$

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4a\\ 4b\end{bmatrix} \qquad 4a(1,0)+4b(0,1)=S$$

Ejemplo:

Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que para las bases $A=\left\{(1,0),(1,1)\right\}$ y $B=\left\{(-1,0),(2,1)\right\}$ de $\mathbb{R}^2$

Además, $M_B^A(S)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ y $M_B^A(T\circ S)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Determinar la regla de correspondencia de T.

Sol:

Recordando: $M_A^B(S)M_B^A=M_A^A$

$$M_A^A(T)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix};\ M_A^A(S)^{-1}; \qquad \frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=M_A^A(S)=M_A^A(S)^{-1}$$

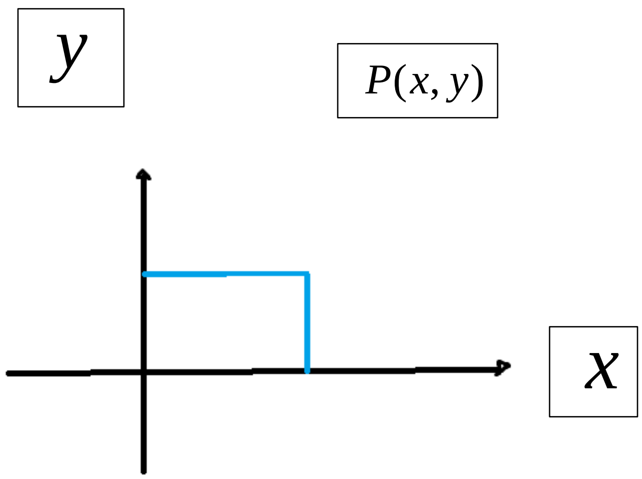
$$M_A^A(T)\left(\bar{v}\right)=\left[T\left(\bar{v}\right)\right]_A; \qquad \bar{v}=(a,b); \qquad (a,b)=\alpha(1,0)+\beta(1,1); \qquad \left(a,b\right)=(\alpha+\beta,\beta)$$

$$\alpha+\beta=a \qquad \beta=b \qquad \alpha=a-b$$

$$M_A^A(T)\left(\bar{v}\right)_A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-b\\ b\end{bmatrix} \quad ; \qquad \begin{bmatrix}-a+b\\ a-b+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+b\\ a\end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\bar{v}\right)\right]_A=-a+b(1,0)+a(1,1)=(-a+b+a,a)\,; \qquad T\left(\bar{v}\right)=\left(b,a\right)$$

ESPACIOS GEOMÉTRICOS



$$P'(x,-y)$$

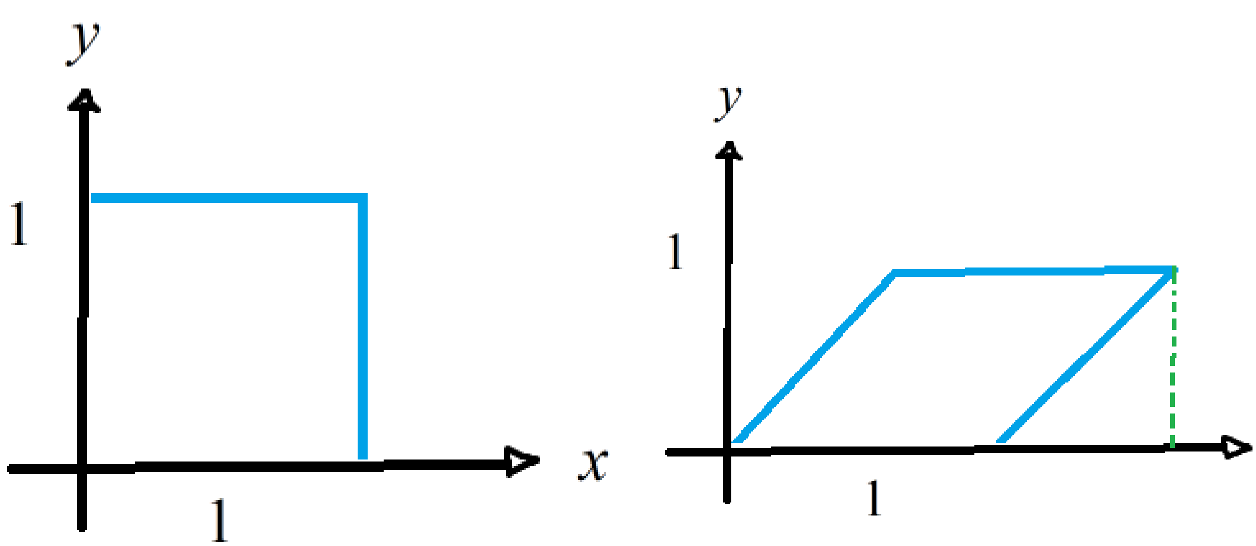
$$T(x,y)=(x,-y)$$

$$M(T)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Eje $y \Rightarrow T(x,y)=(-x,y)\,;\quad M(T)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Origen $T(x,y)=(-x,-y)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Deslizamiento o deformación (Trasquilado)



$B\{(1,0),(1,1)\}$

$\{T(1,0),T(0,1)\}$

$(1,0)(?,1)$

$B\{(0,1),(1,1)\}$

$T(B)=\{T(1,0),T(1,1)\}$

$=\{(1,0),(1+k,1)\}$

$M_B^A(T)\left(\bar{v}\right)_A=\left[T\left(\bar{v}\right)_B\right]$ $\qquad B=\{(1,0),(0,1)\}$ $\qquad (1,0)=\alpha(1,0)+\beta(0,1)$

$\alpha=1 \quad ; \quad \beta=0$

$(k,1)=\alpha(1,0)+\beta(0,1)$ $\qquad (k,1)=(\alpha_1,\beta_1) \quad ; \quad k=\alpha_1 \quad ; \quad \beta_1=1$

$M_B^A(T)=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left[\bar{v}\right]_A=?$ $\quad ; \quad (a,b)=\alpha(1,0)+\beta(0,1) \quad ; \quad \alpha=a \quad \beta=b$

$T\left(\bar{V}\right)=a(1-k)+b(0,1) \ =(-a,-ak+1)\,;\quad M(T)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -k & 1\end{bmatrix}$

Rotación

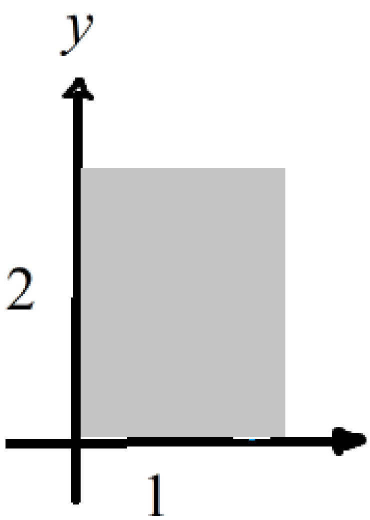
$M(T)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix};$ $\qquad x=x'\cos\theta-y'sen\theta$

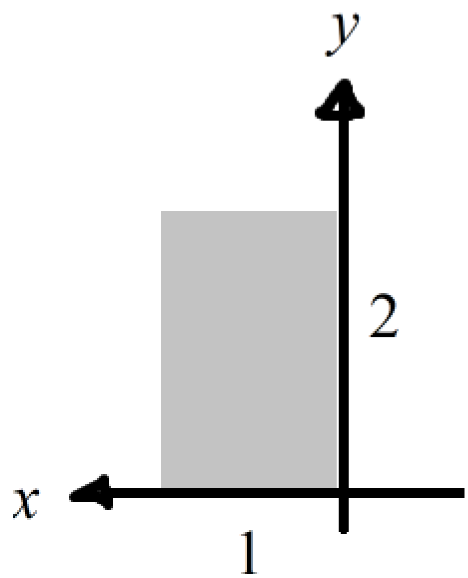
$y=x'sen\theta+y'\cos\theta$

Sea la transformación $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ con regla $T\left(\bar{u}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\bar{u}$

El efecto geométrico que produce T en la región sombreada corresponde a una

1) Una contracción
2) Reflexión con respecto al eje x
3) Rotación
4) Reflexión con respecto al eje y





$$M_B^A(T)\left(\bar{v}\right)_A = \left[T\left(\bar{v}\right)\right]_B = T\left(\bar{v}\right)$$

$\bar{u} \in \mathbb{R}^2$

$\bar{u} = (a,b)$

$A = \{(1,0),(0,1)\}$

$(a,b) = a(1,0) + \beta(0,1)$

$(a,b) = (\alpha,\beta)$

$\alpha = a$

$\beta = b$

$T(0,2) = (0,2)$

$T(1,0) = (-1,0)$

$T(1,2) = (-1,2)$

$T(0,0) = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix} \qquad T\left(\bar{v}\right) = -a(1,0) + b(0,1) \qquad T\left(\bar{v}\right) = (-a,b)$$

$$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+bk\\ b\end{bmatrix}$$

$a+bk(1,0)+b(0,1)=T(\bar{v})$

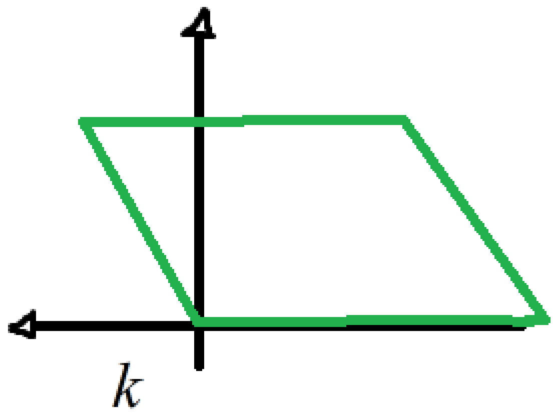
$(a+bk,b)=T(\bar{v})$

$B=\{(1,0),(0,1)\}$

$T(B)=\{(1,0),(-k,1)\}$

$T(1,0)=(1,0)$

$T(0,1)=(-k,1)$



Por linealidad

$T(i)=i$

$\mathrm{T}(j)=ki+j$

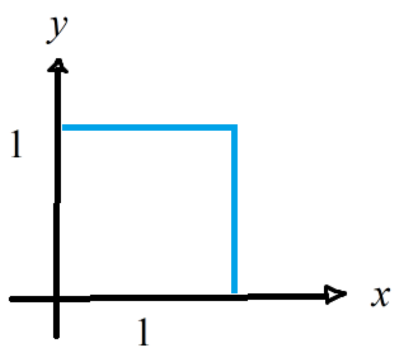
$T(\bar{v})=\alpha T(i)+bT(j)$

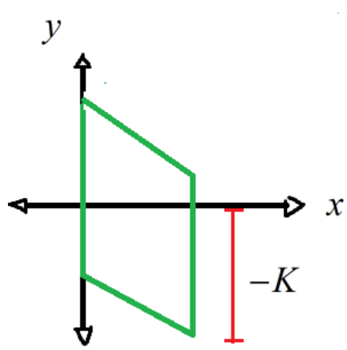
$=ai+b(-k+j)$

$=ai-bki+bj$

$=a(1,0)+bk(1,0)+b(0,1)$

$=(a-bk,b)$





$B=\{(1,0),(0,1)\}$

$T(1,0)=(1,-k)$

$T(0,1)=(0,1)$

Sea la región definida por los puntos de coordenadas $\mathrm{A}(0,0),\ B(1,0), \mathrm{C}(1,1)\ y\ D(0,1)$.

a) El realizar primero una reflexión con respecto al origen y luego una combinación vertical con $k=\frac{1}{2}$

b) El realizar primero una deformación a lo largo del eje x con $k=1$ y después una reflexión sobre el eje y

$$a)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(x,ky) $(-x,-y)$

Deformación vertical	Reflexión con respecto al origen

$$b)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Reflexión sobre y	Deformación sobre x

c) Rotación 270° y trasquilado en el eje vertical $k=\frac{1}{2}$, contracción en el eje horizontal y expansión en eje x con $k=1$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Valores y vectores característicos:

- De cada ecuación característica se obtendrán los espacios cartesianos $E(\lambda=?)=\{\qquad\}$
- Posteriormente de cada espacio característico se obtendrán los valores característicos (Base de $E(\lambda)$)
- Se unen las bases de los espacios característicos y se ingresan dentro de una matriz. Cada vector en una columna
- Obteniéndose una matriz diagonalizadora "P"

Matrices similares

Se tienen λ matrices A y B de orden "n" son similares si existe una matriz no singular C tal que $B=C^{-1}AC$

Teorema: Dos matrices representan al mismo operador lineal si y sólo si son similares

- En dos matrices similares A y B el determinante $(A)=\det(B)$
- Las matrices similares tienen el mismo polinomio características y por lo tanto los mismos valores
- Matriz diagonal contiene a su diagonal principal a los vectores característicos

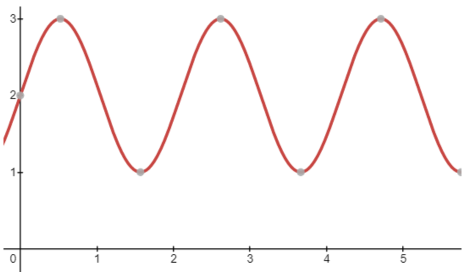
$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix} \qquad D=P^{-1}M_A^A(T)P$$

Valores, vectores, espacios característicos, diagonalización y diagonal

Sea $T:V \to V$ un operador lineal

Un operador lineal cumple $T\left(\bar{v}\right) = \lambda \bar{v}, \quad \bar{v} \neq 0 \qquad \lambda =$ valor característico (autovalor, eigenvalor, valor propio)

$\bar{v} =$ Vector característico, vector propio, eigen vector, auto vector



$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\lambda} \qquad T(\bar{v}) = \left[T\left(\bar{v}\right)\right]_B = M_B^A(T)\left(\bar{v}\right)_A$$

Partiendo de $T\left(\bar{v}\right) = \lambda \bar{v}$; $\quad M_A^A(T)\left(\bar{v}\right)_A = \lambda\left(\bar{v}\right)_A$; $\quad \left[M_A^A(T) - \lambda I\right]\left(\bar{v}\right)_A = 0$

$\left|M_A^A(T) - \lambda I\right| =$ Polinomio característico, raíces del polinomio (valores característicos)

- Para cada λ (valor propio) se sustituye en $\left(M_A^A(T) - \lambda I\right)\left(\bar{v}\right)_A = 0 \to$ Ecuación característica para cada λ

Ejemplo:

Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y sea $T\left(2,1\right) = 2(2,1)$ y $T(1,-1) = 3(1,-1)$

Obtener los valores característicos, los vectores característicos, los espacios característicos, la matriz diagonalizadora y la matriz diagonal

$T\left(\bar{v}\right) = \lambda \bar{v} \to$ Vector característico

Valores característicos $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$

Vectores característicos { $(2,1),(1,-1)$ }

Espacios característicos

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP; \qquad PD = AP; \qquad PDD^{-1} = A \to M_A^A(\mathrm{T})$$

$$-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = M_A^A(T); \qquad -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} = M_B^A(T)$$

Para $\lambda = 2$ $\qquad \left(M_A^A(T) - \lambda I\right)\left(\overline{v_A}\right) = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3}-2 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \left(\bar{v}\right)_A = 0$$

; $\left(M_A^A(T)-\lambda I\right)\left(\overline{v_A}\right)=0$

$\left(\bar{v}\right)_A = (a,b) = \alpha(2,1)+\beta(1,-1)$

$$2\alpha+\beta = a$$
$$\alpha-\beta = b$$
$$3\alpha = a+b \;;$$
$$\alpha = \frac{a+b}{3}$$

$$\beta = -b+\alpha$$
$$\beta = -b+\frac{a+b}{3};$$
$$\beta = \frac{a-2b}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+b}{3} \\ \frac{a-2b}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & +b \\ a & -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{9}(a+b)-(2a+4b)$$
$$\frac{1}{9}(-a-b+2a-4b)$$

$$\frac{-a+5b}{9}=0$$
$$\frac{a-5b}{9}=0$$

; $E(\lambda=2) \Rightarrow \{(5b,b) \mid b\in\mathbb{R}\}$

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3}-3 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-3 \end{pmatrix}\left(\bar{v}\right)_A = 0 \;; \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a+b}{3} \\ \frac{a-2b}{3} \end{pmatrix} = 0 \;; \quad -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b \\ a-2b \end{pmatrix} = 0$$

$$2(a+b)-(2a-4b)=0$$
$$2a+2b-2a+4b=0$$

; $4a-2b=0$

$a+b-(a-2b)=0$;

$$a+b+a-2b=0$$
$$2a-b=a \;;$$
$$b=2a$$

$\mathrm{E}(\lambda=3)=\{(a,2a) \mid a\in\mathbb{R}\}$

$\mathrm{E}(\lambda=3)$; $\quad \left(M(T)-\lambda I\right)\left(\bar{v}\right)_A = \bar{0}$

$\left(\bar{v}\right)_A = (a,b,c)$; $\left(\bar{v}\right)_A = \alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\lambda(0,0,1)$; $\quad \alpha = a$; $\quad \beta = b$; $\quad \lambda = c$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}a+c=0\\2a+2c=0\\a+c=0\end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix}a+c=0\\a=-c\\c=-a\end{matrix}$$

$\mathrm{E}(\lambda=3)=\{\ (-c,b,c)|b,c\in\mathbb{R},c,b\neq 0] \rightarrow$ espacio característico

$B_{t(\lambda=1)}=\{(-1,0,1),(0,1,0)\} \rightarrow$ Vectores característicos

$\mathrm{E}(\lambda=3)\left(M(T)-\lambda I\right)\left(\bar{v}\right)_A=\bar{0}$

$$\begin{cases}-a+c=0\\2a-2b+2c=0\\a-c=0\end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix}a-c=0\\b-2c=0\end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix}a=c\\b=2c\end{matrix}$$

$\mathrm{E}(\lambda=5)=\{(c,2c,c)|c\in\mathbb{R};c\neq 0\}$

$B_{\mathrm{E}(\lambda=5)}=\{(1,2,1)\}$

b) Se obtiene la unión de las bases $\{(-1,0,1),(0,1,0),(1,2,1)\}$

c) $P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$

d) $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-2&2\\-1&0&-1\end{bmatrix}$

$$D=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-2&2\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&1\\2&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&0&-3\\6&-6&0\\-5&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\0&0&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-5\end{bmatrix}\rightarrow \text{valores caracterísiticos}$$

Sea $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ un opreador lineal definido por $T(x,y,z)=(4x+z,2x+3y+2z,x+4z);\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

a) Obtenga los valores, vectores y espacios característicos del operador T
b) Determine si T es diagonalizable
c) En caso de resultar afirmativo obtener una matriz diagonalizadora.

d) Comprobar que $D = P^{-1}AP$

$M(T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; tomando la columna 2 y calculando el determinante

$$M(T) - \lambda(\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \qquad +(3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[(4-\lambda)(4-\lambda)-1\right] = (3-\lambda)\left[(4-\lambda+1)(4-\lambda-1)\right] = (3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 5 \qquad \lambda_3 = 3$

Los valores característicos o propios $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 5$

Para $E(\lambda = 3):\ (\mathrm{M(T)} - \lambda I)(\bar{v})_A = 0$

$$M(T) - \lambda\,\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ (\bar{v})_A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{matrix} a+c=0 \\ 2a+2c=0 \\ a+c=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \ a=-c; \ c=-a$$

$$E(\lambda = 3) := \left\{ (-c,b,c) \middle| b,c \in \mathbb{R},\ b,c \neq 0 \right\}$$

$$B_{E(\lambda = 3)} = \{(-1,0,1),(0,1,0)\}$$

Para $E(\lambda = 5):\ (\mathrm{M(T)} - \lambda I)(\bar{v})_A = 0$

$$M(T) - \lambda\,\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \ (\bar{v})_A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{matrix} a-c=0 \\ 2a-2b+2c=0 \\ a-c=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-a+c=0$$
$$b-2c=0 \;\Rightarrow a=c;\; b=2c,\; c\in\mathbb{R}$$
$$a-c=0$$

$$E(\lambda=3)\coloneqq\left\{\left(c,2c,c\right)\middle|c\in\mathbb{R},\,c\neq 0\right\}$$
$$B_{E(\lambda=3)}=\left\{(1,2,1)\right\}$$

La matriz diagonalizadora que se obtiene de la Unión de las bases de los espacios característicos es:

$$M(T)=\begin{bmatrix}4&0&1\\2&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}\; P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

La matriz diagonal es:

$$D=P^{-1}M(T)\,\mathrm{P} \Rightarrow -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-2&2\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&1\\2&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\1&0&-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\1&0&5\end{bmatrix}$$