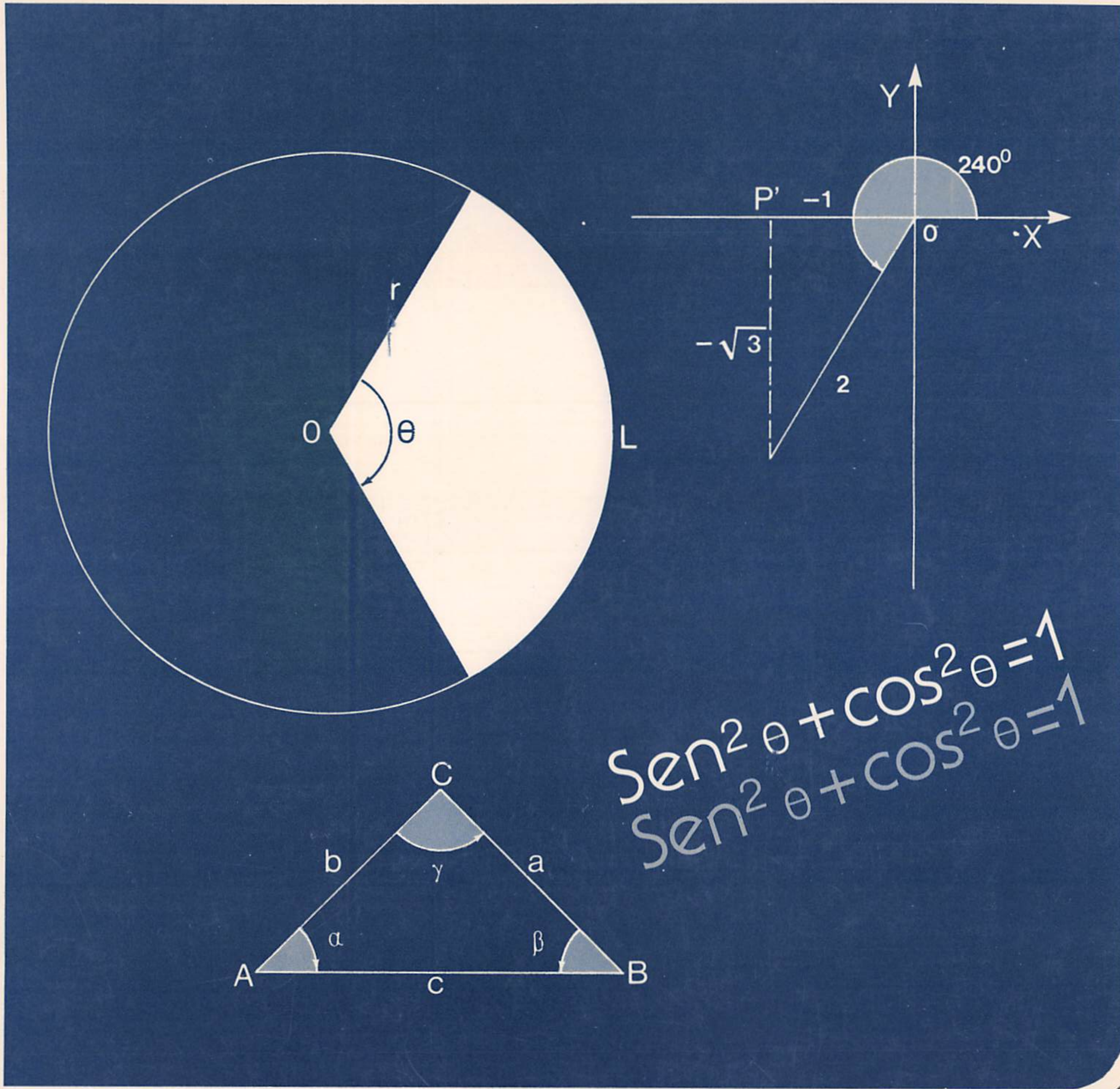
antecedentes de geometría y trigonometría

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



Facultad de Ingeniería

antecedentes de geometría y trigonometría

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

antecedentes de geometría y trigonometría

DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. Javier Jiménez Espriú.

SECRETARIO GENERAL

Ing. Roberto Ruíz Vilá.

JEFE DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

Ing. Eduardo M. Solar González.

ELABORACION DE CONTENIDOS

Ing. Jesús E. Nolasco Martínez.
Ing. Jaime Parada Avila.
Ing. Arnulfo Andrade Delgado.
Ing. Erik Castañeda de I. P.

ADAPTACION PEDAGOGICA

Lic. Irma Hinojosa Félix.
Lic. María Cuairán Ruidíaz.

El presente material ha sido elaborado por profesores del Departamento de Matemáticas Básicas. Tiene por objeto, ayudar a los alumnos de primer ingreso a repasar los conceptos de Geometría y Trigonometría que son antecedentes indispensables para los cursos que se imparten en los primeros semestres de la Facultad de Ingeniería.

La estructura de este fascículo está organizada de la siguiente manera:

El contenido temático forma dos unidades, la primera de Geometría y la segunda de Trigonometría. Ambas unidades se dividirán en partes llamadas módulos. Con esto se pretende dosificar los contenidos para que se logre un mayor conocimiento y comprensión de la materia, pretendiendo garantizar el cumplimiento de las métas propuestas.

El fascículo cuenta con elementos didácticos que tienen por objeto facilitar el estudio y permitir un mayor aprovechamiento del mismo.

A continuación se presentan dichos elementos, con el fin de que el fascículo se utilice adecuadamente.

En la unidad aparecen:

a) Objetivos generales.- Indican la conducta que deben lograr los alumnos al finalizar el estudio de la unidad.

b) Introducción.- Muestra un panorama general del contenido.

Los elementos didácticos con que cuentan los módulos son:

a) Cuadro sinóptico.- Que es la síntesis del contenido presentada en forma esquemática.

b) Objetivos específicos.- Que se desglosan de los objetivos generales de la unidad.

c) Ejercicios propuestos.- Son actividades de aprendizaje que debe resolver el alumno. Tienen el propósito de facilitar la comprensión y la aplicación del contenido. Asimismo le permiten comprobar en qué medida ha logrado los objetivos de aprendizaje propuestos.

Al final del fascículo se encuentran:

a) Examen de autoevaluación.- Que tiene por objeto que el alumno pueda verificar por cuenta propia si ha alcanzado el mínimo necesario de los objetivos de aprendizaje correspondientes a la unidad.

b) Soluciones del examen de autoevaluación.- Para comprobar o cotejar sus respuestas.

c) Soluciones de los ejercicios propuestos.- En donde se concentran las respuestas correctas de los ejercicios.

d) Bibliografía básica.- Tiene como finalidad que el alumno consulte y profundice en aquellos temas que requiera.

Se recomienda al estudiante que una vez conocidos los resultados del Examen de Diagnóstico que se practica al inicio del primer Semestre sobre Antecedentes del Bachillerato, se dedique con intensidad al estudio de este material. También se le aconseja que para ampliar algún concepto o aclarar dudas específicas sobre Antecedentes de Geometría y Trigonometría, se dirija al Servicio de Asesoría que tiene instalado el Departamento de Matemáticas Básicas.

CONTENIDO

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Aplicará los conceptos fundamentales de ángulos, triángulos y circunferencia en la resolución de problemas geométricos.

INTRODUCCION

Esta unidad pretende estudiar los conceptos, teoremas y principios básicos de la Geometría Plana, con el objeto de que estos fundamentos teóricos se apliquen en la resolución de problemas geométricos.

CUADRO SINOPTICO

ANGULO ES LA ABERTURA ENTRE DOS RECTAS QUE SE INTERSECTAN EN UN PUNTO LLAMADO VERTICE.

MEDIDAS DE UN ANGULO
- Grados sexagesimales
- Radianes

EQUIVALENCIA
- $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \Rightarrow 1 \text{ rad} = 57.2958 \text{ grados}$
- $1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \Rightarrow 1 \text{ grado} = 0.01745 \text{ rad}$

TIPOS DE ANGULOS
- **Adyacentes:** Tienen el mismo vértice y un lado común siendo exteriores uno del otro.
- **Recto:** Aquél que mide 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad
- **Agudo:** Mide menos de 90°
- **Obtuso:** Mide más de 90°
- **Complementarios:** Cuando la suma de dos ángulos es de 90°
- **Sumplementarios:** Cuando la suma de dos ángulos es de 180°
- **Conjugados:** Cuando la suma de dos ángulos es de 360°

Objetivos específicos

> **Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:**
>
> 1. **Definirá los conceptos de ángulo, grado sexagesimal y radián.**
> 2. **Convertirá a radianes, el valor de un ángulo dado en grados sexagesimales y viceversa.**
> 3. **Definirá cuándo dos ángulos son: adyacentes, complementarios y conjugados.**

1.1 CONCEPTO DE ANGULO

Considérese que una línea recta OA, gira alrededor de su extremo O a una posición OB, permaneciendo en el mismo plano, como se muestra en la figura 1. Con este giro se dice que se genera un ángulo plano AOB = α.

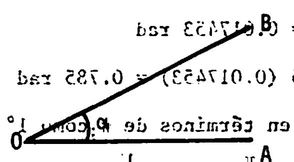


Figura 1

Al lado OA se le llama lado inicial del ángulo y al lado OB lado terminal del ángulo.

El punto O se conoce como el vértice del ángulo α.

1.2 MEDIDAS DE ANGULOS

> **Las principales unidades para expresar la medida de un ángulo son el grado sexagesimal y el radián, que también se conoce como unidad cíclica.**

1.2.1 EL GRADO SEXAGESIMAL

Esta unidad que pertenece al sistema sexagesimal, tiene como base el número 60.

La circunferencia se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales corresponde a un grado sexagesimal. El grado sexagesimal se subdivide a su vez en 60 minutos y éstos en 60 segundos. Los grados, minutos y segundos se representan respectivamente por a° b' c".

1.2.2 EL RADIAN

> **Un radián es el ángulo tal que si su vértice está colocado en el centro de un círculo, intersecta sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio del círculo.**

Así en la figura 2, si se toma sobre la circunferencia un arco $\widehat{AB}$ de longitud igual al radio y se trazan las rectas OA y OB, el ángulo AOB = α mide un radián.

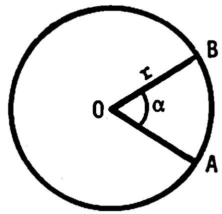


Figura 2

Para medir cualquier ángulo θ en radianes, se coloca su vértice en el centro de un círculo de radio r (figura 3), y si L es la longitud del arco intersectado en el círculo por el ángulo θ, entonces se tiene:

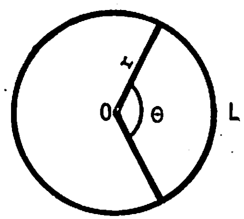


Figura 3

$$\text{El valor de } \theta \text{ en radianes} = \frac{L}{r}$$

1.2.3 CONVERSION DE MEDIDAS ANGULARES

Cuando θ es igual a 180° entonces el arco L, que intersecta sobre un círculo de radio r, es una semicircunferencia tal que $L = \pi r$, donde π es aproximadamente igual a 3.1416. De acuerdo a lo anterior, si se aplica la ecuación para obtener la medida de un ángulo en radianes, se tiene:

$$180° = \frac{L}{r}\text{ rad} = \frac{\pi r}{r}\text{ rad} = \pi\text{ rad} \quad \text{ó}$$

$$180° = \pi\text{ rad}$$

Esta última igualdad se utiliza como base para convertir el valor de un ángulo de grados a radianes y viceversa. Así de esta igualdad se obtiene que:

$1° = \frac{\pi}{180}$ rad, donde $\frac{\pi}{180}$ equivale aproximadamente a 0.017453

así que $\quad 1° = 0.017453$ rad

y también $1\text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$, donde $\frac{180°}{\pi}$ equivale aproximadamente a 57.296°

así que: $\quad 1\text{ rad} = 57.296°$

Ejemplos

1. Expresar cada uno de los siguientes ángulos en radianes.

a) 45°

Dado que $1° = 0.017453$ rad

$\Rightarrow 45° = 45\,(0.017453) = 0.785$ rad

Expresándolo en términos de π; como $1° = \frac{\pi}{180}$ rad

$\Rightarrow 45° = 45\ \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{1}{4}\pi\text{ rad}$

b) 385°

Al igual que en el ejemplo anterior.

$385° = 385\,(0.017453) = 6.719$ rad

Expresándolo en términos de π.

$$385° = 385 \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 2.1388 \, \pi \text{ rad}$$

2. Expresar cada uno de los siguientes ángulos en grados.

a) $\frac{\pi}{2}$ rad

Dado que 1 rad $= \frac{180°}{\pi}$

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$$

b) 2 rad

Como en el ejemplo anterior

$$2 \text{ rad} = 2 \frac{180°}{\pi} = 114.59°$$

1.3 TIPOS DE ANGULOS

1.3.1 ANGULOS ADYACENTES

Se dice que dos ángulos son adyacentes cuando tienen el mismo vértice y un lado común y son exteriores el uno del otro.

Por ejemplo los ángulos α y β de la figura 4, son adyacentes.

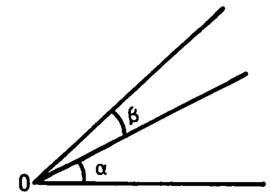


Figura 4

1.3.2 EL ANGULO RECTO

Definición: Un ángulo recto es aquél que mide exactamente 90°, que en radianes equivale a $\frac{\pi}{2}$ rad. Véase figura 5.

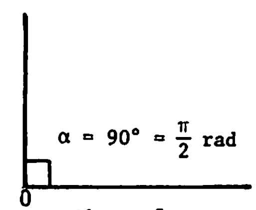


Figura 5

1.3.3 EL ANGULO AGUDO

Definición: Un ángulo agudo es aquél que tiene una magnitud menor de 90° ($\pi/2$ rad). Véase figura 6.

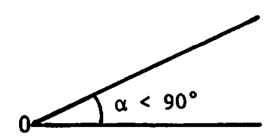


Figura 6

1.3.4 EL ANGULO OBTUSO

Definición: Un ángulo obtuso es aquél que tiene una magnitud mayor de 90° ($\pi/2$ rad). Véase figura 7.

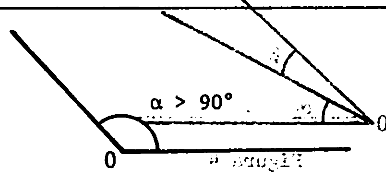


Figura 7

1.3.5 ANGULOS COMPLEMENTARIOS

Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, los ángulos se llaman complementarios y cada uno de ellos se llama el complemento del otro.

En la figura 8, los ángulos α y β son complementarios.

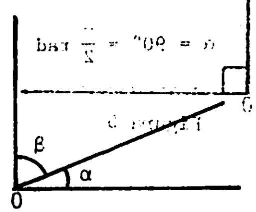


Figura 8

Se puede observar que si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

1.3.6 ANGULOS SUPLEMENTARIOS

Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, se dice que los ángulos son suplementarios y cada uno es el suplemento del otro.

Los ángulos α y β de la figura 9, son suplementarios.

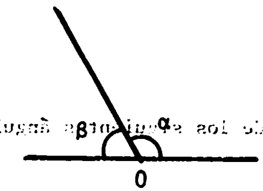


Figura 9

1.3.7 ANGULOS CONJUGADOS

Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 360°, se podrá decir que los ángulos son conjugados, y que cada uno es el conjugado del otro.

En la figura 10 los ángulos α y β son conjugados.

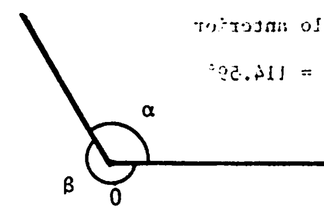


Figura 10

Ejemplos

1. Si la medida de un ángulo α es dos veces la medida de su complemento β, ¿cuánto miden α y β?

   Del enunciado $\alpha = 2\beta$ y como α y β son complementarios:

   $\alpha + \beta = 90°$ ó $2\beta + \beta = 90°$

   $3\beta = 90°$, de donde $\beta = \frac{90°}{3} = 30°$, por lo tanto:

   $\beta = 30°$ y $\alpha = 90° - 30° = 60°$

2. Determinar la medida del suplemento del ángulo α, cuya magnitud es 135°.

Se tiene: α + suplemento de $\alpha = 180°$

Suplemento de $\alpha = 180° - \alpha = 180° - 135° = 45°$

3. Si la medida de un ángulo α es cinco veces la medida de su conjugado β. ¿Cuánto miden α y β?

Del enunciado $\alpha = 5\beta$, como α y β son conjugados:

$\alpha + \beta = 360°$ ó $5\beta + \beta = 360°$

$6\beta = 360°$ y $\beta = \frac{360°}{6} = 60°$ por lo tanto

$\beta = 60°$ y $\alpha = 360° - 60° = 300°$

Ejercicios propuestos

MEDIDAS ANGULARES

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en radianes:

1. 800°
2. 210°
3. 150°

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en grados:

4. $\frac{2\pi}{3}$ rad
5. 9.4 rad
6. $\frac{\pi}{6}$ rad

TIPOS DE ANGULOS

7. Determinar la medida del complemento del ángulo α, cuya magnitud es 23°.
8. Si la medida de un ángulo α es tres veces la medida de su suplementario β, ¿cuánto miden α y β?
9. Si la medida de un ángulo α es once veces la medida de su conjugado β, ¿cuánto miden α y β?

MODULO 2 EL TRIANGULO, SUS TEOREMAS PRINCIPALES Y SEMEJANZA ENTRE TRIANGULOS

CUADRO SINOPTICO

TRIANGULO ES EL ESPACIO LIMITADO POR TRES RECTAS QUE SE CORTAN.

CLASIFICACION SEGUN SUS LADOS
- Equilátero: Cuando sus tres lados son iguales.
- Isósceles: Cuando dos de sus lados son iguales.
- Escaleno: Cuando sus tres lados son desiguales.

TEOREMAS
1. La suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°.
2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales.
3. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo, es mayor que el tercer lado, y la diferencia menor.

DOS TRIANGULOS SON SEMEJANTES SI SUS ANGULOS CORRESPONDIENTES SON IGUALES O SUS LADOS CORRESPONDIENTES SON PROPORCIONALES.

TEOREMAS SOBRE TRIANGULOS SEMEJANTES	1. Si dos triângulos son mutuamente equiángulos, son semejantes. 2. Si dos triángulos tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes. 3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro triángulo, ambos son semejantes. 4. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares, son semejantes.

TEOREMA DE PITAGORAS: EN UN TRIANGULO RECTANGULO, EL CUADRADO DE LA HIPOTENUSA ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS CATETOS.

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Enunciará los principales teoremas sobre triángulos.
2. Aplicará la semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
3. Resolverá triángulos rectángulos aplicando el Teorema de Pitágoras.

2.1 EL TRIANGULO

Llámase triángulo al espacio limitado por tres rectas que se cortan. Los puntos de corte se llaman vértices y los segmentos comprendidos entre los vértices, lados del triángulo.

En la figura 11 se presenta un triángulo de vértices A, B y C y de lados a, b y c. Los triángulos comúnmente se designan por sus vértices.

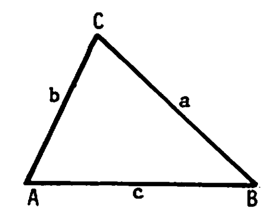


Figura 11

Considerando sus lados, los triángulos se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos.

2.1.1 EL TRIANGULO EQUILATERO

Definición: Un triángulo es equilátero cuando sus tres lados tienen la misma magnitud.

El triángulo ABC de la figura 12, es equilátero ya que $a = b = c$.

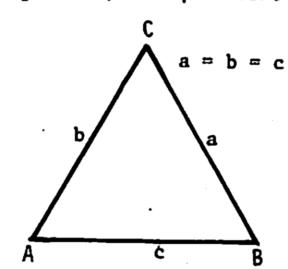


Figura 12

2.1.2 EL TRIANGULO ISOSCELES

Definición: Un triángulo se llama isósceles si tiene dos lados iguales.

Estos lados iguales se llaman laterales y el tercer lado se llama base del triángulo. El triángulo ABC de la figura 13, es isósceles ya que sus lados a y b son iguales.

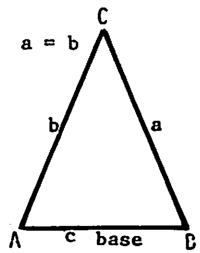


Figura 13

2.1.3 EL TRIANGULO ESCALENO

Definición: Un triángulo es escaleno cuando sus tres lados son desiguales.

El triángulo ABC de la figura 14, es escaleno ya que $a \neq b \neq c$.

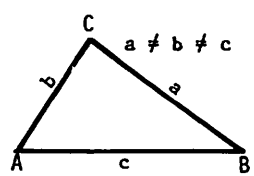


Figura 14

2.2 PRINCIPALES TEOREMAS SOBRE TRIANGULOS

A continuación se enuncian algunos teoremas importantes sobre triángulos, por ser de utilidad para el desarrollo de conceptos trigonométricos, así como para comprender algunos otros tópicos matemáticos.

Teorema 1. La suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°, o bien a π rad.

En la figura 15, se tiene que: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

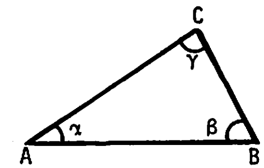


Figura 15

Teorema 2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales.

En la figura 16, como ABC es un triángulo isósceles, $a = b$, por lo tanto $\alpha = \beta$.

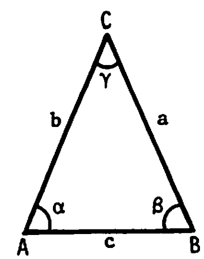
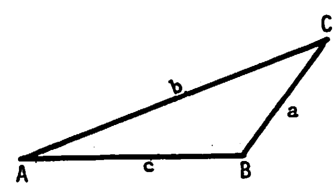


Figura 16

Teorema 3. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia menor.

Del triángulo ABC de la figura 17, se tiene que:

Figura 17



$$a + b > c,\quad a + c > b,\quad b + c > a$$
$$a - b < c,\quad a - c < b,\quad b - a < c$$
$$b - c < a,\quad c - a < b,\quad c - b < a$$

Ejemplo

1. Para el triángulo rectángulo ABC de la figura 18, si $\alpha = 40°$ determinar la magnitud de β y γ.

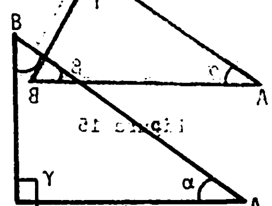


Figura 18

Como el triángulo es rectángulo $\gamma = 90°$. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \text{ó} \quad 40° + \beta + 90° = 180°$$

De donde:

$$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$$

2.3 TRIANGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales, o si sus lados correspondientes son proporcionales.

En la figura 19 los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes ya que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \;;\quad \beta_1 = \beta_2 \quad y \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad y \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

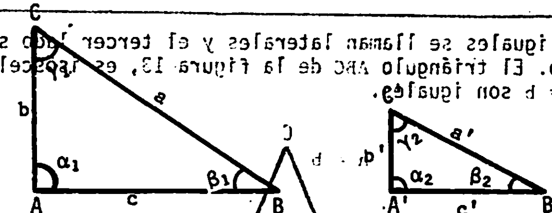


Figura 19

Los siguientes teoremas determinan la semejanza entre triángulos:

Teorema 1. Si dos triángulos son mutuamente equiángulos son semejantes. De este teorema, se desprenden los siguientes corolarios:

Corolario 1. Dos triángulos son semejantes si ambos tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Corolario 2. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.

Teorema 2. Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.

En base a la figura 20, este teorema dice que: si $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

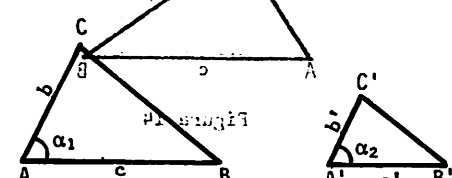


Figura 20

Entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

Teorema 3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro, los dos triángulos son semejantes.

En base a la figura 21, este teorema dice que:

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

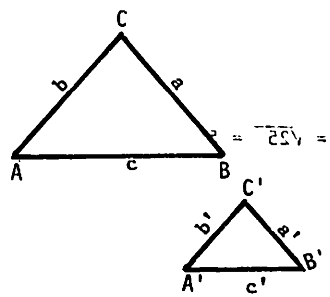


Figura 21

Entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes

Teorema 4. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

Ejemplo

1. Si en la figura 22, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{BC} = 50$ m, $\overline{DE} = 25$ m y $\overline{AD} = 30$ m ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?

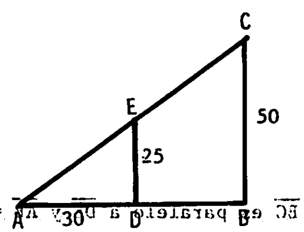


Figura 22

Como los lados de los triángulos ABC y ADE son paralelos, entonces son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \text{ ó } \frac{\overline{AB}}{30} = \frac{50}{25}$$

De donde:

$$\overline{AB} = \frac{50 \times 30}{25} = 60 \text{ m}$$

2.4 EL TEOREMA DE PITAGORAS

APLICACIONES

El teorema de Pitágoras, que relaciona los catetos y la hipotenusa de todo triángulo rectángulo, se enuncia como sigue:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

De acuerdo con el teorema, para el triángulo rectángulo de la figura 23, se tiene que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

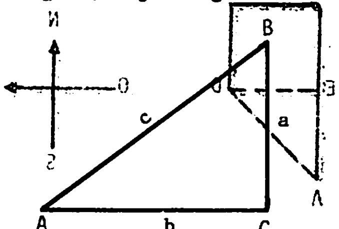


Figura 23

Ejemplos

En un triángulo rectángulo ABC, c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos.

1. Si a = 12 y b = 16. ¿Cuánto mide c ?

   Del teorema de Pitágoras:

   $$c^2 = a^2 + b^2 = (12)^2 + (16)^2 = 400, \text{ por lo tanto:}$$

   $$c = \sqrt{400} = 20$$

2. Si a = 24 y c = 25. ¿Cuánto mide b ?

   Del teorema de Pitágoras:

   $$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ó} \quad b^2 = c^2 - a^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49$$

   $$b = \sqrt{49} = 7$$

3. Una persona camina 7 kilómetros hacia el norte, 3 kilómetros hacia el este y 3 kilómetros hacia el sur. ¿ A qué distancia está del punto de partida ?

   Trazando una figura que representa las longitudes recorridas.

   $$\overline{AB} = 7,\ \overline{BC} = 3 \text{ y } \overline{CD} = 3$$

   De la figura 24, se observa que AED es un triángulo rectángulo y que :

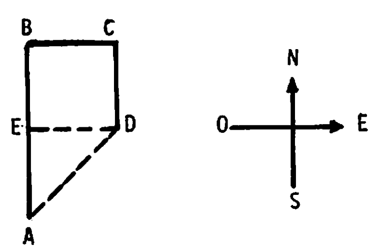


Figura 24

$$\overline{ED} = \overline{BC} = 3,\ \overline{EB} = \overline{CD} = 3,$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 7 - 3 = 4$$

Como la longitud buscada es $\overline{AD}$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AED:

$$(\overline{AD})^2 = (\overline{AE})^2 + (\overline{ED})^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25,$$

por lo tanto:

$$\overline{AD} = \sqrt{25} = 5$$

Ejercicios propuestos

TEOREMAS SOBRE TRIANGULOS

1. Si un ángulo interior de un triángulo rectángulo mide 65°, determinar la magnitud de sus otros ángulos interiores.

TRIANGULOS SEMEJANTES

2. Si en la figura 25, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ = 10 m, $\overline{AD}$ = 3 m y $\overline{AC}$ = 20 m.

   ¿Cuánto mide $\overline{AE}$?

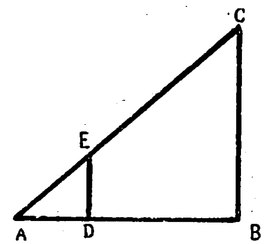


Figura 25

EL TEOREMA DE PITAGORAS. APLICACIONES

En un triángulo ABC, c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos.

3. Si $a = 1$ y $b = 2$ ¿Cuánto mide c?

4. Si $b = 18$ y $c = 20$ ¿Cuánto mide a?

5. Una persona camina 1 milla hacia el norte, 2 millas hacia el este, 3 millas hacia el norte y 4 millas hacia el este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

MODULO 3 LA CIRCUNFERENCIA

CUADRO SINOPTICO

CIRCUNFERENCIA: SEA P UN PUNTO DE UN PLANO Y SEA r UN NUMERO POSITIVO. LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO P Y RADIO r, ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS PUNTOS DEL PLANO QUE ESTAN A UNA DISTANCIA r DEL PUNTO P.

Elementos de la circunferencia:

- Cuerda: Se llama cuerda a todo segmento rectilíneo que une a dos puntos de una circunferencia.
- Diámetro: Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- Secante: Una secante a una circunferencia es una recta que la corta en dos cualesquiera de sus puntos.
- Tangente: Una tangente a una circunferencia es una recta en el mismo plano, que toca a la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia.

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Enunciará la definición de circunferencia.
2. Explicará los conceptos de cuerda, diámetro, secante y tangente de una circunferencia.

3.1 LA CIRCUNFERENCIA

Sea P un punto de un plano dado y sea r un número positivo.

> **La circunferencia con centro P y radio r es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia r del punto P.**

La figura 26 muestra una circunferencia.

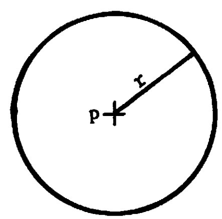


Figura 26

3.2 CONCEPTOS DE: CUERDA, DIAMETRO, SECANTE Y TANGENTE DE LA CIRCUNFERENCIA

3.2.1 CUERDA

> **Llámase cuerda a todo segmento rectilíneo que une dos puntos de una circunferencia y cuya magnitud es igual a la mínima distancia entre dichos puntos.**

En la figura 27 el segmento $\overline{AA'}$ es una cuerda.

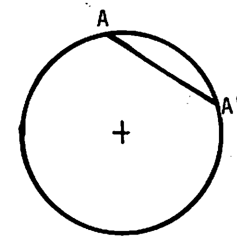


Figura 27

3.2.2 DIAMETRO

> **Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.**

3.2.3 SECANTE

> **Una secante a una circunferencia es una recta que la corta en dos cualesquiera de sus puntos.**

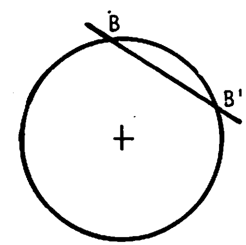


Figura 28

3.2.4 TANGENTE

> **Una tangente a una circunferencia es una recta, en el mismo plano, que toca a la circunferencia en un solo punto.**

Este punto se llama punto de tangencia o punto de contacto, y se dice que la recta y la circunferencia son tangentes en el punto de contacto.

En la figura 29, el punto A es el punto de tangencia.

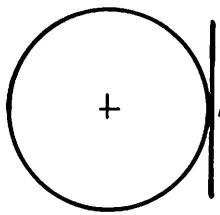


Figura 29

3.3 TEOREMA PARA TRAZAR LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Un teorema importante porque se utiliza para trazar la tangente a una circunferencia es:

> Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

UNIDAD II TRIGONOMETRIA

OBJETIVO GENERAL

> Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:
>
> Aplicará los conceptos fundamentales de la trigonometría plana en la resolución de problemas.

INTRODUCCION

> El propósito fundamental de esta unidad, es el estudio de las funciones trigonométricas y sus propiedades, así como su aplicación en la resolución de problemas trigonométricos.

MODULO 4 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS

CUADRO SINOPTICO

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE

30°, 45° Y 60°

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Definirá las razones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo agudo.
2. Calculará, sin el uso de tablas, el valor de todas las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

4.1 DEFINICION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO

Considérese un triángulo rectángulo, con un ángulo $\gamma = 90°$ como se muestra en la figura 1.

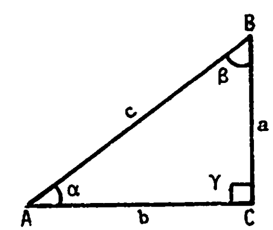


Figura 1

Se pueden establecer 6 razones diferentes de un lado del triángulo a otro. Estas razones que se conocen como razones trigonométricas, son aplicables a cualquiera de los ángulos agudos α o β.

Razones trigonométricas del ángulo α. Con relación a la figura 1:

c es la hipotenusa del triángulo

a es el cateto opuesto al ángulo α

b es el cateto adyacente al ángulo α

Las 6 razones trigonométricas para el ángulo α son:

$$\text{seno } \alpha;\ \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno } \alpha;\ \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente } \alpha;\ \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotangente } \alpha;\ \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{secante } \alpha;\ \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosecante } \alpha;\ \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Es conveniente observar que la cosecante, la secante y la cotangente son respectivamente recíprocas del seno, coseno y tangente. Con esta observación se pueden memorizar fácilmente las 6 razones trigonométricas.

Ejemplos

1. Encontrar los valores de las razones trigonométricas, para el ángulo agudo α, del triángulo ABC que se muestra en la figura 2

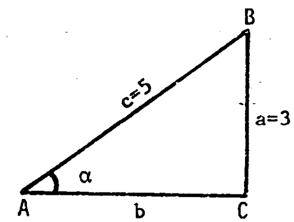


Figura 2

Datos a = 3   c = 5

Por medio del teorema de Pitágoras se encuentra el valor del cateto adyacente b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4} \qquad \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3}$$

2. Encontrar los valores de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, cuyo seno es igual a 1/2.

Como se sabe: $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{1}{2}$

Se puede representar un triángulo rectángulo, con un ángulo agudo α, cuyo cateto opuesto sea igual a 1 y con una hipotenusa igual a 2 (figura 3). El valor del cateto adyacente b, se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras.

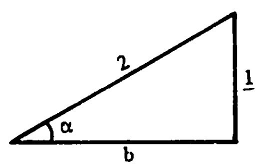


Figura 3

$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

Aplicando las fórmulas de las razones trigonométricas se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \qquad \csc \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot \alpha = \sqrt{3}$$

4.2 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 30°, 45° Y 60°

4.2.1 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 30° Y 60°

Para determinar las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, se traza un triángulo equilátero ABD con 2 unidades por lado con una unidad de longitud adecuada, por ejemplo centímetros, figura 4. Enseguida se traza una perpendicular a la base $\overline{AD}$ del triángulo desde el vértice B.

Como se muestra en la figura 4, ABC es un triángulo con:

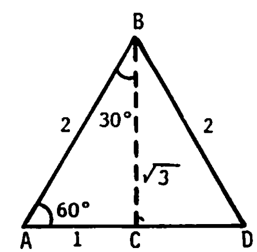


Figura 4

$\hat{BAC} = 60°$, $\hat{ABC} = 30°$, $\hat{ACB} = 90°$

$\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 1$ y por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

De la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo, se tiene:

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \text{sen } 30°$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \cot 30°$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

$$\sec 60° = \frac{2}{1} = 2 = \csc 30°$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30°$$

4.2.2 RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DE 45°

Para determinar las razones trigonométricas de un ángulo de 45°, se construye un triángulo rectángulo con ambos catetos iguales a la unidad (figura 5), y el ángulo C igual a 90°. Por lo tanto los ángulos α y β son iguales a 45°. Del teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa del triángulo es:

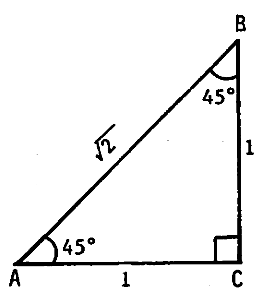


Figura 5

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo, se tiene:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Ejemplos

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

1. $$\frac{(\sec 30°)\ (\text{sen } 60°) + \tan 45°}{\csc 30°} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

2. $$\frac{(\cot 30°)^2 + \tan 45°}{2 \cos 60°} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{2\ (1/2)} = \frac{3 + 1}{1} = 4$$

Ejercicios propuestos

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO

1. Encontrar los valores de las razones trigonométricas para el ángulo agudo β del triángulo ABC que se muestra en la figura 6, siendo $a = 2$ y $b = 3$.

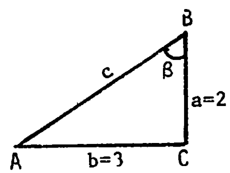


Figura 6

2. Encontrar el valor de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, cuya cotangente es igual a $\frac{1}{3}$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 30°, 45° y 60°

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

3. $\dfrac{2\tan 45° - 4\cos 60°}{\csc 60° \tan 60°}$

4. $\dfrac{(\sec 45° \csc 45°)^2}{\tan 45° + \sec 60°}$

5. $\dfrac{(\cot 30° \tan 60° + \tan 45°)^2}{\csc 30°}$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO EN GENERAL

$$\text{seno} = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$$

$$\text{coseno} = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{d}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotangente} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\text{secante} = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{d}{x}$$

$$\text{cosecante} = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS

Razones	1er. cuadrante	2o. cuadrante	3er. cuadrante	4o. cuadrante
seno y cosecante	+	+	-	-
coseno y secante	+	-	-	+
tangente y cotangente	+	-	+	-

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE:		es igual en valor absoluto a las del ángulo de:	
	150° 210° 330°		30°
	120° 240° 300°		60°
	135° 225° 315°		45°

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Calculará el valor de todas las razones trigonométricas, sin el uso de tablas, de los ángulos de 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315° y 330°.

2. Determinará con el uso de tablas, el valor de una razón trigonométrica de un ángulo cualquiera dado y viceversa.

5.1 DEFINICION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO EN GENERAL

Sea θ un ángulo en posición común (figuras 7 a 10), y sea P un punto de coordenadas rectangulares (x, y) perteneciente al lado terminal del ángulo θ.

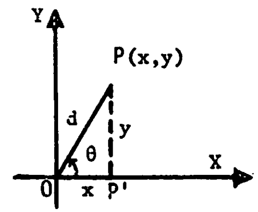


Figura 7

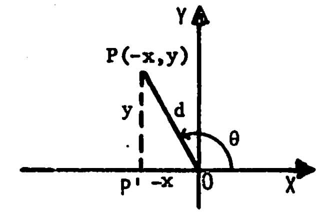


Figura 8

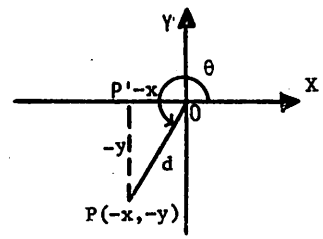


Figura 9

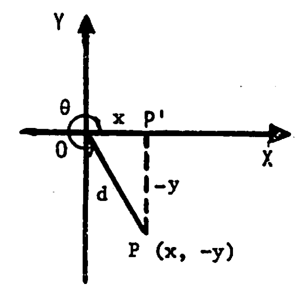


Figura 10

Si en cada una de las cuatro figuras, se traza una perpendicular desde el punto P al eje X, se tendrá un triángulo rectángulo OPP', de lados x, y, y d como se muestra en las figuras. Si se considera que d, distancia de P al origen, es positiva y que los valores de x y y dependen de la posición de P, las razones trigonométricas para cualquiera de los ángulos θ se definen como sigue:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{d}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{d}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$$

Estas definiciones también son aplicables para los ángulos negativos o mayores de 360°.

Se entiende como ángulos coterminales aquéllos cuya diferencia es igual a 360°. Así por ejemplo el ángulo de 390° es coterminal del ángulo de 30° y viseversa.

De las definiciones se puede concluir, que para dos ángulos que son coterminales, sus respectivas razones trigonométricas son idénticas. Entonces para encontrar las relaciones trigonométricas de ángulos negativos o mayores de 360°, se determina su respectivo coterminal entre 0° y 360° y enseguida se aplican las definiciones.

Lo anterior también se puede expresar de la siguiente forma: Los valores de las razones trigonométricas de un ángulo θ, son los mismos que para cualesquiera de los ángulos $\theta \pm n\, 360°$; donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ejemplos

1. Si el punto P (-6, 8) está sobre el lado terminal del ángulo θ, encontrar las 6 razones trigonométricas de θ.

Ubicando un punto P de coordenadas (-6, 8) en un sistema coordenado rectangular: $x = -6$; $y = 8$ (figura 11).

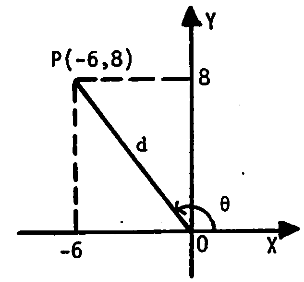


Figura 11

Por el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$d = 10$$

Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{d} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{d} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \sec \theta = \frac{d}{x} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \qquad \csc \theta = \frac{d}{y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

2. Encontrar el valor de sen 405°.

Determinando el coterminal de 405° entre 0° y 360°.

405° - 360° = 45°, de donde:

$$\text{sen } 405° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Encontrar el valor de tan (- 300°)

Encontrando el coterminal de - 300° entre 0° y 360°.

$- 300° + 360° = 60°$, de donde: $\tan(-300°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

5.2 SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS EN LOS CUATRO CUADRANTES

Puesto que "d" siempre es positiva y sen θ es igual a y/d, entonces sen θ tiene el mismo signo que y. Así, sen θ es positivo cuando θ termina en el 1o. ó 2o. cuadrantes ("y" es positiva) y negativo cuando termina en el 3er. ó 4o. cuadrantes ("y" es negativa). Haciendo consideraciones similares para las otras 5 razones, se llega a los resultados que se muestran en la figura 12.

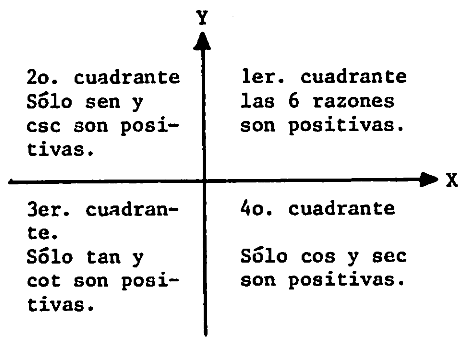


Figura 12

Ejemplos

Decir en qué cuadrante termina cada ángulo y establecer el signo del seno, coseno y tangente.

1. 320°.

   Como 270° < 320° < 360°, 320° termina en el 4o. cuadrante.

   sen 320° $= \frac{y}{d}$, como y es negativa, entonces sen 320° es negativo.

   cos 320° $= \frac{x}{d}$, como x es positiva, entonces cos 320° es positivo.

   tan 320° $= \frac{y}{x}$, y es negativa y x positiva, entonces tan 320° es negativa.

2. 480°

   Encontrando su coterminal entre 0° y 360°.

   480° - 360° = 120°, 480° y 120° son coterminales.

   Como 90° < 120° < 180°, 120° termina en el 2o. cuadrante.

   sen 120° $= \frac{y}{d}$, como y es positiva, entonces sen 120° es positivo.

   cos 120° $= \frac{x}{d}$, como x es negativa, entonces cos 120° es negativo.

   tan 120° $= \frac{y}{x}$, y positiva y x negativa, entonces tan 120° es negativa.

5.3 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315° y 330°

5.3.1 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 150°, 210° y 330°

Las razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°, son iguales en valor absoluto a las razones trigonométricas del ángulo de 30°; o sea que cuando más, difieren en el signo dependiendo de la razón y del cuadrante donde queda el lado terminal de dichos ángulos.

En la figura 13, se muestra el ángulo de 150° en posición normal. A partir de esta figura, se pueden calcular las razones trigonométricas de 150° trazando el triángulo rectángulo OPP'.

En la figura puede verse que:

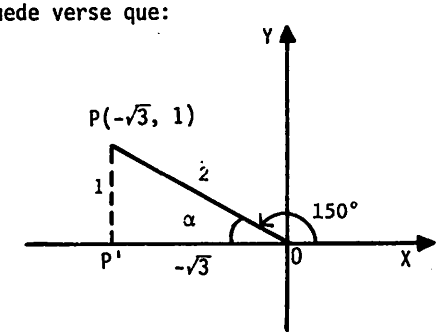


Figura 13

a) $\alpha = 180° - 150° = 30°$

b) Que el triángulo rectángulo OPP' es semejante al triángulo ABC de la figura 4 del inciso 4.2.

En virtud de lo anterior, los valores de los lados del triángulo OPP', se pueden hacer iguales respectivamente a los valores de los lados del triángulo ABC de la figura 4, es decir $OP' = BC = \sqrt{3}$, $PP' = AC = 1$ y $OP = AB = 2$. Entonces como el punto P se encuentra en el segundo cuadrante, tendrá por coordenadas $P(-\sqrt{3}, 1)$ y la distancia de este punto al origen será: $d = 2$.

Aplicando la definición de las razones trigonométricas para un ángulo en general, se tiene:

$$\text{sen } 150° = \frac{y}{d} = \frac{1}{2} \qquad \cot 150° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\cos 150° = \frac{x}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 150° = \frac{d}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 150° = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150° = \frac{d}{y} = \frac{2}{1} = 2$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 210°, se procede de igual forma que para el caso de 150°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son $(-\sqrt{3}, -1)$, figura 14.

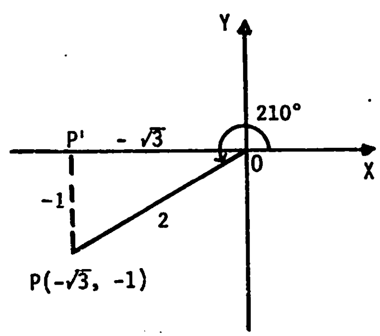


Figura 14

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 210° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \frac{x}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 210° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 210° = \frac{d}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 210° = \frac{d}{y} = \frac{2}{-1} = -2$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 330°, también se procede de la misma manera, solo que en este caso las coordenadas del punto P son $(\sqrt{3}, -1)$, figura 15.

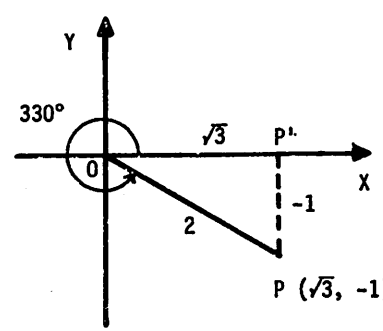


Figura 15

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 330° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \frac{x}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330° = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 330° = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

$$\sec 330° = \frac{d}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 330° = \frac{d}{y} = \frac{2}{-1} = -2$$

Ejemplos

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. $3 \csc 150° + \text{ sen } 210° - \cot 330° =$

$$3\,(2) - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = 6 - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{11}{2} + \sqrt{3}$$

2. $$\frac{(\tan 330°)\ (\cot 210°)\ + 1}{\csc 150°} = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}) + 1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

5.3.2 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 120°, 240° Y 300°

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300°, son iguales en valor absoluto a los del ángulo de 60°.

En la figura 16, se muestra el ángulo de 120° en posición normal. Trazando el triángulo rectángulo OPP', en la figura se puede ver que:

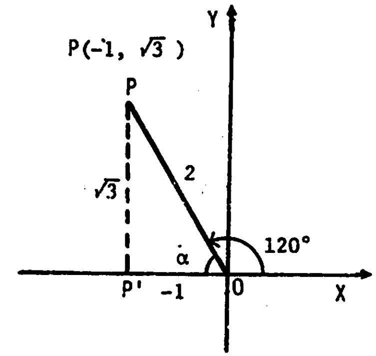


Figura 16

a) $\alpha = 180° - 120° = 60°$

b) Que el triángulo OPP' de la figura 16 es semejante al triángulo ABC de la figura 4, del inciso 4.2.

Entonces OP' = 1, PP' = $\sqrt{3}$ y OP = 2. En este caso el punto P tendrá por coordenadas a $(-1, \sqrt{3})$ y la distancia de este punto al origen será: $d = 2$.

Aplicando las razones trigonométricas de un ángulo en general se tiene:

$$\text{sen } 120° = \frac{y}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120° = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120° = \frac{d}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc 120° = \frac{d}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 240° se procede en igual forma que para el caso de 120°, solo que ahora las coordenadas del punto P son $(-1, -\sqrt{3})$, figura 17.

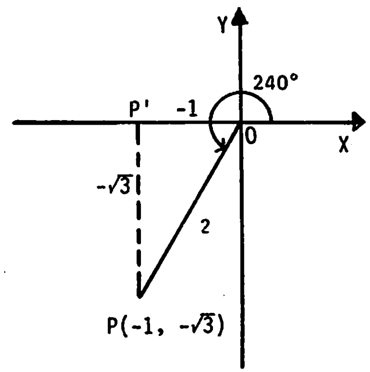


Figura 17

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 240° = \frac{y}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 240° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 240° = \frac{d}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc 240° = \frac{d}{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 300° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son $(1, -\sqrt{3})$, figura 18. Por lo tanto se tiene:

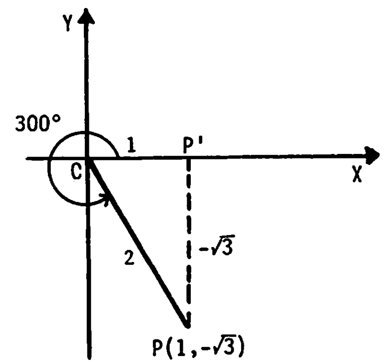


Figura 18

$$\text{sen } 300° = \frac{y}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 300° = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 300° = \frac{x}{d} = \frac{1}{2} \qquad \sec 300° = \frac{d}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 300° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \qquad \csc 300° = \frac{d}{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ejemplos

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. $-4 \cos 240° + \sec 300° - \sec 120° =$

$$-4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - (-2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

2. $$\frac{(\tan 300°)\ (\csc 240°) + 1}{\sec 120°} = \frac{(-\sqrt{3})\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 1}{-2} = \frac{2+1}{-2} = -\frac{3}{2}$$

5.3.3 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 135°, 225° y 315°

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°, son iguales en valor absoluto a las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

En la figura 19, se muestra el ángulo de 135° en posición normal. A partir de esta figura, se pueden calcular las razones trigonométricas de 135° trazando el triángulo rectángulo OPP'.

En la figura puede verse que:

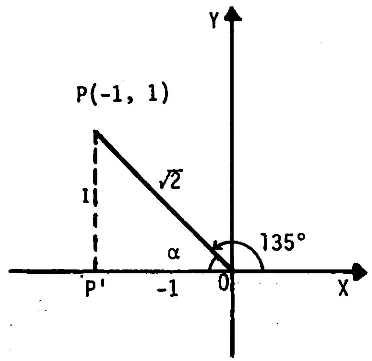


Figura 19

a) $\alpha = 180° - 135° = 45°$

b) Que el triángulo rectángulo OPP' de la figura 19, es semejante al triángulo ABC de la figura 5, del inciso 4.2 .

En virtud de lo anterior, los valores de los lados del triángulo OPP', se pueden hacer iguales respectivamente a los valores de los lados del triángulo ABC de la figura 5 del inciso 4.2, es decir:

$OP' = AC = 1, \quad PP' = BC = 1, \quad OP = AB = \sqrt{2}$

Entonces como el punto P se encuentra en el segundo cuadrante, tendrá por coordenadas a (-1, 1) y la distancia de este punto al origen será: $d = \sqrt{2}$.

Aplicando la definición de las razones trigonométricas para un ángulo en general se tiene:

$$\text{sen } 135° = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135° = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cot 135° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\sec 135° = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 135° = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 225°, se procede de igual forma que para el caso de 135°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son (-1, -1), figura 20.

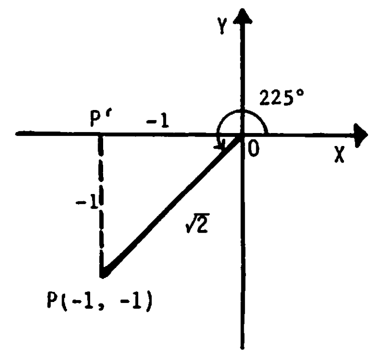


Figura 20

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 225° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 225° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cos 225° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 225° = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\tan 225° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \csc 225° = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 315°, también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son (1, -1), figura 21.

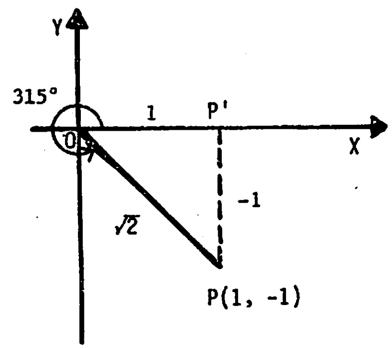


Figura 21

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 315° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 315° = \frac{x}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 315° = \frac{y}{x} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\cot 315° = \frac{x}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 315° = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 315° = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Ejemplos

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. $4 \tan 135° + 2 \sec 315° + 2 \csc 225° =$

   $4(-1) + 2(\sqrt{2}) + 2(-\sqrt{2}) = -4$

2. $$\frac{(\csc 135°)^2 - \cot 315°}{\tan 225°} = \frac{(\sqrt{2})^2 - (-1)}{1} = \frac{2+1}{1} = 3$$

5.4 DETERMINACION CON EL USO DE TABLAS DEL VALOR DE UNA RAZON TRIGONOMETRICA DE UN ANGULO AGUDO

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos se pueden encontrar, en forma aproximada, mediante el empleo de tablas trigonométricas.

Estas tablas se presentan en diferentes textos con 3, 4 ó 5 cifras decimales.

En algunas de estas tablas los valores de las razones trigonométricas se presentan en intervalos de 10', y en caso de que el ángulo cuya razón trigonométrica se desea encontrar tenga un número de minutos que no sea múltiplo de 10, se utilizan las partes proporcionales. Es recomendable que para los ejemplos que a continuación se presentan, se disponga de un ejemplar de estas tablas, para comprender su manejo.

Ejemplo

Hallar el valor de: $\cos 44° 52'$

En la tabla del coseno natural, se localiza en la columna cuyo encabezado es N, el número 44 y se sigue por ese mismo renglón hasta la columna cuyo encabezado es 50', encontrándose el valor de 0.7092. Se sigue por el mismo renglón hasta la columna de partes proporcionales de encabezado 2' donde se encuentra el número 4, que equivale a 0.0004. Como se especifica en las columnas de partes proporcionales que éstas se restan, se tendrá:

$0.7092 - 0.0004 = 0.7088$, de donde: $\cos 44° 52' = 0.7088$

5.4.1 DETERMINACION DEL ANGULO AGUDO DADA UNA DE SUS RAZONES TRIGONOMETRICAS

Considerando el mismo tipo de tablas que para 5.4 la determinación del ángulo, dada una de sus razones se mostrará con el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Dado sen $\alpha = 0.5040$, encontrar el ángulo α

En la tabla del seno natural, se busca en las columnas el valor de 0.5040. Se encuentra que el valor inferior más cercano al dado es 0.5025 que corresponde a: 30° 10'.

Se calcula la diferencia entre el valor dado, 0.5040 y el hallado en las tablas 0.5025. La diferencia 0.0015, que equivale a 15 partes proporcionales, se busca en el mismo renglón en las columnas de partes proporcionales, localizándose en la columna cuyo encabezado es 6'.

Como el seno de un ángulo agudo es mayor conforme aumenta el ángulo, entonces sumando 6' a 30° 10' se tiene:

$30° 10' + 6' = 30° 16'$, de donde: $\alpha = 30° 16'$

Ejercicios propuestos

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO EN GENERAL

1. Si el punto P (- 3, -4) está sobre el lado terminal del ángulo θ, encontrar el valor de las 6 razones trigonométricas de θ.

Encontrar el valor de las siguientes expresiones.

2. $\csc 750° =$
3. $\text{sen}(-315°) =$
4. $\tan 420° =$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS EN LOS CUATRO CUADRANTES

Decir en qué cuadrante termina cada ángulo y establecer el signo del seno, coseno y tangente.

5. 125°
6. 750°
7. -120°

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 150°, 210° y 330°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

8. $3 \cot 150° + 4 \text{ sen } 210° - 2 \csc 330° =$
9. $2 \text{ sen } 150° - \frac{1}{2} \csc 150° - 2 \text{ sen } 330° =$
10. $\dfrac{(\csc 210°)(\csc 150°) + 8}{\csc 330°} =$
11. $\dfrac{(\sec 150°)(\cot 210°) + \csc 330°}{2} =$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 120°, 240° y 300°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

12. $\text{sen } 120° - \cos 300° - \cos 240° =$
13. $3 \tan 240° + 2 \sec 120° - \sec 300° =$
14. $\dfrac{(\csc 120°)(\tan 300°) + 1}{\sec 240°} =$
15. $\dfrac{-6 \cos 120° + (\tan 240°)^2}{\sec 300°} =$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 135°, 225° y 315°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

16. $\cot 315° + 10 \tan 225° - \text{sen } 135° =$
17. $-4 \tan 135° + \cot 225° + \tan 315° =$
18. $\dfrac{(\sec 315°)^2 - \tan 225°}{\csc 315°} =$

19. $\dfrac{(\tan 315°)\ (\tan 135°) - (\cos 225°)\ (\csc 315°)}{\text{sen } 135°} =$

DETERMINACION CON EL USO DE TABLAS EL VALOR DE UNA RAZON TRIGONOMETRICA DE UN ANGULO AGUDO

Hallar el valor de:

20. sen 29° 20' =

21. cos 60° 34' =

22. tan 42° 09' =

DETERMINACION DEL ANGULO AGUDO DADA UNA DE SUS RAZONES TRIGONOMETRICAS

Dado el valor de una rzón trigonométrica del ángulo, encontrarlo:

23. sen α = 0.9407

24. cos β = 0.7671

25. tan γ = 1.198

MODULO 6 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

CUADRO SINOPTICO

PITAGORICAS

$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \\ 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \end{array}\right.$$

INVERSAS

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\csc\theta} & \text{ó} & \csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} & \text{ó} & \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} & \text{ó} & \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}\right.$$

POR COCIENTE

$$\left\{\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \end{array}\right.$$

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Enunciará las identidades trigonométricas fundamentales.
2. Reducirá expresiones trigonométricas utilizando las identidades trigonométricas.

6.1 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES

Las identidades trigonométricas fundamentales se clasifican en tres grupos que son:

Identidades Pitagóricas:

(1) $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Identidades inversas:

(4) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$ ó $\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$

(5) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ ó $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(6) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ ó $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Identidades por cociente:

(7) $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ ó $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

6.2 APLICACIONES

En ingeniería frecuentemente es necesario simplificar expresiones que contienen razones trigonométricas, o bien, transformarlas en una forma particular. Las identidades trigonométricas fundamentales son útiles en tales situaciones, como se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. $\sec\theta - \sec\theta\,\text{sen}^2\theta = \sec\theta\,(1 - \text{sen}^2\theta)$

de la identidad (1):

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta,$

entonces:

$\sec\theta - \sec\theta\,\text{sen}^2\theta = \sec\theta\cos^2\theta$

de la identidad (5):

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, entonces:

$\sec\theta - \sec\theta\,\text{sen}^2\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}\cos^2\theta = \cos\theta$

2. $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\,\text{sen}^2\theta =$

de la identidad (7)

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ y $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$ entonces:

$\tan^2\theta = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$ y $\cot^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}$, por lo tanto:

$$\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\,\text{sen}^2\theta = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta +$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\text{sen}^2\theta = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$$

de la identidad (1)

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, entonces:

$\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\,\text{sen}^2\theta = 1$

Ejercicios propuestos

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{\tan\theta}{\sec^2\theta - 1} =$

2. $\text{sen}^2\theta\,(1 + \cot^2\theta) =$

3. $\text{sen}\,\theta\,\sec\theta\,\cot\theta =$

4. $\text{sen}^2\theta\,\sec^2\theta - \sec^2\theta =$

MODULO 7 FORMULAS DE REDUCCION

CUADRO SINOPTICO

FORMULAS PARA REDUCIR RAZONES TRIGONOMETRICAS

DE ANGULOS ENTRE 90° y 360°

$\text{sen}\,(90° + \theta) = \cos\theta$	$\csc\,(90° + \theta) = \sec\theta$
$\cos\,(90° + \theta) = -\,\text{sen}\,\theta$	$\sec\,(90° + \theta) = -\csc\theta$
$\tan\,(90° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot\,(90° + \theta) = -\tan\theta$

Para ángulos mayores de 360° ó negativos: Se encuentra su coterminal y se aplican las fórmulas anteriores.

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Aplicará las fórmulas para reducir razones trigonométricas de ángulos entre 90° y 360°, a razones de ángulos agudos.

7.1 METODO DE REDUCCION A ANGULOS AGUDOS

Cualquier razón trigonométrica de un ángulo entre 90° y 360°, se puede reducir a una razón trigonométrica de un ángulo agudo aplicando una o varias de las siguientes fórmulas:

$\text{sen}\ (90° + \Theta) = \cos \Theta$ $\qquad \csc\ (90° + \Theta) = \sec \Theta$

$\cos\ (90° + \Theta) = -\ \text{sen}\ \Theta$ $\qquad \sec\ (90° + \Theta) = -\ \csc \Theta$

$\tan\ (90° + \Theta) = -\ \cot \Theta$ $\qquad \cot\ (90° + \Theta) = -\ \tan \Theta$

Cuando θ resulta a 0°, 90°, 180° ó 270°, dos de la fórmulas anteriores no se aplican, ya que dos de las razones trigonométricas para cada uno de estos ángulos no están definidas.

Cuando se van a reducir razones trigonométricas de ángulos mayores de 360° o negativos, primero se encuentra su respectivo coterminal entre 0° y 360° y luego se aplican las fórmulas de reducción.

Ejemplos

Reducir cada una de las siguientes expresiones a una razón trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

1. $\text{sen}\ 200° = \text{sen}\ (90° + 110°) = \cos 110° = \cos (90° + 20°) =$

   $= -\ \text{sen}\ 20°$

2. $\cot 930°$

   Calculando su coterminal entre 0° y 360°.

   $930° - 360° = 570°;\ 570° - 360° = 210°$ entonces:

   $\cot 930° = \cot 210° = \cot (90° + 120°) = -\ \tan 120° =$

   $= -\ \tan (90° + 30°) = \cot 30°$

3. $\text{sen}\ (-100°) =$

   Calculando su coterminal entre 0° y 360°.

   $-100° + 360° = 260°$

   Entonces:

   $\text{sen}\ (-100°) = \text{sen}\ 260° = \text{sen}\ (90° + 170°) =$

   $= \cos 170° = \cos (90° + 80°) = -\ \text{sen}\ 80°$

Ejercicios propuestos

METODO DE REDUCCION A ANGULOS AGUDOS

Reducir cada una de las siguientes expresiones, a una razón trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

1. $\cos 160° =$
2. $\tan 220° =$
3. $\sec 2910° =$
4. $\text{sen}\ (-\ 30°) =$
5. $\tan (-\ 500°) =$

MODULO 8 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE DOS ANGULOS, DEL ANGULO DOBLE Y DEL ANGULO MITAD

CUADRO SINOPTICO

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

FORMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA DE DOS ANGULOS	FORMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA RESTA DE DOS ANGULOS
$\text{sen}\ (\alpha + \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta + \cos \alpha\ \text{sen}\ \beta$ $\cos\ (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$ $\tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\text{sen}\ (\alpha - \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta - \cos \alpha\ \text{sen}\ \beta$ $\cos\ (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$ $\tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

FORMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE	FORMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO MITAD
$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}$	$\text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Aplicará las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.
2. Aplicará las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente del ángulo doble y del ángulo mitad.

8.1 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

8.1.1 FORMULAS PARA LA SUMA

Sin entrar en la demostración, se presentan a continuación las fórmulas para calcular:

$$\text{sen}\ (\alpha + \beta),\ \cos\ (\alpha + \beta)\ \text{y}\ \tan\ (\alpha + \beta)$$

$$\text{sen}\ (\alpha + \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta + \cos \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

$$\cos\ (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

$$\tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Para las fórmulas sen $(\alpha + \beta)$ y cos $(\alpha + \beta)$, α y β puede ser cualquier ángulo; mientras que para la fórmula tan $(\alpha + \beta)$, α ó β no deben ser múltiplos impares de 90°, ya que en tal situación, tan α ó tan β no está definida.

8.1.2 FORMULAS PARA LA RESTA

A partir de las fórmulas para la suma, se deducen fácilmente las fórmulas para la resta que son:

$$\text{sen}\ (\alpha - \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta - \cos \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

$$\cos\ (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

$$\tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

También en este caso para tan $(\alpha - \beta)$, α ó β no deben ser múltiplos impares de 90°.

Ejemplos

Aplicando las fórmulas de suma o resta de dos ángulos, calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. sen 105°, haciendo $\alpha = 45°$. $\beta = 60°$.

$$\text{sen}\ 105° = \text{sen}\ (45° + 60°) = \text{sen}\ 45° \cos 60° + \cos 45°\ \text{sen}\ 60° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

2. tan 15°, haciendo $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$.

$$\tan 15° = \tan\ (60° - 45°) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})\ (1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

8.2 RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE Y DEL ANGULO MITAD

8.2.1 FORMULAS PARA CALCULAR EL SENO, EL COSENO Y LA TANGENTE DEL ANGULO DOBLE

Utilizando las fórmulas para la suma de dos ángulos y haciendo $\beta = \alpha$, se puede demostrar que:

$$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2\ \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

8.2.2 FORMULAS PARA CALCULAR EL SENO, EL COSENO Y LA TANGENTE DEL ANGULO MITAD

A partir de la fórmula para $\cos 2\alpha$, se pueden establecer las siguientes expresiones para el ángulo mitad:

$$\text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Para la tangente del ángulo mitad, también se tienen las siguientes expresiones:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{ó} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

Ejemplos

1. Calcular el valor de cos 60° mediante cos 30° y sen 30° utilizando la fórmula para el coseno del ángulo doble.

$$\cos 60° = \cos^2 30° - \text{sen}^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Calcular el valor de sen 22.5° mediante cos 45°.

   Como 22.5° termina en el primer cuadrante, solo se toma la raíz positiva de la fórmula para sen $\alpha/2$.

$$\text{sen } 22.5° = \text{sen } \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Ejercicios propuestos

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. sen 75°, haciendo $\alpha = 45°$ y $\beta = 30°$
2. tan 105°, haciendo $\alpha = 45°$ y $\beta = 60°$
3. cos 15°, haciendo $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$
4. sen 15°, haciendo $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE Y DEL ANGULO MITAD

5. Calcular el valor de sen 60° mediante sen 30° y cos 30°
6. Calcular el valor de tan 240° mediante tan 120°
7. Calcular el valor de sen 105° sabiendo que $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. Calcular el valor de tan 22.5° mediante sen 45° y cos 45°

MODULO 9 LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

CUADRO SINOPTICO

LEY DE LOS SENOS

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

La ley de los senos se puede expresar como:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

En donde:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$$

LEY DE LOS COSENOS

En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

La ley de los cosenos se puede expresar como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

<u>Objetivos específicos</u>

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Aplicará la ley de los senos en la resolución de un triángulo.
2. Aplicará la ley de los cosenos en la resolución de un triángulo.

9.1 LEY DE LOS SENOS. APLICACIONES

La ley de los senos que se aplica en la solución de algunos triángulos oblicuángulos, se enuncia de la siguiente manera:

Ley de los senos

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Con referencia a la figura 22, la ley de los senos se puede expresar como:

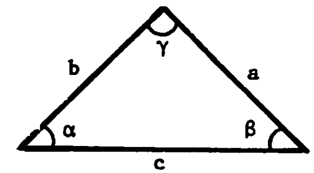


Figura 22

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

de donde son inmediatas las siguientes razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}, \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}, \frac{c}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$$

Ejemplos

1. Resolver el triángulo ABC dados $a = 62.5$, $\alpha = 112° 20'$ y $\gamma = 42° 10'$, figura 23.

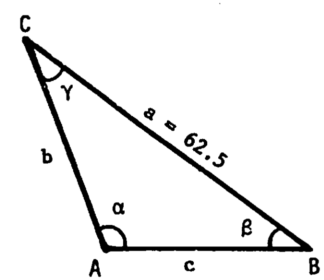


Figura 23

Este problema se puede resolver empleando la ley de los senos.

Incógnitas β, b, c.

Como la suma de los 3 ángulos interiores de un triángulo es 180° se tiene:

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (112°20' + 42°10') = 25°30'$

Aplicando la ley de los senos para b:

$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$, de donde $b = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$; entonces,

$$b = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = \frac{62.5 \text{ sen } 25°30'}{\text{sen } 112°20'} = \frac{62.5\ (0.4305)}{0.9250} = 29.1$$

Aplicando la ley de los senos para c:

$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$, de donde $c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$; entonces,

$$c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} = \frac{62.5 \text{ sen } 42°10'}{\text{sen } 112°20'} = \frac{62.5\ (0.6713)}{0.9250} = 45.4$$

Solución:

$\beta = 25°30'$, $b = 29.1$, $c = 45.4$

2. Resolver el triángulo ABC dados $b = 480$, $c = 628$ y $\gamma = 55°10'$, figura 24

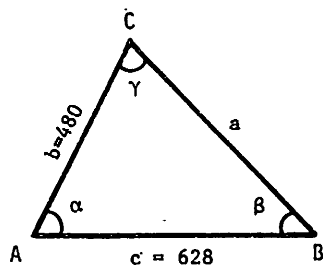


Figura 24

Como γ es agudo y $c > b$, el problema tiene solución única. Se aplica la ley de los senos.

Incógnitas: β, α y a.

Aplicando la ley de los senos para β:

$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$, de donde $\text{sen } \beta = \frac{b \text{ sen } \gamma}{c}$ entonces,

$$\text{sen } \beta = \frac{b \text{ sen } \gamma}{c} = \frac{480 \text{ sen } 55°10'}{628} = \frac{480\ (0.8208)}{628} = 0.6271$$

$\text{sen } \beta = 0.6271$ por lo tanto, $\beta = 38°50'$

Para α: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (38°50' + 55°10') = 86°$

Aplicando la ley de los senos para a:

$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$, de donde $a = \frac{b \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$; entonces,

$$a = \frac{480\ (\text{sen } 86°)}{\text{sen } 38°50'} = \frac{480\ (0.9976)}{0.6271} = 764$$

Solución:

$\alpha = 86°$, $\beta = 38°50'$, $a = 764$

9.2 LEY DE LOS COSENOS. APLICACIONES

Para la solución de problemas de triángulos, también se utiliza la ley de los cosenos que dice:

Ley de los cosenos

> En todo triángulo el cuadrado de un lado cualquiera, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Con referencia a la figura 25, la ley de los cosenos se puede expresar como:

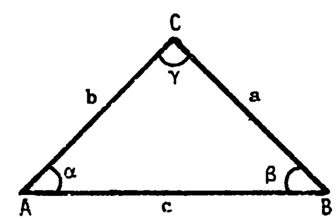


Figura 25

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ejemplos

3. Resolver el triángulo ABC dados $a = 132$, $b = 224$ y $\gamma = 28°40'$, figura 26.

Incógnitas: c, α, β

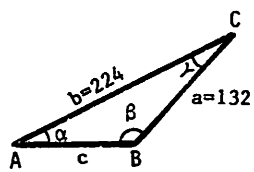


Figura 26

Aplicando la ley de los cosenos para c:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = (132)^2 + (224)^2 -$
$- 2\ (132)\ (224) \cos 28°40'$

$c^2 = 15714$, de donde $c = 125.36$

Aplicando la ley de los senos para α:

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma}$, de donde $\text{sen } \alpha = \dfrac{a \text{ sen } \gamma}{c}$; entonces,

$$\text{sen } \alpha = \frac{a \text{ sen } \gamma}{c} = \frac{132 \text{ sen } 28°40'}{125.36} = \frac{132\ (0.4797)}{125.36} = 0.5051$$

$\text{sen } \alpha = 0.5051$, por lo tanto $\alpha = 30°20'17''$

Para β, $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (30°20'17'' + 28°40') =$
$= 120°59'43''$

Solución: $c = 125.36$, $\alpha = 30°20'17''$, $\beta = 120°59'43''$

4. Resolver el triángulo ABC dados $a = 25.2$, $b = 37.8$ y $c = 43.4$ figura 27.

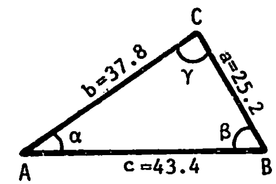


Figura 27

Incógnitas: α, β, γ

Aplicando la ley de los cosenos para α:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, de donde $\cos \alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Por lo tanto:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37.8)^2 + (43.4)^2 - (25.2)^2}{2\ (37.8)\ (43.4)} = 0.816$$

$\cos \alpha = 0.816$

Por lo tanto:

$$\alpha = 35°18'49''$$

Aplicando la ley de los cosenos para β:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$, de donde $\cos \beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

Entonces:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(25.2)^2 + (43.4)^2 - (37.8)^2}{2\ (25.2)\ (43.4)} = 0.4982$$

$\cos \beta = 0.4982$

Por lo tanto:

$$\beta = 60°07'08''$$

Para γ, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (35°18'49'' + 60°07'08'') =$
$= 84°34'03''$

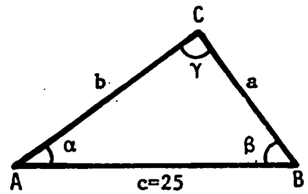
Solución:

$\alpha = 35°18'49''$, $\beta = 60°07'08''$, $\gamma = 84°34'03''$

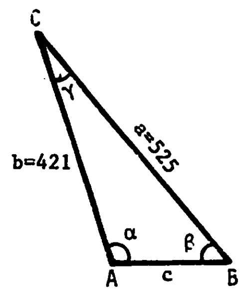
Ejercicios propuestos

LEY DE LOS SENOS

1. Resolver el triángulo ABC, dados $c = 25$, $\alpha = 35°$ y $\beta = 68°$.

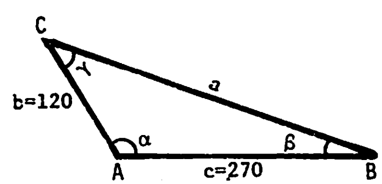


2. Resolver el triángulo ABC dados $a = 525$, $b = 421$ y $\alpha = 130°50'$.

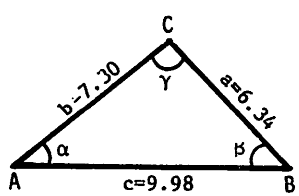


LEY DE LOS COSENOS

3. Resolver el triángulo ABC dados $b = 120$, $c = 270$ y α $118°40'$.



4. Resolver el triángulo ABC dados $a = 6.34$, $b = 7.30$ y $c = 9.98$.



EXAMEN DE AUTOEVALUACION

1. Convertir un ángulo dado, de grados sexagesimales a radianes y viceversa.

   Seleccione en cada uno de los casos la opción correcta.

   a) $45° =$ ( )

   A. π radianes

   B. 2π radianes

   C. $\frac{\pi}{4}$ radianes

   D. $\frac{\pi}{6}$ radianes

   b) $55°48'7'' =$ ( )

   A. 0.9739 radianes

   B. π radianes

   C. $\frac{\pi}{5}$ radianes

   D. $\frac{\pi}{6}$ radianes

2. Definir y determinar cuándo dos ángulos son adyacentes, complementarios, suplementarios o conjugados.

   Relacionar la columna de la izquierda con la respuesta correcta de la columna de la derecha.

A. Dos ángulos son adyacentes cuando:	( ) Su suma es igual a 90°
	( ) Su suma es igual a 180°
B. Dos ángulos son complementarios si:	( ) Su suma es igual a 270°

C. Dos ángulos son suplementarios si: ( ) Tiene un mismo vértice y un lado común y son exteriores el uno del otro.

D. Dos ángulos son conjugados si: ( ) Su suma es igual a 360°; o sea, cuando su suma es igual a un perígono.

3. Enunciar y aplicar los principales teoremas sobre triángulos.

Para las siguientes aseveraciones decir si son falsas o verdaderas.

a) La suma de los 3 ángulos interiores de todo triángulo es igual a π radianes.

( ) verdadero ( ) falso

b) Todo triángulo equilátero es equiángulo.

( ) verdadero ( ) falso

c) La suma de los ángulos interiores de un triángulo acutángulo no es igual a 180°

( ) verdadero ( ) falso

4. Explicar el concepto de triángulos semejantes.

Para las siguientes aseveraciones decir si son falsas o verdaderas.

a) Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los del otro, los dos triángulos son semejantes.

( ) verdadero ( ) falso

b) Dos triángulos son semejantes si la suma de sus ángulos es igual a 180°

( ) verdadero ( ) falso

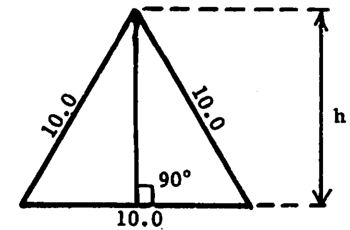
c) Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

( ) verdadero ( ) falso

5. Resolver triángulos rectángulos aplicando el Teorema de Pitágoras.

Seleccionar en cada uno de los siguientes casos la opción correcta.

a)



El valor de h es ( )

A. 10.00

B. 14.1421

C. 7.5548

D. 8.6603

b) Un hombre se encuentra parado a una cierta distancia de un farol. Si la sombra que proyecta el hombre sobre el suelo mide 2.40 m y la distancia lineal entre su cabeza y el extremo de su sombra es de 3.00 m, ¿cuánto mide el hombre? ( )

A. 1.60 m

B. 1.80 m

C. 1.50 m

D. 2.00 m

6. Definir el concepto de circunferencia.

Seleccione la opción correcta.

Una circunferencia es: ( )

A. Una curva totalmente cerrada.

B. Un conjunto de puntos del plano.

C. Un conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

D. Un conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado centro es menor o igual a una longitud llamada radio.

7. Explicar los conceptos de radio, diámetro, cuerda, secante y tangente de una circunferencia.

Anotar en cada paréntesis la letra que corresponde a la descripción correcta de cada elemento.

Radio ( )
Diámetro ( )
Cuerda ( )
Secante ( )
Tangente ( )

A. Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

B. Distancia entre dos puntos de la circunferencia.

C. Recta que toca a la circunferencia en un solo punto.

D. Segmento rectilineo determinado por dos puntos de la circunferencia.

E. Distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia.

F. Segmento determinado por dos puntos de la circunferencia, que pasa por el centro.

8. Definir las razones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo agudo.

En un triángulo rectángulo se definen las razones trigonométricas para un ángulo agudo α como sigue (anotar la opción correcta).

A. $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ — sen α = ( )

P. $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$ — cos α = ( )

C. $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ — tan α = ( )

D. $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$ — cot α = ( )

E. $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ — sec α = ( )

F. $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$ — csc α = ( )

9. Calcular, sin el uso de tablas, el valor de todas las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Relacione correctamente la columna de la izquierda con la columna de la derecha.

sen 0° = ( )	A. ... 0
tan 45° = ( )	B. ... 1
sec 30° = ( )	C. ... $\frac{2}{\sqrt{3}}$
cos 90° = ( )	D. ... $\frac{-1}{\sqrt{3}}$
cot 120° = ( )	E. ... $\sqrt{2}$
csc 135° = ( )	F. ... $\sqrt{3}$

10. Determinar con el uso de tablas, el valor de una razón trigonométrica de cualquier ángulo dado y viceversa.

Para las siguientes preguntas escoja la opción correcta.

1. Si sen $30° = \frac{1}{2}$ sen 35° = ( )

   A. 0.32

   B. 0.57

   C. 0.82

2. Si tan 45° = 1 tan 39° = ( )

   A. 0.81

   B. 1.22

   C. 0.3

3. Si sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 60°$; para sen $\alpha = 0.9$, α = ( )

   A. 54°

   B. 118°

   C. 64°

11. Enunciar las identidades trigonométricas fundamentales.

En las siguientes expresiones indique si es falsa o verdadera la afirmación hecha en cada una de ellas.

a) $\sqrt{\text{sen}^2 A + \cos^2 A} = \text{sen } A + \cos A$ ( )

b) $\tan^2 A - \sec^2 A = -1$ ( )

c) $1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A$ ( )

d) $\frac{1}{\cot^2 A} + \frac{1}{\cos^2 A} = 1$ ( )

e) $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$ ( )

f) $\sqrt{\csc^2 A - \cot^2 A} = 1$ ( )

g) $\text{sen } A = \sqrt{1 + \cos A}$ ( )

h) $\text{sen } A \csc A = 1$ ( )

i) $\tan A = \frac{1}{\csc A}$ ( )

j) $\cos A = \text{sen } A \cot A$ ( )

k) $\tan^2 A + \sec^2 A = 1$ ( )

12. Reducir expresiones utilizando las identidades trigonométricas.

Para los casos siguientes seleccione la opción correcta.

1) $\frac{1 + \tan^2 A}{\text{sen } A} =$ ( )

2) $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} =$ ( )

3) $\frac{1 - \text{sen } A}{\cos A} - \frac{\cos A}{1 + \text{sen } A} =$ ( )

4) $1 + \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\cot \alpha} + \frac{\sec \alpha}{\csc \alpha} =$ ( )

A. $(1 + \tan \alpha)^2$

B. 0

C. $1 - 2 \text{ sen } A$

D. $\sec^2 A \csc A$

E. $\cot^2 A + \csc^2 A$

F. $(\csc A - \cot A)^2$

G. $2 (1 + \tan \alpha)$

13. Enunciar y aplicar las fórmulas para reducir razones trigonométricas de ángulos entre 90° y 360°, a razones de ángulos agudos.

Para las siguientes expresiones decir si son falsas o verdaderas.

a) $\text{sen } (-A) = -\text{sen } A$ ( )

b) $\cos (-A) = -\cos A$ ( )

c) $\sec (-A) = \sec A$ ( )

d) $\text{sen } (90° + A) = \cos A$ ( )

e) $\cos (90° + A) = \text{sen } A$ ( )

f) $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ( )

g) $\text{sen } 315° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ( )

h) $\tan 330° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ( )

i) $\text{sen } 120° = -\frac{1}{2}$ ( )

14. Enunciar y aplicar las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.

Relacione correctamente la columna de la izquierda con la columna de la derecha.

1) $\text{sen } (\alpha + \beta)$ ( )

2) $\tan (45° + 60°)$ ( )

3) $\text{sen } (75°)$ ( )

4) $\cos (\alpha + \beta)$ ( )

A. $\text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

B. $\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$

C. $-2 - \sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

E. $\frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

F. $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

15. Enunciar y aplicar las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente del ángulo doble.

Seleccione la opción correcta:

a) La fórmula para calcular sen 2α es:

( ) $\frac{1}{2}$ sen α cos α

( ) 2 sen α cos α

( ) 2 $sen^2\alpha$ $cos^2\alpha$

b) La fórmula para calcular cos 2A es:

( ) $\cos^2 A - \text{sen}^2 A$

( ) $\cos^2 A + \text{sen}^2 A$

( ) $\text{sen}^2 A - \cos^2 A$

c) La fórmula para calcular tan 2α es:

( ) $\frac{1 - \tan^2\alpha}{2 \tan \alpha}$

( ) $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

( ) $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

d) Calcular el valor de sen 60°.

( ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

( ) $\sqrt{3}$

( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) Calcular el valor de cos 120°

( ) $-\frac{1}{2}$

( ) 2

( ) $\frac{1}{2}$

f) Calcular el valor de tan 30°.

( ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

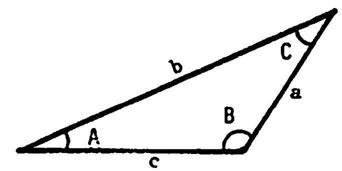
( ) 3

( ) $\sqrt{3}$

16. Enunciar y aplicar la ley de los senos en la solución de un triángulo oblicuángulo.

En lo que sigue seleccione la opción correcta.

Sea:



a) Dados: A = 33° B = 72°30' y a = 10

entonces b = ( )

A. 71.511

B. 17.511

C. 51.171

b) Dados: A = 104°30.3' B = 25° y b = 347.85

entonces C = ( )

A. 50°29.7'

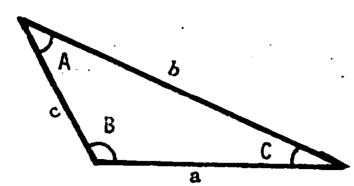
B. 29°50.7'

C. 79°25.7'

17. Enunciar y aplicar la ley de los cosenos en la solución de un triángulo.

En lo que sigue seleccione la opción correcta:

Sea:



a) Dados: a = 2500 b = 3500 y c = 4500

entonces B = ( )

A. 46°80'

B. 50°42'

C. 86°40'

b) Dados: a = 0.0035 b = 0.0029 y c = 0.0038

entonces A = ( )

A. 61°15'

B. 59°35'

C. 1°45'

SOLUCIONES AL EXAMEN DE AUTOEVALUACION

1. a) 45° = (C)

   b) 55°48'7" = (A)

2. (B) su suma es igual a 90°

   (C) su suma es igual a 180°

   ( ) su suma es igual a 270°

   (A) tienen un mismo vértice y un lado común y son externos el uno del otro.

   (D) su suma es igual a 360°, o sea, cuando su suma es igual a un perígono.

3. a) (X) verdadero

   b) (X) verdadero

   c) (X) falso

4. a) (X) verdadero

   b) (X) falso

   c) (X) verdadero

5. a) (D) b) (B)

6. C ... (X)

7. Radio (E)

   Diámetro (F)

   Cuerda (D)

   Secante (A)

   Tangente (C)

8. $\text{sen } \alpha$ = (E)

$\cos \alpha$ = (C)

$\tan \alpha$ = (A)

$\cot \alpha$ = (F)

$\sec \alpha$ = (D)

$\csc \alpha$ = (B)

9. $\text{sen } 0°$ = (A)

$\tan 45°$ = (B)

$\sec 30°$ = (C)

$\cos 90°$ = (A)

$\cot 120°$ = (D)

$\csc 135°$ = (E)

10. a) $\text{sen } 35°$ = (B)

b) $\tan 39°$ = (A)

c) α = (C)

11. a) (F)

b) (V)

c) (V)

d) (F)

e) (V)

f) (V)

g) (F)

h) (V)

i) (F)

j) (V)

k) (F)

12. 1. (D)

2. (E)

3. (A)

4. (G)

13. a) (V)

b) (F)

c) (V)

d) (V)

e) (F)

f) (V)

g) (V)

h) (F)

i) (F)

14. 1. (A)

2. (C)

3. (D)

4. (B)

15. a) $2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$ (X)

b) $\cos^2 A - \text{sen}^2 A$ (X)

c) $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ (X)

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (X)

e) $-\frac{1}{2}$ (X)

f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (X)

16. a) b = (B)

b) c = (A)

17. a) B = (B)

b) A = (A)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

MODULO I

MEDIDAS ANGULARES

1. 13.96 rad = 4.44 π rad

2. 3.665 = $\frac{7}{6}\pi$ rad

3. 2.617 rad = $\frac{5}{6}\pi$ rad

4. 120°

5. 538.582°

6. 30°

TIPOS DE ANGULOS

7. Complemento de α = 67°

8. α = 135°, β = 45°

9. α = 330°, β = 30°

MODULO 2

TEOREMAS SOBRE TRIANGULOS

1. 90°, 25°

TRIANGULOS SEMEJANTES

2. $\overline{AE}$ = 6 m

TEOREMA DE PITAGORAS. APLICACIONES

3. 2.236

4. 8.71

5. 7.21 millas

MODULO 4

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO

1. $\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\tan \beta = \frac{3}{2}$; $\cot \beta = \frac{2}{3}$;

$\sec \beta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $\csc \beta = \frac{\sqrt{13}}{3}$

2. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\tan \alpha = \frac{3}{1} = 3$; $\cot \alpha = \frac{1}{3}$;

$\sec \alpha = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$ y $\csc \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 30°, 45° y 60°

3. 0

4. $\frac{4}{3}$

5. 8

MODULO 5

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO EN GENERAL

1. $\operatorname{sen} \theta = \frac{-4}{5}$; $\cos \theta = -\frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$;

$\sec \theta = -\frac{5}{3}$ y $\csc \theta = \frac{-5}{4}$

2. 2

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sqrt{3}$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS EN LOS CUATRO CUADRANTES

5. 2o. cuadrante, sen (+), cos (-), tan (-)

6. 1er. cuadrante, sen (+), cos (+), tan (+)

7. 3er. cuadrante, sen (-), cos (-), tan (+)

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 150°, 210° y 330°

8. $2 - 3\sqrt{3}$

9. 1

10. -2

11. -2

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 120°, 240° y 300°

12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. $3\sqrt{3} - 6 = -0.8038$

14. $\frac{1}{2}$

15. 3

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 135°, 225° y 315°

16. $9 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

17. 4

18. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. 0

DETERMINACION CON EL USO DE TABLAS, DEL VALOR DE UNA RAZON TRIGONOME TRICA DE UN ANGULO AGUDO

20. 0.4899

21. 0.4914

22. 0.9052

DETERMINACION DEL ANGULO AGUDO DADA UNA DE SUS RAZONES TRIGONOMETRICAS

23. 70°10'8"

24. 39°54'21"

25. 50°8'51"

MODULO 6
IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

1. cot θ
2. 1
3. 1
4. -1

MODULO 7
FORMULAS DE REDUCCION

1. -cos 70°
2. tan 40°
3. sec 30°
4. -sen 30°
5. tan 40°

MODULO 8
RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

1. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
2. $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$
3. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
4. $\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\sqrt{3}$
7. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$
8. $\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

MODULO 9
LEY DE LOS SENOS

1. $a = 15; \quad b = 24; \quad \gamma = 77°$
2. $b = 142, \ \beta = 11°50', \ \gamma = 37°20'$

LEY DE LOS COSENOS

3. $a = 344, \ \beta = 17°50', \ \gamma = 43°30'$
4. $\alpha = 39°20'14'', \quad \beta = 46°52'30'', \quad \gamma = 93°47'16''$

BIBLIOGRAFIA

TITULO: GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA
AUTOR: J. A. Baldor
EDITORIAL Cultural Mexicana, S. A.

TITULO: GEOMETRIA MODERNA
AUTOR: Nichols-Palmer-Schacht
EDITORIAL: C.E.C.S.A.

TITULO: TEORIA Y PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA
AUTOR: Bernett Rich
EDITORIAL: Colección Schaum

TITULO: GEOMETRIA ELEMENTAL
AUTOR: Hemmerling
EDITORIAL: L.I.M.U.S.A.

TITULO: TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA
AUTOR: Frank Ayres Jr.
EDITORIAL: Colección Schaum

TITULO: ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA
AUTOR: Vance
EDITORIAL: Fondo Educativo Interamericano

TITULO: TRIGONOMETRIA
AUTOR: Hooper
EDITORIAL: Publicaciones Culturales

La composición tipográfica e ilustraciones de este fascículo se hicieron en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. La impresión, encuadernación y nueva cubierta se realizaron bajo la supervisión de Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V. Esta edición consta de 4 000 ejemplares y se terminó de imprimir en el mes de octubre de 1982, en los talleres de Impresores y Ediciones Sol, S.A. de C.V., Calle Salvador Sánchez Colín, núm. 20 México 16, D.F.