T3 TRANSFORMACIONES LINEALES

Una transformación lineal es una función que transforma los vectores del dominio V en otros mediante una regla de correspondencia, obteniéndose así vectores del condominio W. Para que T sea una tranformación lineal se deben cumplir dos principios 1) Superposición, 2) Homogeneidad.

Sea $T: V \to W$ donde V y W son espacios vectoriales sobre un campo K

T es una transformación lineal si cumple:

$a) T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v});\ \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$ Principio de superposición

$b) \alpha T(\bar{u}) = T(\alpha \bar{u}), \alpha \in K$ principio de homogeneidad

Un ejemplo de función que conocemos desde cálculo y geometría Analítica

$$\begin{array}{ll} \bar{V}_1 & T(\bar{V}_1) \\ \bar{V}_2 & T(\bar{V}_2) \\ \bar{V}_3 & T(\bar{V}_3) \\ \bar{V}_4 & T(\bar{V}_4) \end{array} \qquad \begin{array}{l} F: R \to R \\ F(X) = X \end{array}$$

X	$F(X)$
-4	-4
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3

X representa el dominio

F(X) evaluada representa el recorrido de F, que ha sido evaluado.

En este capítulo ya Podemos trabajar distintos espacios.

Ejemplo:

1) Determina si T es una transformación lineal $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$

$T(ax^2+bx+c) = (a+b, a-c, c)$ Se plantean dos vectores para utilizar el principio de superposición.

$\bar{u} = (ax^2+bx+c);$ $\quad \bar{v} = (a_1x^2+b_1x+c_1)$; Se adicion $\quad \bar{u}+\bar{v} = (a+a_1)x^2+(b+b_1)x+(c+c_1)$

Ahora se quitará el operador T de ambos lados de la igualdad.

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

$T((a+a_1)x^2+(b+b_1)x+(c+c_1) = T(ax^2+bx+c) + T(a_1x^2+b_1x+c_1)$

$(a+a_1+b+b_1, a+a_1-(c+c_1), c+c_1) = (a+b, a-c, c) + (a_1+b_1, a_1-c_1, c_1)$

$a+a_1+b+b_1+c+c_1-c-c_1, c+c_1) = (a+b+a_1+b_1, a-c+a_1-c_1, c+c_1)$

$\therefore$

Si cumple el principio de superposición

$\alpha(T(\bar{u})) = T(\alpha\bar{u})$

$\alpha(T(ax^2+bx+c) = T(\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c)$ Quitamos el operador T

$\alpha(a+b,a-c,c) = (\alpha a+\alpha b,\alpha a-\alpha c,\alpha c)$ $\therefore$ Si cumple el principio de homogeneidad

$\therefore$ Sí cumple y T es una transformación lineal

Ejemplo:

2) $T: M_2 \to P_2$ donde M_2 son matrices de orden 2

$T\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = (ax^2+(b-c)x+a-1;$ *Está es la regla de correspondencia*

$\bar{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; \bar{v} = \begin{bmatrix} m & n \\ n & p \end{bmatrix}; \bar{u}+\bar{v} = \begin{bmatrix} a+m & b+n \\ b+n & c+p \end{bmatrix}$

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

$T\begin{bmatrix} a+m & b+n \\ b+n & a+p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} m & n \\ n & p \end{bmatrix}$

$(a+m)x^2+(b+n-c-p)x+|\,a+m-1 = (ax^2+|\,(b-c)x+a-1)+\left[mx^2+(n-p)x+m\right]$

Lado derecho es diferente a lado izquierdo

$= ((a+m)x^2+(b-c+n-p)x+a+m-2)$

$\therefore$ No cumple el principio de superposición, no es transformación lineal

NÚCLEO DE LA TRANSFORMACIÓN

En el núcleo de una transformación se busca que las imágenes de cada vector del dominio (V) siempre sean el vector nulo en T($\bar{v}$) -

Se llama también núcleo o Kernell.
Analogías

En un sistema operativo de una computadora el núcleo es el sistema operativo.
Para que nosotros funcionemos nuestro núcleo es el corazón.

Definición formal:
Sea V y W dos espacios vectoriales sobre un campo K

$N(T) = \left\{T(\bar{v}) = \bar{0}_{W},\bar{v} \in V\right\}$

El núcleo de una transformación es un subespacio de V (Dominio)

El núcleo de T son todos los vectores del dominio V cuya imagen es el vector nulo.

Ejemplo:

Determina el núcleo de la transformación lineal si $T: M_2 \to P_2$

$$T(ax^2+bx+c)=\begin{bmatrix} a & b-c \\ a-c & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b-c \\ b-c & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a=0 & b=0 \\ b=c=0 & b=c \\ a-c=0 & a=c \end{matrix}$$

Si sustituimos a, b, c en $M_2 = ax^2+bx+c$, se obtiene que el $N(T)=\{0x^2+0x+0\}$ queda el vector nulo.

La dimensión del vector nulo es 0.

$dim\ N(T)=0$

Comprobación: $T(0x^2+0x+0)=\begin{bmatrix} 0 & 0-0 \\ 0+0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo:

Determinar el núcleo N(T), así como una de sus bases.

$T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,\mathrm{w},\mathrm{z})=(2x+3y-z, w-x+y, -3x-4z)$

Recordando que vamos a trabajar a $T(\bar{v}) = \bar{0}_w$; *w es el Codominio en este caso* $\mathbb{R}^3$;

por lo que el vector nulo será de $\mathbb{R}^3$

$(2x+3y-z, w-x+y, -3x-4z) = (0,0,0)$

Quedan tres ecuaciones:

$2x+3y-z=0$

$w-x+y=0$

$-3x-4z=0$

Trabajamos ahora reducción por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -17/5 & 4/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9/17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & -9/17 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & -9/17 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} x=12/17w \\ y=-5/17w; \ w\in\mathbb{R} \\ z=9/17w \end{matrix}$$

Reacomodando las variables en $\mathbb{R}^4$*;recordar que el núcleo es un subespacio del dominio.*

$(x,y,\mathrm{w},\mathrm{z}) \Rightarrow N(T)=\{(12/17w, 12/17w, w, 9/17w) \mid w\in\mathbb{R}\}$

Una base si a la variable libre w damos el valor de 1.

$B\,N(T)=(12/17, 12/17, 1, 9/17)$

$\dim\ N(T)=1$

RECORRIDO UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sea $T:V\to W$ una transformación lineal V y W dos espacios vectoriales.

El recorrido de una transformación lineal es un subespacio del codominio

Observar que T(V) , T de V mayúscula, no es lo mismo que $T(\bar{v})$, T(V) significa recorrido y $T(\bar{v})$ es regla de correspondencia.

$T(V)=\left\{\bar{w}\middle|T(\bar{v})=\bar{w},\ \ \bar{v}\in V,\ y\ \bar{w}\in W\right\}$ de $T=V\to W$

Teorema

Sea $T:V\to W$ una transformación lineal y $B=\left\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_{3,\ldots,}\bar{v}_n\right\}$ y $G=\left\{T(\bar{v}_1),T(\bar{v}_2),\ldots,T(\bar{v}_n)\right\}$ un conjunto generador de $T(V)$

G es un conjunto generador de $T(V)$ si la base que se obtiene a partir de G se puede escribir como una combinación lineal de B

$\bar{x}=\alpha T(\bar{v}_1)+\beta T(\bar{v}_2)+\ldots+\delta T(\bar{V}_n)$; $T(V)=\left\{\bar{w}\middle|T(\bar{V})=\bar{w}\right\}$;

Por lo que se debe cumplir otro teorema para comprobar

$\dim V=\dim N(T)+\dim T(V)$ que se interpreta como, la dimensión del dominio (V) es igual a la dimensión del Núcleo más la dimensión del recorrido.

Ejemplo:

Sea la transformación $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por: $T(x,y,z)=(y-2z,y+z,x+2y-3z);\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

a) Determine si T es lineal.
b) Obtenga el recorrido y el núcleo de T y la dimensión de ambos.
c) Verifique que se cumple $\dim V=\dim N(T)+\dim T(V)$

a.1) $T(\bar{u}+\bar{v})=T(\bar{u})+T(\bar{v})$ $\forall\ \bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}^3$ del dominio $\bar{u}=(x,y,z)$ $\bar{v}=(a,b,c)$

$\bar{u}+\bar{v}=(x+a,y+b,z+c)$

$T(x+a,y+b,z+c)=T(x,y,z)+T(a,b,c)$

$(y+b-2(z+c),y+b+z+c,x+a+2(y+b)-3(z+c))$

$(y-2z,y+z,x+2y-3z)+(b-2c,b+c,a+2b-3c)$

$(y+b-2(z+c),y+b+z+c,x+a+2(y+b)-3(z+c)=$

$(y+b-2(z+c),y+b+z+c,x+a+2(y+b)-3(z+c))$

$\therefore$ Si cumple el principio de superposición

a.2) $\alpha T(\bar{u})=T(\alpha\bar{u})$ $\bar{u}=(x,y,z)$; $\alpha T(x,y,z)=T(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

$\alpha(\mathrm{y}-2z,y+z,x+2y-3z)=(\alpha y-2\alpha z,\alpha y+\alpha z,\alpha x+2\alpha y-3\alpha z)$

$=\alpha(y-2z,y+z,x+2y-3z)$

$=\alpha(y-2z,y+z,x+2y-3z)$

$\therefore$ Sí cumple el principio de homogeneidad $\therefore$ es una transformación lineal

b) Núcleo de N(T)

$N(T) = ?$; $T(\bar{v}) = \bar{0}w$; $(y-2z, y+z, x+2y-3z) = (0,0,0)$

$y-2z=0$; $y+z=0$; $x+2y-3z=0$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

El núcleo de la transformación es un subespacio de V $V = \mathbb{R}^3$; $N(T) = \{(0,0,0)\}$;

$\dim N(T) = 0$

Recorrido de la Transformación Lineal

Recordando que el recorrido de la transformación lineal es un subespacio de W.

Tomamos una base de

$\mathbb{R}^3$

Base de $\mathbb{R}^3$

$B_{\mathbb{R}^3} = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

Obtenemos cada imagen de cada vector utilizamos la regla de correspondencia $T(\bar{v})$

$\mathrm{T}(1,0,0) = (0,0,1)$;

$\mathrm{T}(0,1,0) = (1,1,2)$;

$\mathrm{T}(0,0,1) = (-2,1,-3)$;

Por lo que tenemos *un conjunto de imágenes*

$T(B) = \{(0,0,1), (1,1,2), (-2,1,-3)\}$

*Para evitar tener ve*ctores que sean linealmente dependientes o *ser combinación lineal uno de otro*

Re*ducimos utilizando Gauss*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con los vectores linealmente independientes formamos un vector genérico, que es la combinación lineal

$\bar{x} = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$\bar{x} = (a,b,c)$

$T(V) = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Finalmente comprobamos el último inciso

c) $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$

$\mathbb{R}^3$ = vector nulo+ $\mathbb{R}^3$ $\qquad$ $3 = 0 + 3$ $\qquad$ $\therefore$ Sí se cumple

$3 = 3$

Ejemplo:

Sea la transformación $T: M \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a-d, b+c+d)$$

a) Obtenga $N(T)$
b) Determine $T(V)$ es el recorrido
c) Verifique si se cumple $dimV = dimN(T) + dimT(V)$

a) $T(\overline{V}) = \overline{0}w$; $(a+b+c, a-d, b+c+d) = (0,0,0)$

Se tendrán tres ecuaciones:

$a+b+c=0$; $a-d=0$; $b+c+d=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a-d=0$; $d=a$

$a+b+c=0$; $b=-c-d$

$c, d \in \mathbb{R}$

Recordar que el núcleo de la transformación es un subespacio del dominio en este caso es M por lo que reedefinimos

$N(T)\left\{\left|\begin{pmatrix} d & -c-d \\ c & d \end{pmatrix}\right| c, d \in \mathbb{R}\right\}$; Una base de N(T) si las variables libres son c y d en un caso c=1 y d=0

En otro caso c=0 y d=1, quedando como sigue:

$N(T) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\qquad \dim N(T) = 2$

b) $B_N = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$; Obtenemos la imagen de cada vector y luego quitamos los vectores lineamente dependientes o combinación lineal.

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1,0)$ $\qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1)$

$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1)$ $\qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos un vector genérico para crear el subespacio

$$\bar{x} = a(1,1,0) + b(0,-1,1) \qquad \bar{x} = (a, a-b, b)$$

Este es el recorrido un subespacio de R^3

$$T(V) = \{a, a-b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$B_T(V) = \{(1,1,0), (0,-1,1)\} \quad ; \ \dim T(V) = 2$$

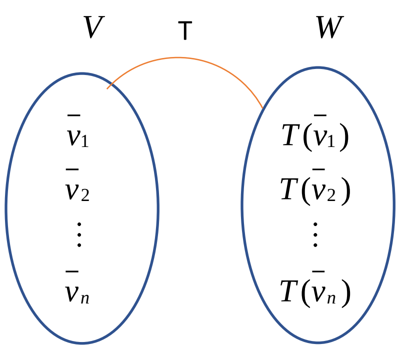
c) $\dim M = \dim N(T) + \dim T(V)$

$4 = 2 + 2$ $\qquad \therefore$ Sí se cumple

MATRIZ ASOCIADA A LA TRANSFORMACIÓN

Sea T una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ y sean $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_n\}$ y $B = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \ldots, \bar{w}_n\}$ bases de V y W respectivamente

La Matriz $M_B^A(T)$ es la matriz asociada a T correspondiente a las bases A y B



$$M_B^A(T) = \left[\left[T(\bar{v}_1)\right]_B \left[T(\bar{v}_2)\right]_B \left[T(\bar{v}_3)\right]_B \cdots \left[T(\bar{v}_n)\right]_B \right]$$

Nota: Se parece a la matriz de transición pero a cada vector de la base se tiene que obtener su imagen para así poderla trabajar. A es la base origen y B es la base destino.

Ejemplo:

Determinar la matriz asociada a la transformación lineal

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 3b & a-c \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad T: V \rightarrow W \qquad T: P_2 \rightarrow M_2 \text{ (simétricas)}$$

$$B_{M_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}; \qquad B_{P_2} = \{x^2, x, 1\}$$

$$T(x^2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$T(x)=\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}$$
$$T(1)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$
Cada imagen se pondrá en combinación de la base destino

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{bmatrix};\begin{cases}\alpha=1\\\beta=0\\\gamma=1\end{cases}$$
Ahora el segundo vector

$$\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\beta_1\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\gamma_1\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\beta_1&\gamma_1\end{bmatrix};\begin{cases}\alpha_1=0\\\beta_1=3\\\gamma_1=0\end{cases}$$
Ahora el tercer vector

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\alpha_2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\gamma_2\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_2&\beta_2\\\beta_2&\gamma_2\end{bmatrix};\begin{cases}\alpha_2=1\\\beta_2=0\\\gamma_2=-1\end{cases}$$
$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_1&\beta_2\\\gamma_1&\gamma_1&\gamma_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

Sean V y W los espacios vectoriales $V=\{ax+b\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ y $W=\{ax^2+bx+c\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}$

Si la transformación lineal $T:V\to W$ se define por $T(p(x))=xp(x);\forall P(x)\in V$ y $A=\{x,1\}$ de V y $B=\{x^2+2x+1,9x+2,4x^2+3x+3\}$ de W

Obtener la matriz asociada a T referida a las bases A y B

$$T(x)=?$$
$$T(1)=?$$

Se obtiene cada imagen de la base A con respect a la regla de correspondencia

$T(ax+b)=x(ax+b)$

$T(ax+b)=ax^2+bx$

Del vector x: $T(x)=x^2$, $a=1$, $b=0$; Del vector 1: $T(1)=x$, $a=0$, $b=1$

$M_B^A(T)=\left[\ T[(x)]_B\,[T(1)]_B\ \right]$

Ahora a cada imagen la ponemos en combinación lineal

$$[T(x)]=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

$$T(x)=\alpha\bar{b}_1+\beta\bar{b}_2+\gamma\bar{b}_3$$

$$x^2=\alpha\left(x^2+2x+1\right)+\beta(9x+2)+\gamma\left(4x^2+3x+3\right);$$
$$x^2=\alpha x^2+2\alpha x+\alpha+9\beta x+2\beta+4\gamma x^2+3\gamma x+3\gamma;$$
$$x^2=(\alpha+4\gamma)x^2+(2\alpha+9\beta+3\gamma)x+(\alpha+2\beta+3\gamma);$$

$$\alpha+4\gamma=1$$
$$2\alpha+9\beta+3\gamma=0$$
$$\alpha+2\beta+3\gamma=0$$

Reducimos el sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&1\\2&9&3&0\\1&2&3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&1\\0&9&-5&-2\\0&2&-1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&1\\0&4&-5/9&-2/9\\0&2&-1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&1\\0&1&-5/9&-2/9\\0&0&1/9&-5/9\end{array}\right]$$

Despejamos a cada uno de los escalares y los pondremos en columna

$\frac{1}{9}\gamma=\frac{-5}{9}$; $\gamma=-5$; $\beta-\frac{5}{9}\gamma=\frac{-2}{9}$ $\beta=\frac{-2}{9}+\frac{5}{9}(-5)$; $\beta=-\frac{2}{9}-\frac{25}{9}=-3$

$\alpha+4\gamma=1$; $\alpha=1-4\gamma$; $\alpha=1-4(-5)$; $\alpha=21$

Por lo que $[T(x)]_B=\begin{bmatrix}21\\-3\\-5\end{bmatrix}$

Ahora: $[T(1)]=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix}$

$$T(1)=\alpha_1\left(x^2+2x+1\right)+\beta_1(9x+2)+\gamma_1\left(4x^2+3x+3\right)$$
$$x=(\alpha_1+4\gamma_1)x^2+(2\alpha_1+9\beta_1+3\gamma_1)x+(\alpha_1+2\beta_1+3\gamma_1)$$

$\alpha_1 + 4\gamma_1 = 0$; $\quad 2\alpha_1 + 9\beta_1 + 3\gamma_1 = 1$; $\quad \alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1 = 0$

Reducimos el sistema de ecuaciones lineales para obtener cada uno de los escalares.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 1/9 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/9 & -2/9 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{9}\gamma_1 = -\frac{2}{9} \quad \gamma_1 = -2 \qquad \beta_1 - \frac{5}{9}\gamma_1 = \frac{1}{9}; \quad \beta_1 = \frac{1}{9} + \frac{5}{9}(-2); \quad \beta_1 = -\frac{9}{9}; \quad \beta_1 = -1$

$\alpha_1 + 4(-2) = 0; \qquad \alpha_1 = 8$

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por: $T(x, y) = (3x - 3y, y - x, x - y, 2y - 2x)$

a) Obtener la matriz asociada referida a las bases canónicas
b) Determinar el núcleo de T y verifica que es un subespacio del dominio
c) Obtener la dimensión del recorrido

a) $$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$N(T) = \left\{ \bar{v} \in V \middle| T(V) = \bar{0}w \right\}$

$(3x - 3y, y - x, x - y, 2y - 2x) = (0, 0, 0, 0)$

$3x - 3y = 0$

$y - x = 0$

$x - y = 0$

$2y - 2x = 0$

$$\begin{matrix} 3x - 3y = 0 \\ y - x = 0 \\ x - y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x - y = 0 \\ x = y, y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$N(T)$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$; $\quad N(T) = \{(y, y) | y \in \mathbb{R}\}$; $\quad \dim N(T) = 1$

$\bar{u} = (y, y); \quad \bar{v} = (m, m) \quad \bar{u} + \bar{v} = (y, y) + (m, m)$

$\bar{u} + \bar{v} = (y + m, y + m) \therefore$ Sí cumple

$\alpha\bar{u} = \alpha(y, y) \therefore$ Sí cumple

$\alpha\bar{u} = (\alpha y, \alpha y)$ $\therefore N(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

c) $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V) \longleftarrow$ Recorrido

$\dim V = 2;$ $\quad \dim N(T) = 1$; por lo tanto Podemos saber la dimensión del recorrido

$2 - 1 = \dim T(V) = 1$

Álgebra de transformaciones lineales

Recordando de Cálculo y Geometría Analítica y Álgebra matricial para que se pudiesen efectuar las operaciones se tenia que cumplir que:

$(f+g)(x)$
$D_f \cap D_g$ existe $\qquad M + F =$ mismo orden

$(f-g)(x)$
$D_f \cap D_g$ existe $\qquad \underset{mxn}{M} \; \underset{nxp}{N}$
mxp

$\left(f/x\right)(x)$
$D_f \cap D_g$ existe $\qquad M^{-1} \Rightarrow \det M \neq 0$ cuadrada

$f \circ f^{-1} = x \qquad MM^{-1} = I$

$f^{-1} \circ f = x \qquad M^{-1}M = I$

Realizar de la serie 3 de la página de Álgebra Lineal. Los siguientes ejercicios del 1 al 4. Del 1 sólo incisos a, b y c.