

DESARROLLO ECONÓMICO

Tema III

El modelo de crecimiento de Solow

Supuestos fundamentales

- ❑ Función agregada de producción
- ❑ Rendimientos constantes a escala.
- ❑ Rendimientos decrecientes del capital y del trabajo.
- ❑ Inversión planeada igual al ahorro planeado.

Rendimientos constantes

$$Y = F(K, N)$$

$$xY = F(xK, xN)$$

Rendimientos decrecientes del capital

- Primera derivada positiva (los incrementos marginales de capital, siendo el trabajo constante, generen incrementos en el producto)

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0$$

- Segunda derivada negativa (los incrementos en el producto, derivados de incrementos en el capital son cada vez menores)

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$$

Función agregada de producción por unidad de trabajo

Producción y capital por trabajador

$$\frac{Y}{N} = F\left(\frac{K}{N}, \frac{N}{N}\right)$$

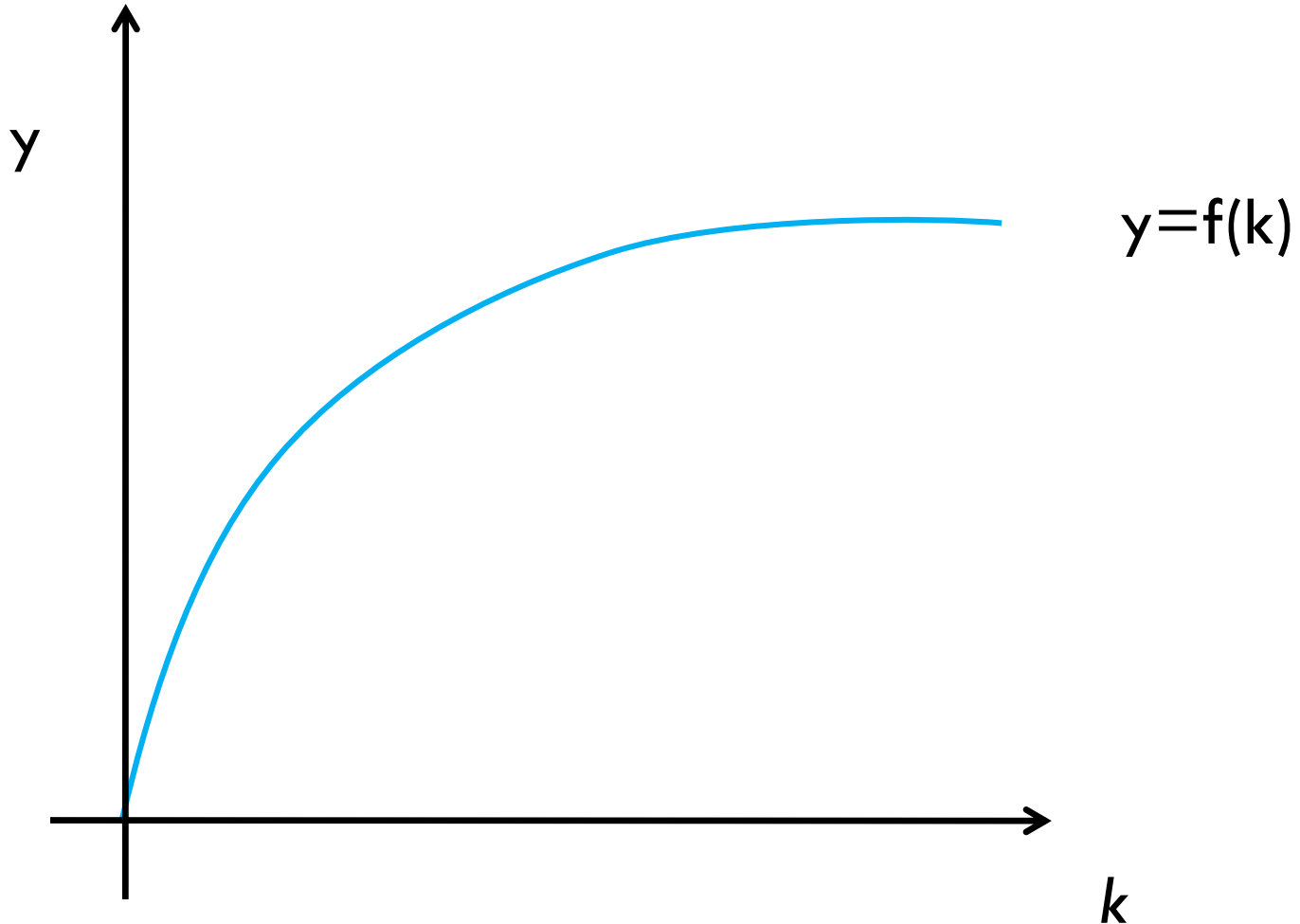
$$\Rightarrow \frac{Y}{N} = F\left(\frac{K}{N}, 1\right)$$

$$y = \frac{Y}{N} \quad y \quad k = \frac{K}{N}$$

$\Downarrow$

$$y = f(k)$$

Función agregada de producción



Modelo simple

- ❑ La población no crece
- ❑ No hay progreso tecnológico

Función de acumulación de capital (I)

- Ahorro
- Ahorro igual a inversión
- Ahorro e inversión por unidad de trabajo

Ahorro e Inversión

$$I = S \rightarrow S = sY$$

$$I = sY$$

$$\frac{I}{N} = s \frac{Y}{N}$$

$$i = sy$$

Función de acumulación de capital (II)

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

$$k_{t+1} = k_t - \delta k_t + sy_t$$

donde δ = tasa de depreciación

$$k_{t+1} - k_t = sy_t - \delta k_t$$

si $k = K/N$, $i = I/N$

$\Downarrow$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

$$\Delta k_t = sy_t - \delta k_t$$

si $i = sy$

Estado estacionario (I)

- ❑ Función de producción. El nivel de capital por trabajador determina la producción por trabajador

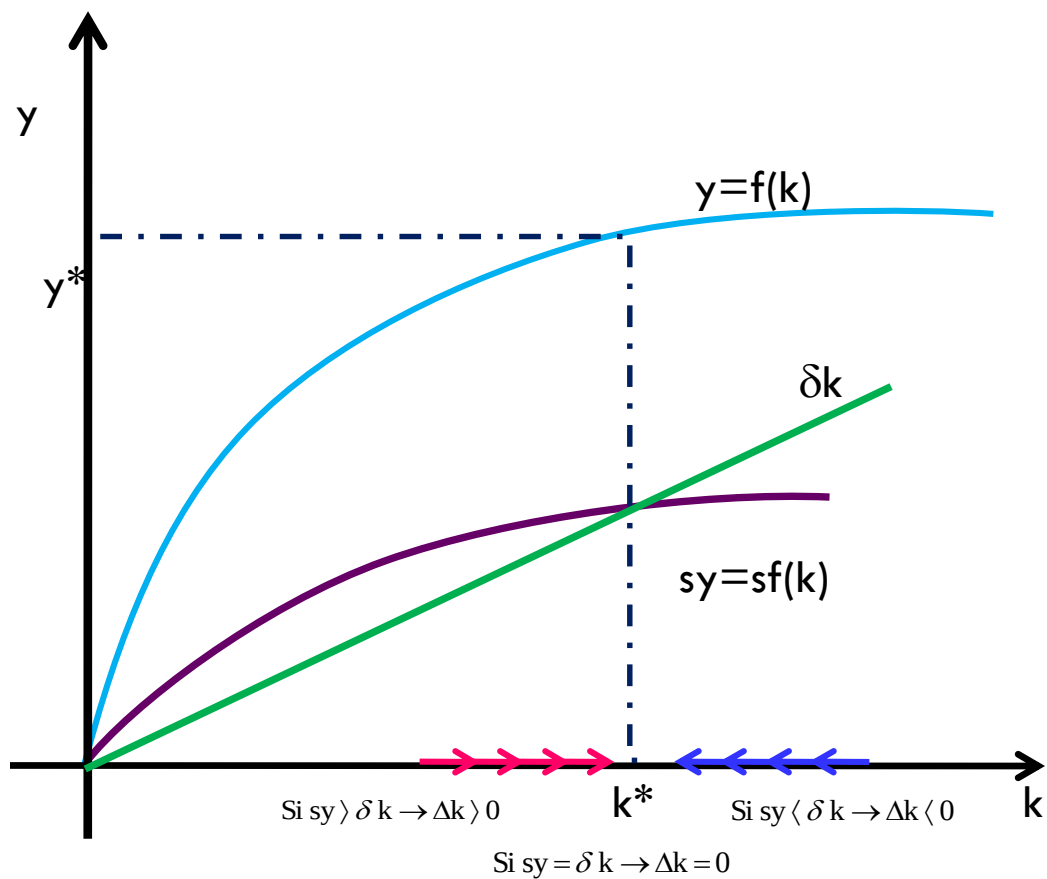
$$y=f(k)$$

- ❑ Función de ahorro (inversión). Dada la tasa de ahorro (s), la producción por trabajador determina el ahorro por trabajador

$$sy=sf(k)$$

- ❑ Función de consumo de capital por trabajador (δk) con coeficiente de depreciación (δ) constante.

Estado estacionario (II)



Estado estacionario

$$sf(k^*) = \delta k^*$$

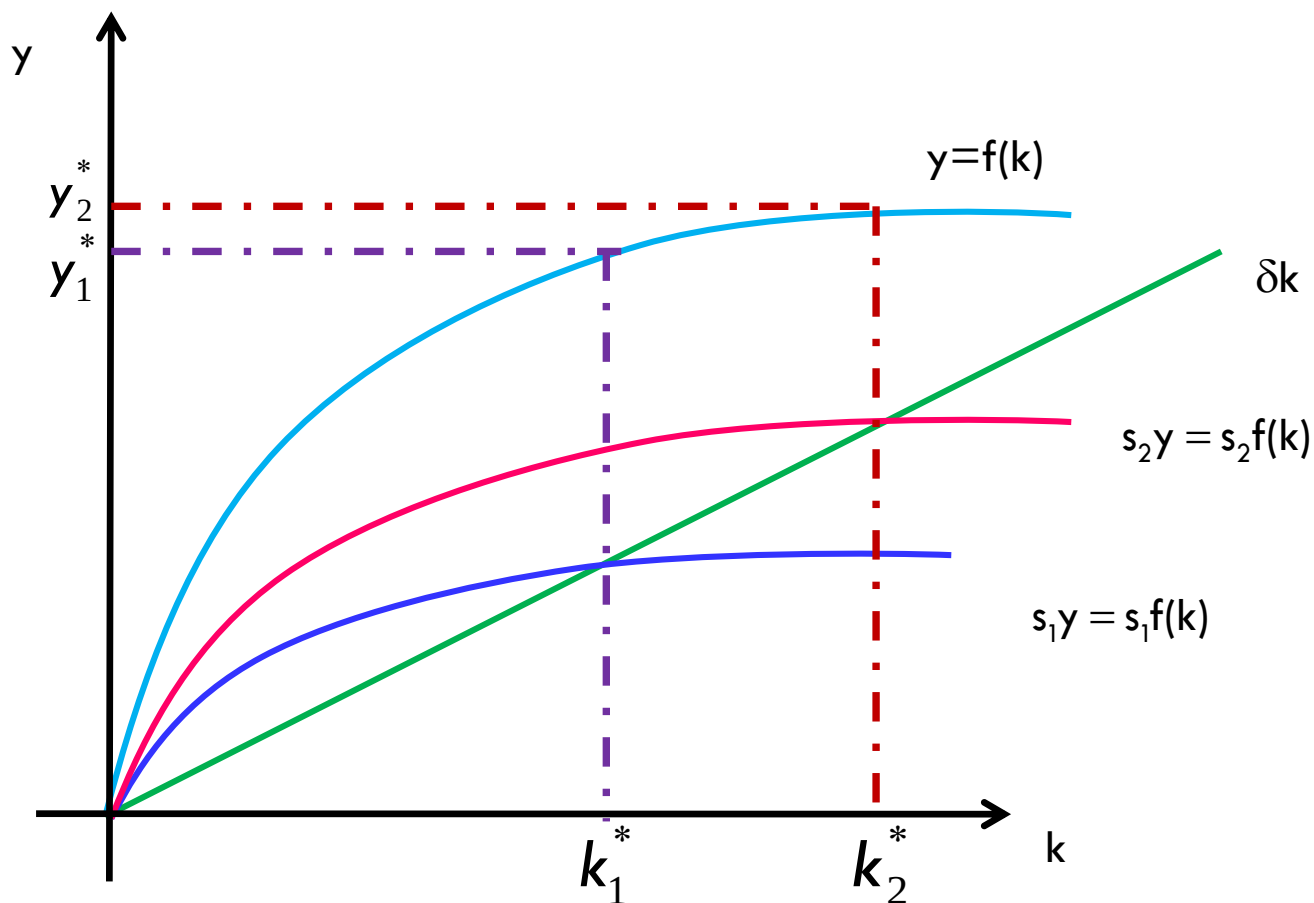
Estado estacionario (III)

- ❑ En el punto k^* la inversión es igual al consumo de capital por trabajador.
- ❑ O sea, en k^* el capital por trabajador se mantiene constante
- ❑ Si $k < k^*$, la inversión por trabajador supera a la depreciación por trabajador, incrementando el capital hasta el nivel k^* .
- ❑ Si $k > k^*$, la inversión por trabajador es menor que la depreciación por trabajador, disminuyendo el capital hasta el nivel k^* .
- ❑ Conclusión: k^* es un nivel de k de equilibrio
- ❑ Dado que $y=f(k)$, la economía tiende a un nivel de y^* de equilibrio.
- ❑ La economía deja de crecer en términos per cápita. Dado el supuesto de que la población es constante, el producto total es constante.

Ahorro, crecimiento e y^*

- ❑ La tasa de ahorro no influye en la tasa de crecimiento de la producción a largo plazo.
- ❑ El aumento de la tasa de ahorro genera un crecimiento mayor de la producción por trabajador durante un tiempo, pero no indefinidamente
- ❑ La tasa de ahorro determina el nivel de producción por trabajador a largo plazo. *Ceteris paribus*, los países que tienen una tasa de ahorro más alta tienen un nivel de y^* más alto.
- ❑ El nivel de producto por habitante y^* depende de s , pero no la tasa de crecimiento de y en el largo plazo.

Tasa de ahorro($s_1 < s_2$), crecimiento e y^*



Modelo de Solow con crecimiento de la población

- ❑ La tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo, igual a la tasa de crecimiento de la población (n), es constante y exógenamente determinada.

Función de acumulación de capital con crecimiento de la población

Función de acumulación de capital

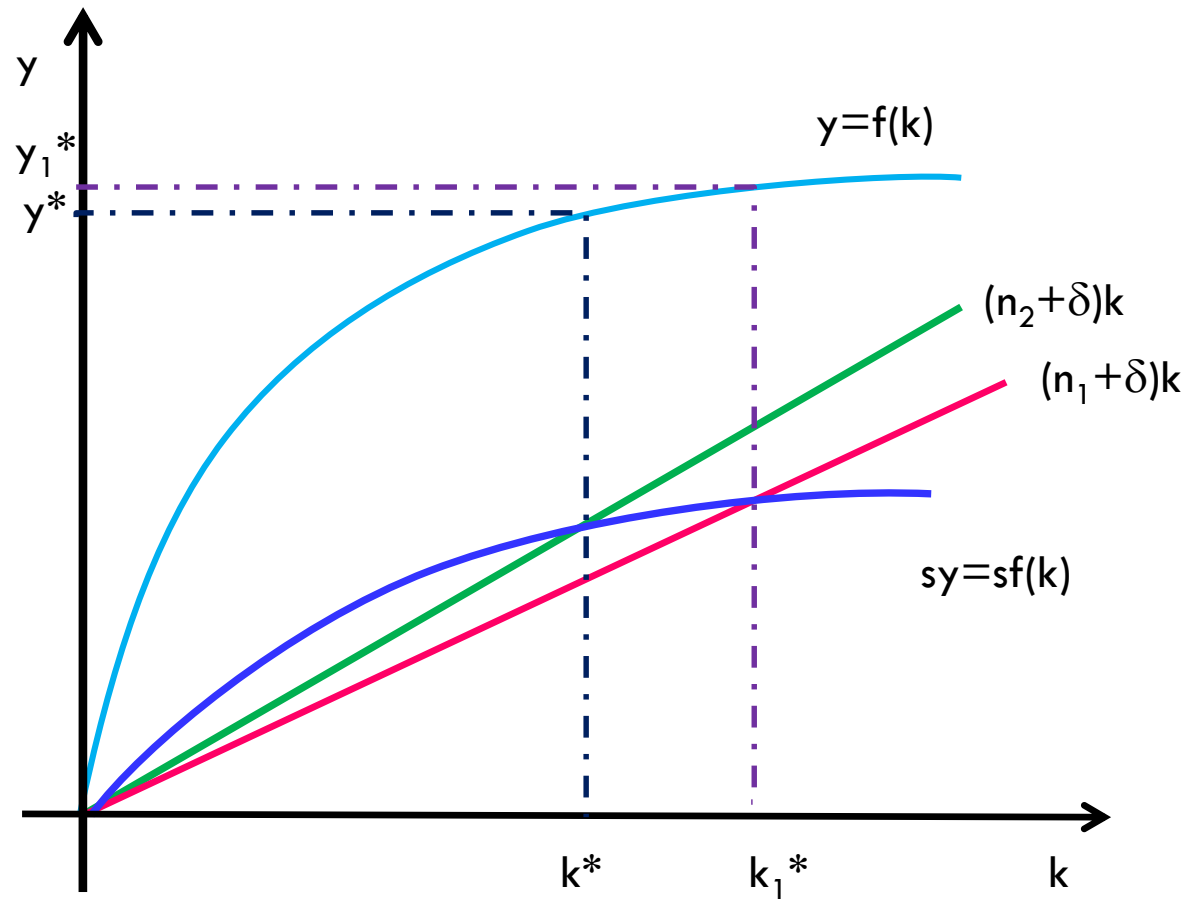
$$k_{t+1} = k_t - (n + \delta)k_t + sy_t$$

$$k_{t+1} - k_t = sy_t - (n + \delta)k_t$$

$\Downarrow$

$$\Delta k_t = sy_t - (n + \delta)k_t$$

Cambios en crecimiento de la población ($n_1 < n_2$) e y^*



Fuerza de trabajo, desgaste y crecimiento

- ❑ Los cambios en la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo, n , modifican la tasa de crecimiento del producto en el largo plazo de forma directa.
- ❑ Un incremento de n (paso de n_1 a n_2), incrementa la pendiente de la recta de inversión necesaria: el capital se “desgasta” de forma más acelerada.
- ❑ Dado que la inversión no cambia, el mayor desgaste del capital, reduce el acervo de capital por trabajador efectivo en el estado estacionario.
- ❑ El menor nivel de capital por trabajador efectivo determina un menor nivel de producto en el estado estacionario.

Modelo de Solow con progreso técnico

- El progreso tecnológico eleva la producción con unas cantidades dadas de capital y trabajo.
- Estado de la tecnología (A) determina la producción con cantidades dadas de trabajo y capital.

$$Y = F(K, N, A)$$

- El progreso tecnológico aumenta la eficiencia del trabajo

$$Y = F(K, AN)$$

- (AN) representa la cantidad de trabajo considerando su eficiencia (trabajador efectivo).

Función de producción por trabajador efectivo, capital e inversión por trabajador

Producción y capital por trabajador

$$\frac{Y}{AN} = F\left(\frac{K}{N}, \frac{AN}{AN}\right) \Rightarrow \frac{Y}{AN} = F\left(\frac{K}{N}, 1\right)$$

$$\hat{y} = \frac{Y}{AN} \quad ; \quad \hat{k} = \frac{K}{AN}$$

$\Downarrow$

$$\hat{y} = f(\hat{k})$$

Función de ahorro (inversión) por trabajador efectivo

Ahorro e Inversión

$$I = S \rightarrow S = sY$$

$$I = sY$$

$$\frac{I}{AN} = s \frac{Y}{AN} \Rightarrow \hat{i} = s \hat{y}$$

Crecimiento de los trabajadores efectivos

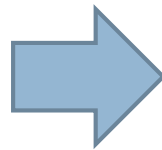
- ❑ Con progreso técnico, el crecimiento de la fuerza de trabajo considerando su nivel de eficiencia es igual a la suma de la tasas de crecimiento de la población (n) y de progreso técnico (γ).

Función de acumulación de capital con progreso tecnológico

Inversión necesaria para mantener la
acumulación de capital

$$\delta \hat{k} + (n + \gamma) \hat{k}$$

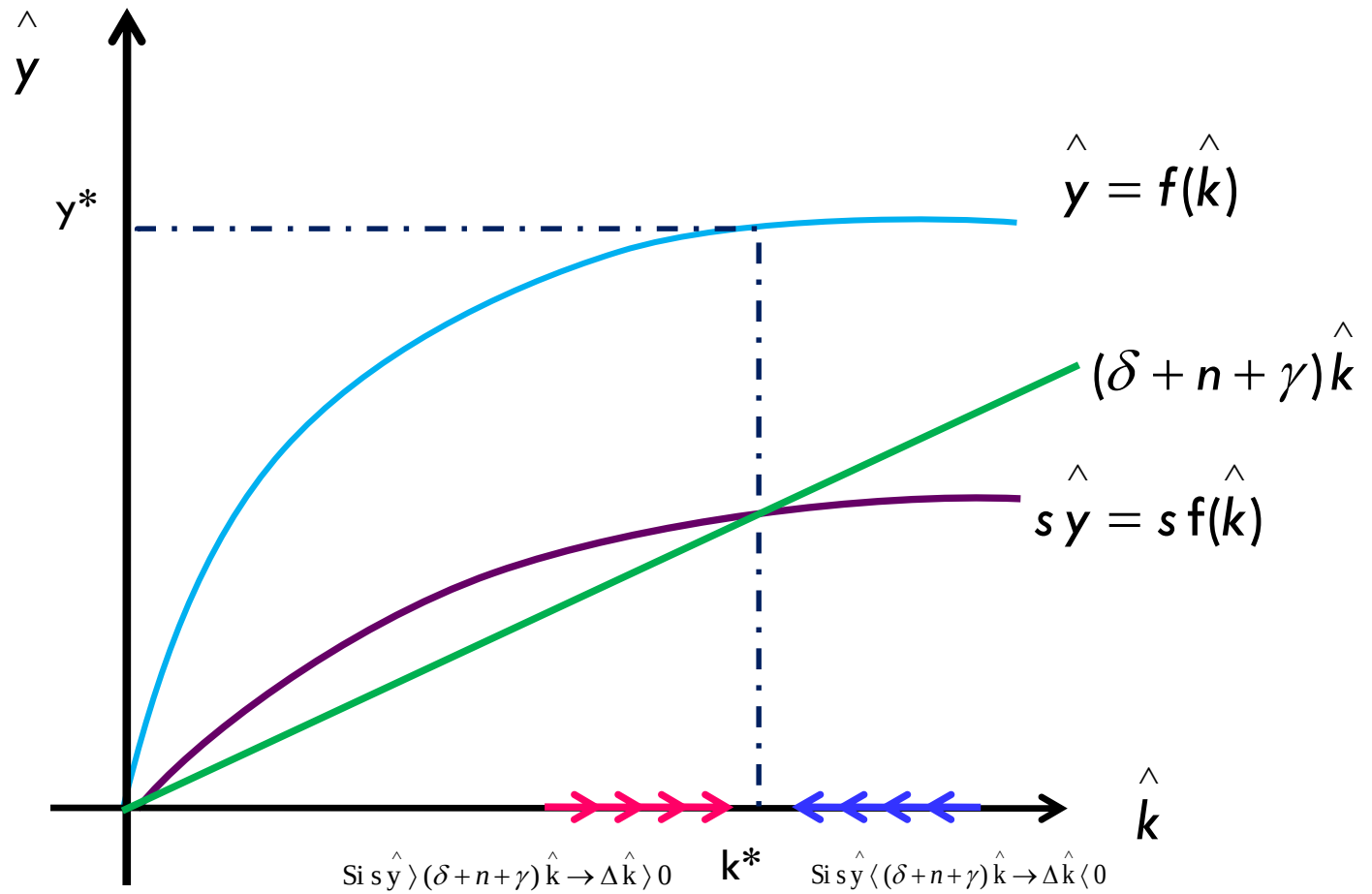
$$(\delta + n + \gamma) \hat{k}$$



Función de acumulación de capital
por trabajador efectivo

$$\Delta \hat{k} = s \hat{y} - (\delta + n + \gamma) \hat{k}$$

Estado estacionario con progreso tecnológico



Conclusiones (I)

- ❑ La economía tiende a una tasa de crecimiento igual a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo en unidades de eficiencia (tasa natural de Harrod).

$$\frac{\Delta Y}{Y} = n + \gamma \quad \text{tasa natural de crecimiento}$$

donde γ es la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo

Conclusiones (II)

- En el largo plazo, el crecimiento en términos per cápita sólo se puede obtener por medio de incrementos en la productividad del trabajo gracias al progreso técnico.
- Convergencia. Si las preferencias de consumo y ahorro son las mismas y si la función agregada de producción es la misma, existe una relación opuesta entre el nivel de k^* y la tasa de crecimiento.

$$k_{rico} > k_{pobre}$$
$$r g_{rico} < r g_{pobre}$$

Limitaciones del modelo de Solow

- ❑ Crecimiento limitado por la acumulación de capital por la función de producción con rendimientos decrecientes.
- ❑ Separación entre acumulación de capital y progreso técnico.
- ❑ Si el crecimiento de largo plazo sólo depende del progreso técnico, ¿de qué depende éste? Pregunta abierta.
- ❑ Modelo de crecimiento que no explica el crecimiento.