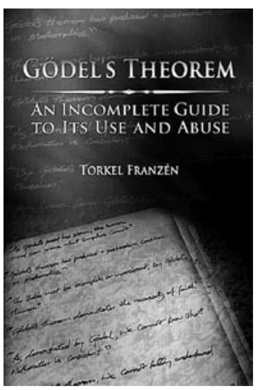
GÖDELITIS: usos y abusos DEL TEOREMA DE GÖDEL

Eduardo **Harada**



GÖDEL'S THEOREM.
AN INCOMPLETE GUIDE
TO ITS USE AND ABUSE
TORKEL FRANZÉN
A K Peters, Massachusetts, 2005

1. INCOMPLETUD EN TODOS LADOS

Pocos teoremas matemáticos han llamado la atención fuera de esta disciplina, generalmente considerada abstracta o alejada de la realidad cotidiana: el teorema de Fermat (cuya prueba fue encontrada apenas hace unos años por Andrew Wiles), el de Pitágoras (que todos hemos aprendido desde la primaria) y, sobre todo, el de Gödel.

En efecto, si, por ejemplo, se escriben las palabras "teorema de Gödel" en cualquier buscador para Internet se encontrará que no sólo se invoca éste a propósito de la lógica, las matemáticas, la computación o la filosofía, sino al hablar de política, religión, arte, etc., pues prácticamente no existe ninguna discusión en la que alguien no termine por citar el teorema de Gödel para, supuestamente, demostrar algo o demostrar que algo no puede ser demostrado (la "popularidad" de este teorema sólo es comparable con la que también goza, o sufre, el principio o las relaciones de indeterminación o incertidumbre de Heisenberg). Precisamente, el término *gödelitis* que aparece en el título de este artículo fue acuñado por Debray[6] para referirse a la "enfermedad" que consiste en extrapolar y generalizar el teorema de Gödel fuera del campo espefícifico al que pertenece.

Sin embargo, algunas de esas referencias no siempre se encuentran justificadas o son pertinentes, pues suelen basarse en malentendidos o, simplemente, en "asociación libre". Por ejemplo, dado que dicho teorema establece la incompletud de cierto tipo de sistemas formales se le emplea para justificar la "incompletud" de toda clase de "sistemas", físicos o sociales o, dado que prueba que la indecidibilidad de algunas proposiciones pertenecientes a sistemas formales de cierto tipo, se concluye que, en el fondo, todo es indecidible o que nada puede ser demostrado.

Pero, ¿realmente qué afirma el teorema de Gödel y cuáles son las consecuencias, matemáticas y extramatemáticas que se pueden derivar legítimamente de él?

El libro de Torkel Franzén,[a] profesor de la Luleå University of Technology de Suecia, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, 2005[11] (en adelante citado como "FR") tiene como objetivo ayudar al lector sin conocimientos de lógica matemática a formarse una opinión sólida sobre los usos y abusos que se han hecho de dicho teorema.[b] En el prefacio, Franzén dice que su excusa para escribir otro libro sobre este tema (sobre el cual ya existen excelentes libros dirigidos a un público general, comenzando con el de Nagel y Newman[21]) es que el suyo, además de explicar el teorema desde un punto de vista matemático, incluye comentarios sobre una amplia selección de apelaciones al teorema de la incompletud fuera de las matemáticas.[c] En concreto, el libro ofrece las bases para que los lectores juzguen por sí mismos los méritos de las evocaciones que se hacen al teorema de la incompletud fuera de las matemáticas y la lógica e, igualmente, apreciar algunas de las perspectivas filosóficas y matemáticas abiertas por él.[d]

A lo largo de los ocho capítulos que forman su libro, Franzén expone los conceptos necesarios para poder entender el teorema y, sobre todo, su prueba (lo que realmente prueba, pero, también, lo que no prueba): explica qué es una proposición y una sentencia, un sistema formal, la demostrabilidad, la consistencia, la completud, etcétera (Franzén presta poca atención a la vida de Kurt Gödel, aunque recomienda la biografía de Dawson considerada "oficial"[4]).

Pero, sobre todo, presenta, analiza y critica algunos de los usos y abusos que se han hecho del teorema fuera del ámbito de las matemáticas y la lógica: a propósito de la "condición posmoderna", el problema de la inteligencia artificial, las teorías del todo, la teología, el escepticismo y la teoría de la computabilidad principalmente en la versión de Gregory Chaitin.[3]

En efecto, como dicen Sokal y Bricmont en *Imposturas intelectuales*:[26] "el teorema de Gödel es una fuente inagotable de abusos intelectuales", ejemplo de lo cual hallan estos autores en algunos escritos de Régis Debray, en los que este pensador francés pretende aplicarlo directamente a cuestiones sociales y políticas (para una crítica en la misma línea de Sokal y Bricmont consúltese también el trabajo de Bouveresse[1,2]).

Algunas frases que expresan otros abusos que se han hecho del teorema de Gödel mencionados por Franzén son: el teorema de Gödel prueba que nada puede saberse con seguridad; hay verdades que la lógica y las matemáticas son incapaces de probar; no podemos saber si las matemáticas son consistentes; no es posible probar que existe una realidad objetiva; necesitamos recurrir inevitablemente a la fe; etcétera.

Ahora bien, Franzén cuenta que Gödel presentó y probó su teorema (en realidad, dos teoremas, como enseguida veremos) de la incompletud en 1931. El título de su artículo, escrito en alemán, era, traducido al español "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados I".[12, 13] Por su parte, *Principia Mathematica* fue un libro publicado en tres volúmenes entre 1910 y 1913 por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, en el cual estos filósofos intentaron ofrecer una fundamentación lógica de las matemáticas (programa logicista) en la forma de un sistema de axiomas y reglas de inferencia dentro del cual todas las matemáticas conocidas en ese tiempo podían ser formuladas y probadas mecánicamente.

Sin embargo, en su artículo Gödel demostró dos teoremas, conocidos como primero y segundo teoremas de la incompletud, que demostraron que el proyecto antes mencionado así como el optimismo formalista encabezado por David Hilbert, según el cual la respuesta a todas las preguntas formulables por medio de sistemas como *Principia Mathematica* o afines podían ser decididas con suficiente tiempo y esfuerzo, no se encuentran justificados.[17,18]

En el primero de los teoremas (en el escrito original de Gödel, la proposición o teorema VI) se establece que bajo la suposición de que el sistema de *Principia Mathematica* satisface la propiedad denominada ω-consistencia (omega consistencia), entonces este sistema es incompleto, queriendo decir con ello que hay una proposición en su lenguaje "17 Gen r" (conocida como "proposición Gödel" o "proposición G") que no puede ser probada ni refutada dentro de este mismo sistema (FR:3): por eso se dice que esta proposición es "indecidible" dentro de él (Gödel presentó este teorema, por primera vez, el 7 de octubre de 1930, cuando tenía apenas 24 años de edad, en un Congreso de la Organización para la Filosofía Empírica berlinesa sobre "Epistemología de las ciencias exactas"; su ponencia se titulaba, traducida al español, "Algunos resultados metamatemáticos sobre completud y consistencia").[14,12]

El segundo teorema de la incompletud establece que la consistencia del sistema no puede ser establecida dentro del propio sistema (de hecho, este segundo "teorema" es, más bien, un corolario del primero; en el artículo original corresponde a la proposición o teorema XI), donde "consistencia" quiere decir que no se puede formular en su lenguaje una proposición tal que ella y su negación queden demostradas en su interior.

Gödel planeaba publicar una "parte II", en la que presentaría una visión general de sus teoremas, aplicable a otros sistemas, pero nunca la escribió debido a que sus resultados fueron rápidamente aceptados. Y, en realidad, Gödel no argumentó sobre el sistema de *Principia Mathematica*, sino sólo sobre un sistema llamado "P" relacionado con los *Principia Mathematica*, pero, en 1933, J. B. Rosser mostró que puede ser aplicado a un amplio rango de sistemas formales (por ejemplo, la aritmética de Peano y la teoría de conjuntos con el axioma de elección de Zermelo-Fraenkel) (FR:17).[18]

Así, de manera general, el teorema de Gödel afirma que "cualquiera de los sistemas mencionados, si es consistente, es incompleto y su consistencia no puede ser probada dentro del propio sistema" (FR:3).

2. ACLARACIONES SOBRE EL TEOREMA DE GÖDEL DESDE UNA PERSPECTIVA FORMALISTA

Franzén señala que frecuentemente se exagera la importancia de este teorema, pues se ha llegado a afirmar que no sólo ha revolucionado las matemáticas, sino toda la ciencia e, incluso, toda nuestra cultura (FR:5), bajo el supuesto de que las matemáticas son la base de la ciencia moderna (sobre todo, la física) y que ésta, a su vez, constituye uno de los pilares fundamentales de la cultura actual. Sin embargo, aunque el teorema es usado la mayor parte del tiempo en la lógica matemática y ésta es un campo fundamental de las matemáticas, no obstante, la verdad es que es un campo relativamente pequeño de ellas y, por ello, no juega un papel importante en el trabajo cotidiano de los matemáticos en general (FR:5).

Me parece que la principal aclaración que ofrece Franzén en su libro respecto a los usos legítimos del teorema, pero también sobre algunos abusos que se han hecho de él es bastante simple: "incompletud" y "consistencia", en el contexto del teorema de Gödel, significan incompletud y consistencia en un sistema formal determinado, es decir, no tienen un significado absoluto, sino que son conceptos definidos de una manera precisa al interior de determinada clase de sistemas formales (FR:7). Es decir, el teorema no dice nada acerca de lo que puede ser o no probado "en cualquier lado" (FR:50). El problema es que dado que los términos "consistencia", "completud", "sistema", etc., no sólo son usados dentro de las matemáticas o en la lógica en un sentido técnico o especializado, sino en varios sentidos diferentes en el lenguaje informal u ordinario, se ha pensado que el teorema tienen una gran cantidad de consecuencias fuera de esas disciplinas. Sin embargo, para que el teorema sea aplicable a un sistema éste debe poseer un lenguaje formal, un conjunto de axiomas y reglas de inferencia explícitas para demostrar teoremas (de tal modo que determinar si una proposición dada es una axioma, o un teorema, o si algo es o no una prueba, sea un asunto mecánico, aunque pueda ser muy tardado o laborioso), cosa que, obviamente, no sucede, por ejemplo, en los llamados "sistemas sociales".

En efecto, el teorema de la incompletud es aplicable a un sistema formal en el cual "cierta cantidad de aritmética elemental" puede ser formulada y algunas reglas básicas de la aritmética puedan ser probadas, por ejemplo, la adición y multiplicación de números naturales (enteros no negativos: 0, 1, 2…). Además, que incluya ciertas conectivas lógicas, los cuantificadores existencial y universal, y el signo de igualdad. Es decir, dentro del cual se puedan hacer "cómputos" o se pueda representar los números naturales, aunque no se hagan afirmaciones explícitas sobre éstos (de tal modo que la prueba pueda ser llevada a cabo).

Es decir, lo que determina la aplicabilidad del teorema no es, como a veces se dice, la "complejidad" de los sistemas, sino aquello que son capaces de expresar y probar: hay sistemas formales "simples" a los que sí se aplica y "complejos" a los que no.

Pero lo más importante es que la "proposición Gödel" no es indecidible en un sentido absoluto, sino sólo relativo, ya que siempre es trivialmente demostrable en otro sistema: basta agregarla como axioma (hay que distinguir entre la proposición Gödel, la cual es indecidible, y el teorema de Gödel –que afirma que G es indemostrable–, que sí es demostrable: por eso, precisamente, es un "teorema"). Es demostrable en otro sistema, no necesariamente más "fuerte" o "potente".

En ese sentido, y sólo en ese sentido, para demostrar la consistencia de un sistema formal como los considerados es necesario "salir" del sistema para usar principios que no están contenidos y que no son formalizables en ese sistema (véase la nota 48 de "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados I", así como "Sobre la longitud de las deducciones";[12, 13] Russell mismo era consciente de este fenómeno).

Por otro lado, el teorema no demuestra que *todos* los sistemas formales sean incompletos, pues, de hecho, sí existen algunos que son, a la vez, completos y consistentes. Un ejemplo de ello es la teoría elemental de los números reales (FR:25).

Por otra parte, no hay que olvidar que la "consistencia" es una propiedad teórica muy débil (mínima), pues el hecho de que una teoría sea consistente o que no incluya contradicciones no implica que todos los enunciados deducibles de ella sean verdaderos, sino que, al contrario, existen muchas teorías que son consistentes, pero que, sin embargo, no son sólidas (del mismo modo que un razonamiento puede ser formalmente válido y, sin embargo, sus premisas y su conclusión pueden ser falsas).

Franzén también ofrece una aclaración sobre el menos conocido "teorema de la completud" que Gödel probó, en su tesis de doctorado, para la lógica de predicados de primer orden (en la época de Gödel denominada "cálculo funcional restringido").

A la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel y la aritmética de Peano se les aplica tanto el teorema de la completud (semántica) como los teoremas de la incompletud (sintáctica), pues, "completo" significa algo diferente en ambos casos: lo que es incompleto en el sentido de los teoremas de la completud no son dichas teorías, sino la lógica de primer orden (por eso Jesús Mosterín, decidió traducir el artículo de Gödel como "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden"[12]). "Completo" en el sentido del teorema de completud significa que las reglas de inferencia usadas en lógica de primer orden son suficientes para derivar todas las consecuencias válidas de sus axiomas, lo cual, no significa, sin embargo, que todas sus consecuencias, en general, sean demostrables o decidibles. Precisamente, el segundo teorema de la incompletud establece que la existencia de un contraejemplo no siempre es demostrable (véase la nota 55 de "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados I"[12,13]).

Finalmente, el teorema de Gödel deja abierta la posibilidad de que para probar la consistencia de la aritmética elemental se extiendan los axiomas o los modos de razonamiento aceptables, aunque, de este modo, se abandonaría el "razonamiento finitista" o el que es considerado, no sólo de acuerdo con Hilbert, sino por la mayor parte de los matemáticos, el tipo de razonamiento matemático más básico, concreto y seguro. De hecho, en 1958, en su artículo "Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario",[12, 14] Gödel mismo ofreció una manera de extender la noción de prueba finitista y desde 1936 el lógico alemán Gerhard Gentzen demostró la consistencia de la aritmética de Peano haciendo uso de un sistema que en un sentido extiende este último sistema y en otro sentido lo restringe (no es más "complejo o "potente" sino, simplemente, otro sistema: lo que distingue a un sistema formal de otro son los axiomas de los que parte), así como de la inducción transfinita. Aunque el mismo Franzén admite que lo anterior también significa que nunca habrá una prueba para la consistencia de esta clase de sistemas formales que sea vista por la mayoría de los matemáticos como evidente y definitiva.

De ahí entonces que Franzén reconoce dos consecuencias filosóficas legítimas :

1) Incluso los principios matemáticos abstractos, que afirman la existencia de varios conjuntos infinitos, tienen consecuencias en la teoría de los números elementales que no pueden ser probadas por medios elementales.

2) Cuando aplicamos un sistema formal cuyos axiomas reconocemos como matemáticamente válidos, el teorema de la incompletud muestra que no podemos especificar formalmente la suma total de nuestro conocimiento matemático o un sistema formal que codifique exactamente la habilidad aritmética humana y que encarne sólo las verdades matemáticas que aceptamos o agote todo nuestro conocimiento matemático (FR:114). Este sería el "lado positivo" de la incompletud.[10]

Lo último significa que el concepto "verdadero" en los sistemas formales, como los especificados antes, no puede ser definido en dichos sistemas, es decir, los excede. En concreto, el concepto de "proposición aritmética verdadera" no puede ser definido en términos aritméticos (lo cual está directamente relacionado con el "teorema de indefinibilidad" que Alfred Tarski descubrió también alrededor de los años treinta, pero independientemente). En cambio, el concepto de "proposición aritmética demostrable" sí puede ser formulado en términos aritméticos (como muestra perfectamente la prueba de Gödel o la "gödelización", la cual asigna un número natural a las afirmaciones sobre estos mismos números). De donde se sigue que el concepto de "verdad (matemática)" no es igual ni puede ser reducido al de "demostrabilidad matemática".

Por ello, Franzén aclara que los "axiomas", los "teoremas", las "pruebas", etc., de las que se habla en el artículo de Gödel son meras cadenas de signos o símbolos (FR:59), es decir, se hallan desprovistos de cualquier significado particular y concreto. En efecto, el teorema no supone la verdad de las proposiciones a las que se refiere, pues la incompletud y la consistencia son propiedades sintácticas o meramente formales (FR:29) (por eso algunos autores, como el propio Franzén, al explicar el teorema, prefieren hacer uso del término "sentencia", en lugar de "proposición").

La anterior consecuencia filosófica es la más importante, pues ha sido relacionada, incluso por el propio Gödel, con la cuestión de si las máquinas pueden pensar como los seres humanos (véase, por ejemplo,

©**Daniel Machado,** de la serie *La cárcel Rodelu*, 2003.

la nota suplementaria que Gödel añadió en 1963 a su artículo de 1931, así como los escritos inéditos y las cartas incluidas en sus obras completas[16]).

Respecto a esto último Franzén discute las ideas de Lucas[20] y Penrose,[22] para quienes el teorema de Gödel prueba que la mente humana nunca podrá ser simulada por una máquina o que una máquina nunca será un modelo adecuado de la mente humana, ya que ésta puede hacer cosas que las computadoras no pueden: en concreto, darse cuenta de la verdad de ciertas proposiciones indecidibles (por ejemplo, la "proposición G") por medio de los sistemas formales o programas que emplean las computadoras (Gödel aceptó que una definición de sistema formal lo constituían las "máquinas de Turing"). Sin embargo, objeta Franzén, aunque algunas áreas del pensamiento, mente, cerebro o inteligencia humanos intentan ser sistemáticas (ordenadas, coherentes, etc.), no constituyen un "sistema formal", por lo que hablar del teorema de Gödel a propósito de ellas sólo puede tener el valor de una metáfora.

Además, Franzén nos recuerda que lo que sabemos gracias a la prueba de Gödel no es la proposición categórica “G es verdadera”, sino sólo que si el sistema en el que se le formula es consistente, entonces dicha proposición G es verdadera, es decir, sólo sabemos la verdad de una proposición condicional, no la verdad de cada uno de sus miembros (antecedente y consecuente). Sin embargo, en general, no sabemos si un sistema formal es consistente y no tenemos ninguna base para concluir que nosotros, los seres humanos, podemos probar la consistencia de cualquier sistema formal, que todo lo que puede ser probado en un sistema formal también puede ser probado por nuestra mente o que siempre existe una prueba formal aceptable para nosotros (por eso, al discutir el teorema de Gödel, más que de “proposiciones”, que en el uso actual, remiten a algo, habla de *sentences*, entendido en un sentido puramente sintáctico como “secuencias de símbolos”, que no entrañan ninguna noción de verdad o falsedad).

La confusión resulta de que los sistemas formales que normalmente se usan para ejemplificar la prueba de Gödel, por ejemplo, la aritmética de Peano, sí son consistentes, por lo cual es fácil darse cuenta que en ellos la proposición G sí es verdadera. Pero existen muchos sistemas formales cuya consistencia desconocemos y, en consecuencia, también desconocemos la verdad de la proposición G que puede ser formulada en ellos.

Ahora bien, si en el caso de la polémica mentes *versus* máquinas no son directas ni claras las consecuencias del teorema de Gödel, mucho menos lo son en el caso de otros asuntos humanos y sociales: aunque se habla de “sistemas” sociales o, en un sentido general, se puede decir que, por ejemplo, la Biblia, una Constitución, una doctrina filosófica, etc., constituyen “sistemas”, esto es, conjuntos de elementos entre los cuales existen ciertas relaciones determinadas por reglas o principios, la verdad es que no son sistemas formales en el sentido indicado (no cuentan con axiomas, reglas de inferencia ni teoremas explícitos, que permitan decidir los problemas de manera mecánica), pues no fueron diseñados como instrumentos para la discusión de problemas matemáticos, por lo que saber si algo se sigue de ellos no es una cuestión matemática, sino de juicio, interpretación, creencia, opinión, etc., y para saber

©**Daniel Machado,** de la serie *La cárcel Rodelu*, 2003.

que son “incompletos” (en el sentido de que no incluyen ni hablan de “todo”) no se necesita recurrir al teorema de Gödel (FR:78-79), sino que es una cuestión de conocimiento empírico o hasta de simple sentido común. Y tampoco necesitamos del teorema de Gödel para llegar a la conclusión de que esos sistemas son “incompletos”, en el sentido de que no se aplican a cada aspecto de la vida humana o que inevitablemente dejan fuera ciertos aspectos de ésta.

Obviamente, dice Franzén, ni siquiera en las matemáticas podemos probar todo, pero no necesitamos del teorema de Gödel para darnos cuenta de que debemos adoptar algunos principios básicos (axiomas) sin prueba (FR:38, 105), pues, en efecto, en algún punto, sólo podemos justificar nuestros axiomas y reglas por medios informales, apelando a su claridad intuitiva, utilidad o éxito en la práctica, etc., pero eso tampoco significa que no exista “ninguna” justificación para aceptarlos. Es decir, el teorema de Gödel en modo alguno justifica un escepticismo acerca de todas las matemáticas o de todo el conocimiento: como si del hecho de que algo no es demostrable en algunos sistemas formales se siguiera automáticamente que nada puede demostrarse realmente en ningún lado.

Sobre libros como el de Hofstadter,[19] –famoso *best seller*, en el cual se busca mostrar, entre otras cosas, los isomorfismos que existen entre el teorema de Gödel, algunos dibujos de M. C. Escher y algunas obras musicales de J. S. Bach– Franzén dice que encontrar sugerencias o establecer metáforas y analogías en otros campos es perfectamente legítimo y que puede ser muy útil (de hecho, la misma prueba de Gödel se basa en un “isomorfismo” entre las proposiciones aritméticas y las proposiciones metamatemáticas sobre dichas proposiciones o entre los números naturales y los signos sintácticos sobre éstos), pero que eso sólo debe ser el punto de partida, pues se tiene que dar sustancia a dichas pretensiones por medio de argumentos que expliquen y justifiquen la analogía o el isomorfismo que existe o puede existir entre los sistemas formales a los que se refiere el teorema de Gödel y otro tipo de "sistemas" y que, igualmente, aclaren los límites de tal analogía o isomorfismo.

3. EL TEOREMA DE GÖDEL SEGÚN GÖDEL: EL CONCEPTUALISMO REALISTA O PLATÓNICO

Son muchas otras las aclaraciones que ofrece Franzén en su libro: como indica el título mismo de éste, se trata de una "guía incompleta" sobre los usos y abusos del teorema de Gödel (y tratemos de evitar invocar éste para justificar la incompletud radical de todo libro), pues, en efecto, faltan referencias a otros autores, dentro de la tradición filosófica analítica y anglosajona, que también han invocado al teorema de Gödel fuera de las matemáticas, por ejemplo, Karl R. Popper[23] (no se crea que únicamente los filósofos franceses o los científicos sociales son susceptibles de cometer imposturas intelectuales o, simplemente, ser incapaces de comprender lo que dicen los teoremas de Gödel: esto último también puede hallarse fácilmente entre los filósofos analíticos, por ejemplo, Ludwig Wittgenstein[30] o entre los propios matemáticos, como muestra Dawson[4]).

En efecto, aunque las aclaraciones del libro de Franzén son muy útiles, sin embargo, no bastan para entender lo realmente importante: cuáles son las consecuencias extralógicas y matemáticas, propiamente filosóficas, que se pueden deducir del teorema de Gödel.

Finalmente Franzén parece concluir que las matemáticas no hablan ni pueden hablar de otra cosa, sino de sí mismas o de las relaciones formales y abstractas que existen entre sus símbolos desprovistos de todo contenido, por lo que no se puede concluir nada válidamente, en términos estrictamente matemáticos y formales, fuera de ello. Es decir, Franzén supone una concepción formalista o sintáctica de las matemáticas, como la del positivismo lógico y de la Escuela de Hilbert, según la cual éstas son un conjunto de reglas o convenciones para manipular símbolos vacíos o que no se refieren a nada en la realidad.

Sin embargo, no hay que olvidar que Gödel siempre se opuso expresamente a dicha concepción de las matemáticas (véase "Is Mathematics Syntax of Language?"[16]) y que sostuvo, en cambio, un conceptualismo realista o platónico, según el cual las entidades matemáticas (por ejemplo, los conjuntos) existen independientemente de nosotros y que las percibimos gracias a una facultad especial (algo así como una "intuición") (véase "La lógica matemática de Russell" y "¿Qué es el problema de continuo de Cantor?", en Gödel,[12, 13] así como "Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications"[16]). De acuerdo con Gödel, las matemáticas no eran, en el fondo, tan diferentes a las ciencias empíricas pues buscaban aproximarse al conocimiento de una realidad objetiva y no a algo que fuera una mera constricción o invención nuestra.

Además, en varios lugares, dejó entrever que su teorema sí dice algo importante no sólo sobre la naturaleza de las matemáticas y la lógica sino, también, sobre las capacidades de los seres humanos, aunque hay que reconocer que sobre este punto su postura no es tan clara como se suele suponer (por ejemplo, véase la carta a Leon Rappaport del 2 de agosto de 1962,[12] así como a Wang,[16] en las que se presentan y comentan algunas ideas que Gödel expresó a lo largo de los años en diversas conversaciones que sostuvo con el autor de los libros).

Si Gödel no escribió más sobre cuestiones extralógicas y matemáticas, no fue sólo debido a que era extremadamente cuidadoso en todo lo que pensaba, decía y escribía y, sobre todo, con lo que publicaba, sino porque pensaba que los "prejuicios de su época" obstaculizarían la comprensión y aceptación de sus ideas (véase "The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy"[9, 10]), pues sus convicciones filosóficas se encontraban del lado del idealismo, espiritualismo y optimismo (no sólo creía que las entidades matemáticas existen independientemente de nosotros, sino que la mente o el espíritu existe independientemente de la materia y que no se rigen por leyes físicas o mecanicistas) y no del materialismo, mecanicismo o escepticismo (las cuales, en opinión de Gödel, eran las posturas filosóficas que dominaban desde la revolución científica moderna), los cuales implican una concepción sintáctica de las matemáticas como la que Franzén y muchos otros autores defienden.

Este año que se cumple el primer centenario del nacimiento de Kurt Gödel (fallecido en 1978) es un buen momento no sólo para tratar de completar nuestro conocimiento sobre sus dos famosos teoremas sobre la incompletud de cierta clase de sistemas formales leyendo el libro de Torkel Franzén, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse* (el cual ojalá pronto sea traducido al español), sino, igualmente, para intentar comprender la filosofía que subyace a ellos.

©**Daniel Machado,** de la serie *La cárcel Rodelu*, 2003.

REFERENCIAS

[1] Bouveresse J. *Prodigios y vértigos de la Analogía*, Libros del Zorzal, Bs. As. (2001).

[2] –. "Philosophie du language et de la connaisaance", *Résumé des cours 2004-2005,* (2004), disponible en http://www.college-de-france.fr/site/phi_lan/p998921945162.htm.

[3] Chaitin G. "Information-Theoretical Computational Complexity and Gödel's Theorem and Information" en Tymoczko T (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Nueva Jersey (1998).

[4] Dawson JW. "The Reception of Gödel's Theorems" en Shanker SG (edit.), (1997) 1-16.

[5] –. *Logical Dilemas*, A K Peters, Massachusetts (1997).

[6] Debray R. "L'incompletude, logique du religieux?", *Bulletin de la Société Française de Philosophie* 90 (1996) 1-35 (disponible en www.regisdebray.com).

[7] Debray R y Bricmont J. *A la sombra de la Ilustración*, Paidós, Barcelona (2003).

[8] Davis M (edit.). *The Undecidible. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions,* Dover Publications, Nueva York (1993).

[9] Feferman S. "Kurt Gödel: Conviction and Caution" en Shanker SG (edit.). (1997) 96-114.

[10] Franzén T. *Inexhaustability: A Non-Exhausted Treatment*, A K Peters, Massachusetts (2004). La introducción de este libro puede consultarse en http://www.sm.luth.se/~torkel/eget/progps.html; su tesis de doctorado "Provability and truth" se encuentra disponible en http://www.sm.luth.se/~torkel.

[11] –. *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, AK Peters, Massachusetts (2005).

[12] Gödel K. *Obras completas*, Mosterín J (trad.), Alianza Editorial, Madrid (1981).

[13] –. *Collected Works. Volume I. Publications 1929-36*, Feferman S y otros (eds.), Oxford University Press, Nueva York (1986).

[14] –. *Collected Works. Volume II. Publications 1938-1974*, Feferman S y otros (eds.), Oxford University Press, Nueva York (1990).

[15] –. On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems, Meltzer B (trad.) Braithwaite RB (introd.), Dover Publications, Nueva York (1992).

[16] –. *Collected Works. Volume III. Unpublished Essays and Lectures*, Feferman S y otros (eds.), Oxford University Press, Nueva York (1995).

[17] Hilbert D. *Fundamentos de las matemáticas*, UNAM, México (1993).

[18] –. "París 1990. Conferencia de Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos" en Gray JJ, *El reto de Hilbert*, Crítica, Barcelona (2003) 263-314.

[19] Hofstadter DR. *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle*, Tusquets, Madrid (1987).

[20] Lucas S. "Mentes, máquinas y Gödel" en Anderson AR, *Controversia sobre mentes y máquinas*, Tusquets, Barcelona (1984) 75-102.

[21] Nagel E y Newman JR. *El teorema de Gödel*, CONACyT, México (1981).

[22] Penrose R. *La mente nueva del emperador. En torno a la cibernética, la mente y las leyes de la física*, FCE, México (2002).

[23] Popper KR. *El universo abierto. Un argumento a favor del indeterminismo*, Tecnos, Madrid (1994) 183 y 189.

[24] Putnam H. "Mentes y máquinas" en Anderson AR, *Controversia sobre mentes y máquinas*, Tusquets, Barcelona (1984) 123-162.

[25] Shanker SG (edit.). *Gödel's Theorem in Focus*, Routledge, Londres (1997).

[26] Sokal A y Bricmont J. *Imposturas intelectuales*, Paidós, Barcelona (1999).

[27] Wang H. *Reflections on Kurt Gödel*, The MIT Press, Cambridge (1995) (trad. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Alianza Editorial, Madrid).

[28] –. *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, Cambridge (1996).

[29] Yourgrau P. *A World Without Time. The Forgotten Legacy of Gödel and Einstein*, Perseus Books Group, Nueva York (2005).

[30] Wittgenstein L. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid (1987).

NOTAS

[a] Torkel Franzén murió el 1 de abril de 2006, a la edad de 56 años.

[b] La introducción a este libro puede conseguirse en http:// www.sm.luth.se/~torkel/eget/tic.html

[c] Franzén dedicó varios años a leer y comentar las referencias al teorema de Gödel que eventualmente aparecen en Internet; véase "Gödel on the Net", http:// www.sm.luth.se/~torkel/eget/godel.html

[d] Franzén no ha sido el único en escribir, en parte inspirado o impulsado por Sokal y Bricmont, un libro sobre los usos y abusos que se han hecho del teorema de Gödel: en 2003 Stanislaw Krajewski escribió en polaco un trabajo cuyo título, traducido al inglés, es *Gödel's Theorem and Its Philosophical Interpretations: From Mechanism to Posmodernism* (un resumen de este libro puede ser consultado en *Bulletin of Advanced Reasoning and Knowledge* 2 (2003) 101-108 o en www.advancedreasoningforum.org/BARK-Volumes/BARK_2.10_Krajewski.pdf). Cabe mencionar que para evitar simplificaciones y errores en la aplicación del trabajo de Gödel, Krajewski propone una "guía para su popularización".

Eduardo Harada, Escuela Nacional Preparatoria, UNAM. edharada@hotmail.com