CONTINÚAN NOTAS DE CLASE. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

3.1.b Integración por sustitución trigonométrica.

Este método se aplica cuando la integral no es inmediata y contiene cualquiera de los siguientes radicales en el integrando:

$$A)\ \sqrt{a^2 - u^2} \quad ; \quad B)\ \sqrt{a^2 + u^2} \quad ; \quad C)\ \sqrt{u^2 - a^2} \qquad ; \quad u = u(x)$$

El método se fundamenta en la aplicación del teorema de Pitágoras y considera tres posibles casos, dependiendo de la forma del radical. Este teorema establece:

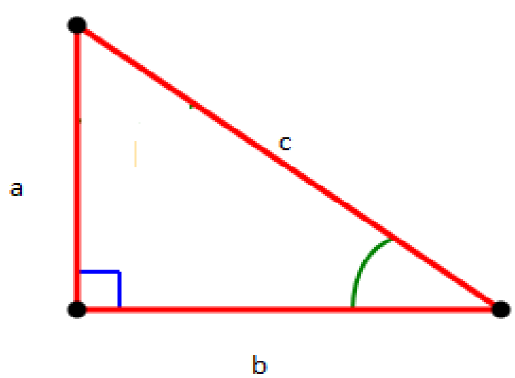
$$c^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \longleftarrow$$

la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos. Es el caso *B)*

$$A)\ o\ C)\quad a^2 = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$A)\ o\ C)\quad b^2 = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Aquí los catetos, adyacente o el opuesto se expresan en términos de los demás elementos



En un triángulo rectángulo se pueden definir seis identidades trigonométricas:

$$sen\varphi = \frac{c.o.}{h}\ ,\ \csc\varphi = \frac{h}{c.o.}$$

$$\cos\varphi = \frac{c.a.}{h}\ ,\ \sec\varphi = \frac{h}{c.a}$$

$$\tan\varphi = \frac{c.o.}{c.a}\ ,\ \cot\varphi = \frac{c.a.}{c.o.}$$

Estas funciones deberán dominarse perfectamente.

Oras identidades que se emplean en este método son las siguientes:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$sen\,2\theta = 2sen\theta\,\cos\theta$$

Deberán dominarse también.

IMPORTANTE: ESTE MÉTODO REQUIERE EL CONOCIMIENTO DE FUNCIONES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DIVERSAS (ANTECEDENTES DE TRIGONOMETRÍA). PARA QUE LAS RECUERDEN, SE PRESENTAN EN DOS CUADROS LAS QUE SE EMPLEARÁN. **ADEMÁS, DE BUEN MANEJO DE LAS INTEGRALES INMEDIATAS.**

Enseguida se ilustrarán cada uno de los tres casos arriba mencionados. En las integrales que se presenten, se realizará cambio de variable que involucrará a algunas funciones trigonométricas con su argumento respectivo (será el ángulo), este ángulo será la nueva variable de integración. ***ESTE PROCESO SE CONOCE COMO SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA*** , es lo que da nombre al método.

Con la finalidad de facilitarles la comprensión del método, he desglosado el proceso que se debe seguir; aparentemente es muy largo, pero con práctica y siguiendo los pasos de manera ordenada y metódica, es posible lograr un buen aprendizaje.

El procedimiento para realizar la sustitución trigonométrica se establece enseguida:

1) Trace un triángulo rectángulo.

2) El radical se debe colocar en el lado del triángulo que defina a la hipotenusa o a algún cateto. Cuando *haya diferencia en el radical*, *éste debe colocarse en cualquiera de los catetos* Para que sea válido el teorema de Pitágoras, el término positivo siempre es la hipotenusa, se debe colocar en la posición correspondiente del triángulo. El elemento restante es el otro cateto.

3*) Si hay suma en el radical, éste debe colocarse en la hipotenusa* y los elementos que contiene, se colocan en los dos catetos.

4) Enseguida, se busca una identidad trigonométrica que relacione a la función $u = u(x)$ con el elemento constante (en este caso a). De la identidad trigonométrica, se despeja a la variable independiente x y después se calcula dx.

6) La identidad trigonométrica debe ser tal que relacione el radical con el elemento constante.

7) Todos los términos de la integral deben expresarse en términos de identidades trigonométricas: **esto es la sustitución trigonométrica.**

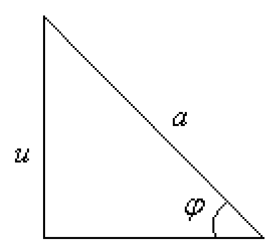
8) La nueva variable de integración es el argumento de las identidades trigonométricas.

9) Se resuelve la integral.

10) El resultado final debe expresarse en términos de la variable original . Para hacerlo se buscará en el triángulo la identidad trigonométrica que se haya obtenido; frecuentemente se emplearán las identidades de los dos cuadros anteriores.

Se ilustra este proceso, con ejemplos de cada uno de los tres casos de radicales.

Caso I: Se tiene en el integrando $\sqrt{a^2 - u^2}$; $u = u(x)$, $a = cte.$



$\sqrt{a^2 - u^2}$

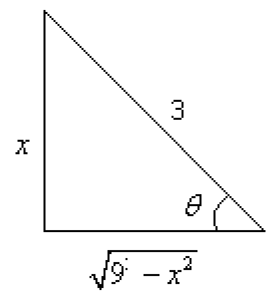
$$sen\,\varphi = \frac{u}{a}$$
$$u = a\,sen\,\varphi$$
$$du = a\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$$
$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\varphi$$

Ejemplo: Calcular

$a)\ \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$ Se sigue enseguida cada uno de los 10 pasos descritos, pero no se numeran.

<u>Cuando el radical tiene diferencia, corresponde a un cateto (cualquiera de ellos)</u>



$$sen\,\theta = \frac{x}{3} \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

$$x = 3\,sen\,\theta \qquad \sqrt{9 - x^2} = 3\cos\varphi$$

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \int 3\cos\theta\, 3\cos\theta\, d\theta = 9\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$I = 9\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = 9\int \frac{1}{2}\,d\theta + 9\int \frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta$$

$$I = \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\,sen\,2\theta\right] + c$$

Debe expresarse en términos de la variable original. Usando el triángulo, se emplean las identidades básicas de los cuadros anteriores.

$$sen\,\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \theta = ang\,sen\,\frac{x}{3}$$

$$sen\,2u = 2\cos u\, sen\,u \quad ; \quad sen\,2\theta = 2sen\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

$$I = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\left(2\, sen\,\theta \cos\theta\right) + c$$

$$I = \frac{9}{2}\, ang\, sen \frac{x}{3} + \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + c$$

Finalmente :

$$I = \frac{9}{2}\, ang\, sen \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\, x\sqrt{9 - x^2} + c$$

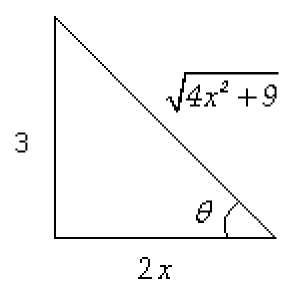
Caso II: El integrando presenta un radical del tipo $\sqrt{u^2 + a^2}\,; u = u(x)$, $a = cte.$

Ejemplo: Calcular

$b)\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}}$ **<u>Cuando el radical tiene suma, corresponde a la hipotenusa</u>**

$$\tan\theta = \frac{3}{2x}\;; despejando\ a\ la\ variable\ se\ tiene$$

$$x = \frac{3}{2\tan\theta} = \frac{3}{2}\cot\theta \quad , dx = -\frac{3}{2}\csc^2\theta\, d\theta$$



$$sen\,\theta = \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 9}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4x^2 + 9} = \frac{3}{sen\,\theta} = 3\csc\theta$$

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}} = \int -\frac{(3/2)\csc^2\theta\, d\theta}{(3/2)\cot\theta\left(3\csc\theta\right)} = -\frac{1}{3}\int \frac{\csc\theta}{\cot\theta}\, d\theta$$

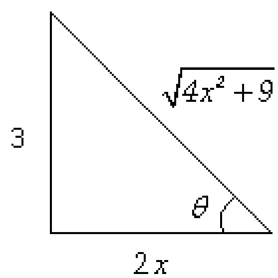
$$\frac{\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\dfrac{1}{sen\,\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{sen\theta}} = \frac{sen\,\theta}{sen\,\theta\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$I = -\frac{1}{3}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

Para expresar en términos de la variable original, obtenemos del triángulo las funciones obtenidas en el resultado, así como las identidades de los cuadros presentados.

En este caso:



$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{2\,x}$$

$$I = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x} + \frac{3}{2x}\right| + c$$

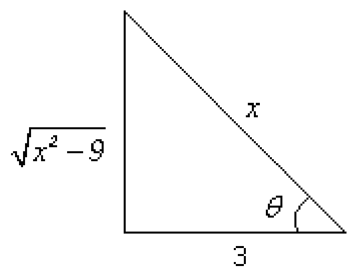
$$I = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sqrt{4x^2+9}}{2x}\right| + c$$

Caso III: El integrando presenta un radical del tipo $\sqrt{u^2 - a^2}\,; u = u(x)\ ,\ a = cte.$

<u>Cuando el radical tiene diferencia, corresponde a un cateto (cualquiera de ellos)</u>

Ejemplo: Calcular

$c)\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx$ Como ya se mencionó, cuando hay diferencia en el radical, debe colocarse en alguno de los catetos.



$$\cos\theta = \frac{3}{x} \qquad x = \frac{3}{\cos\theta} = 3\sec\theta \quad \Rightarrow dx = 3\sec 3\sec\theta\tan\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 9} = 3\tan\theta$$

Efectuando la sustitución en la integral original:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx = \int \frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}\,3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$I = 3\int \tan^2\theta\,d\theta \leftarrow esta\ integral\ requiere\ una\ identidad: \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$I = 3\int \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = 3\left[\tan\theta - \theta\right]$$

El resultado obtenido se expresa en términos de la variable original x ; no olvidar que para hacerlo, la referencia es el triángulo y las identidades trigonométricas.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} = \tan\theta \qquad \cos\theta = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \theta = ang\cos\frac{3}{x}$$

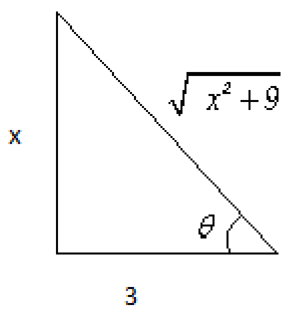
Finalmente

$$I = 3\left[\tan\theta - \theta\right] = 3\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} - ang\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right) + C$$

Ejemplo: Calcular

$$d)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 + x^2}} = I$$

<u>Si el radical presenta suma, corresponde a la hipotenusa</u>



La identidad trigonométrica que relaciona a la variable con la constante es la tangente:

$$\tan\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tan\theta \ , \ dx = 3\sec^2\theta$$

La identidad trigonométrica que relaciona el radical con la constante es el coseno:

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9 + x^2}} \Rightarrow \sqrt{9 + x^2} = \frac{3}{\cos\theta}$$

Es más cómodo trabajar con la función recíproca del coseno, que es la secante:

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$$

También se requiere la variable x^2, la cual se obtiene de la siguiente manera: $x^2 = (3\tan\theta)^2 = 9\tan^2\theta$

Sustituyendo en la integral original:

$$I = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{9\tan^2\theta\ 3\sec} = \frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}}\, d\theta$$

$$I = \frac{1}{9}\int (se\,n\,\theta)^{-2}\cos d\theta = \frac{1}{9}\left[\frac{(se\,n\,\theta)^{-1}}{-1}\right] + C = -\frac{1}{9\,sen\,\theta} + C = -\frac{1}{9}\csc\theta + C$$

Para regresar a la variable original, nuevamente referimos al triángulo y a la identidad trigonométrica del resultado obtenido:

$$c\,sc\,\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$$

$$I = -\frac{1}{9}\csc\theta + C = -\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x} + C$$

A CONTINUACIÓN SE PRESENTAN ALGUNOS COMENTARIOS, REVÍSENLOS POR FAVOR. POSTERIORMENTE SE INCORPORA LA TAREA.

ESTE MÉTODO DE INTEGRACIÓN, EN MUCHAS OCASIONES PUEDE PENSARSE QUE ES DIFÍCIL, PERO REALMENTE NO ES ASÍ. LA CLAVE ESTÁ EN LO SIGUIENTE:

- ✓ DOMINAR LAS INTEGRALES BÁSICAS (LO QUE IMPLICA BUEN MANEJO DE LA DERIVADA, LO VIMOS ANTES DE LA CONTINGENCIA).
- ✓ RECORDAR Y/ O REPASAR LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE USO FRECUENTE.
- ✓ DEBEN REALIZARSE DIVERSIDAD DE EJERCICIOS.

PARA ESTE ÚLTIMO PUNTO, LES PROPORCIONO LA SIGUIENTE LIGA DE INTERNET

https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/ic-integration/ic-trig-substitution/e/integration-using-trigonometric-substitution

SUGERENCIA, REPITAN LOS EJERCICIOS RESUELTOS QUE HE PRESENTADO EN ESTAS NOTAS, PARA QUE PUEDAN DETECTAR LO QUE LES PAREZCA MÁS COMPLICADO Y DE AHÍ, ENVIARME SUS DUDAS.

TAREA PARA ENVIAR EL JUEVES 2 DE ABRIL (si terminan antes, no enviar. Deben hacerlo exclusivamente el día indicado , de otra forma se eliminan los archivos.)

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES: EN LA RESOLUCIÓN DEBE REALIZARSE EL PROCESO ORDENADO Y COMPLETO, COMO LOS EJEMPLOS MOSTRADOS EN ESTAS NOTAS. SE MUESTRA EL RESULTADO AL QUE DEBEN LLEGAR.

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-16}}$

RESPUESTA:

$$I = \frac{1}{8}\cos\theta + C$$

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{4x^2-16}}{2x}\right) + C$$

2) $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

RESPUESTA:

$$I = 243\left[\frac{1}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right] + C$$

$$I = \frac{1}{5}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^5 - 3\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3 + C$$