IMPORTANTE

SE SUGIERE QUE ESTÁN NOTAS SE IMPRIMAN, ADEMÁS DE SER MUY BIEN ESTUDIADAS, ASÍ COMO LOS EJEMPLOS QUE SE MUESTRAN, PUES PARA RESOLVER LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS POR ESTE MÉTODO, DEBERÁN DOMINARSE LOS OPERADORES DIFERENCIALES ANULADORES. AL TÉRMINO DE ESTAS NOTAS, SE INDICARÁ LA TAREA PARA ENVIAR EL MIÉRCOLES 25 DE MARZO.

TEMA 2

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS – ENFOQUE OPERADOR ANULADOR

Breve Introducción Teórica:

Este método se usa para obtener ***una solución particular*** **(** y_p **)** de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes, cuya forma general es:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = q(x)$$

Para obtener esa solución particular, inicialmente se buscará que la ecuación diferencial no homogénea se transforme en una homogénea, para lo cual se hará cero a la función $q(x)$. Para lograrlo, se requiere de un elemento al que se le conoce como Operador Diferencial Anulador, o simplemente *Operador Anulador*. Es importante señalar, como ya se mencionó en la clase, que sólo hay operadores para cierto tipo de funciones. Recordando:

OPERADORES DIFERENCIALES ANULADORES (ANIQUILADORES)

1) *El Operador Diferencial* D^n *anula cada una de las funciones*

$$k(cte), x, x^2, x^3, \ldots x^{n-1}.$$

n indica el número de veces que se repite la raíz

2) *El Operador Diferencial* $(D-\lambda)^n$ *anula cada una de las funciones*

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, x^3 e^{\lambda x}, \ldots x^{n-1} e^{\lambda x}$$

n indica el número de veces que se repite la raíz λ

3) El Operador Diferencial $\left[D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right]^n$ aniquila cada una de las funciones

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, x^3e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, x^2e^{\alpha x}sen\beta x, x^3e^{\alpha x}sen\beta x, \ldots x^{n-1}e^{\alpha x}sen\beta x,$$

Donde α es la parte real y β la parte imaginaria de la raíz compleja $\lambda = \alpha \pm \beta$,
n indica el número de veces que se repite la raíz

LOS 3 TIPOS OPERADORES ANULADORES DEBERÁN APRENDERSE DE MEMORIA (NO HAY FORMULARIO), PERO SOBRETODO, COMPRENDER CÓMO SE APLICAN A LAS FUNCIONES, PUES A PARTIR DE ELL0S SE RESOLVERÁN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS.

En los ejemplos mostrados en clase y en los de tarea, las funciones anuladas provenían de la misma raíz.
Pero, ¿qué pasa si se tienen varias funciones y provienen de diferentes raíces?
Lo ilustramos a continuación con algunos ejemplos:

Ejemplo. Obtener un operador anulador de la función $f(x) = 2x - 3e^{2x} + xe^{-x} + \cos x$

Solución:
Cada función proviene de las raíces que se obtienen de las siguientes ecuaciones: $\lambda^2 = 0$, $\lambda - 2 = 0$, $(\lambda+1)^2 = 0$, $(\lambda^2 + 1) = 0$

Entonces, los operadores para cada función, que provienen de diferentes raíces, **SE DEBEN MULTIPLICAR,** como se indica enseguida:

$$P(D) = \left(D^2\right)(D-2)(D+1)^2\left(D^2+1\right)$$

Por lo laborioso del proceso no se muestra la comprobación.

Ejemplo. Obtener un operador anulador de la función

$$f(x) = 2 + \frac{1}{5}e^{-2x} + xe^{-2x} + 5e^{2x}\cos x - 7xsen3x + x^3\cos 3x - 4x^2$$

Solución:
Aquí se deben revisar todos los términos, e identificar si existen varios que provengan de la misma raíz (pueden estar dispersos, como en este ejemplo) ; esto es muy importante, pues

interesa el <u>operador diferencial de menor orden</u>, de otra manera se pueden tener operadores anuladores en exceso. (Se deja al alumno como actividad, identificar las diferentes raíces y confirmar que el operador diferencial es el correcto, no deben verificar como en la tarea, sólo comentar si es correcto o no)
En este caso, el operador diferencial anulador de menor orden es:

$$P(D)=\left(D^3\right)(D+2)^2\left(D^2-2(2)D+\left[(2)^2+(1)^2\right]\right)\left(D^2+9\right)^4$$

$$P(D)=\left(D^3\right)(D+2)^2\left(D^2-4D\ +\ 5\right)\left(D^2+9\right)^4$$

<u>Es importante mencionar que no es necesario efectuar los productos y tampoco comprobar que anula a la función</u>.

Esperando que se haya comprendido cómo es posible anular cierto tipo de funciones, enseguida se presentará con un ejemplo el proceso completo de solución de ED no homogéneas, por este método. Posteriormente se deberá realizar la tarea que se indique.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS – ENFOQUE OPERADOR ANULADOR

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y''-y\ =2+x-e^x$ **............ (A)**

Solución:

Se tiene una ecuación diferencial <u>no homogénea</u>, por lo que su solución es de la forma:

$$y_G\ =y_h+y_p$$

Como se ha presentado en clase, inicialmente se obtiene y_h, que es la solución de la ecuación homogénea asociada:

y_h :

$$y''-y\ =0$$

En términos del operador diferencial:

$$D^2\,y-y=0$$

$$\left(D^2-1\right)y=0$$

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda^2=1\ \Rightarrow\ \lambda_1=1\,,\ \lambda_2=-1$$

$$y_h\ =C_1e^x\ +\ C_2e^{-x}$$

y_p : Para obtener esta solución empleamos Coeficiente Indeterminados, por lo que se requiere un operador anulador de la función

$$q(x)\ =2+x-e^x$$

De la teoría vista:

$$P(D)\ =D^2\left(D-1\right)$$

$$P(D)\ q(x)=D^2\left(D-1\right)q(x)=0$$

Este Operador se aplica en ambos miembros de la ecuación diferencial no homogénea (A)

$$D^2\left(D-1\right)\left(D^2-1\right)y=0\qquad \text{.....(B)}$$

Continúa en *

* Y su ecuación auxiliar es $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2-1)=0$; las raíces son:

$$\lambda_1=1\ ,\lambda_2=-1\ ,\lambda_3=\lambda_4=0\ ,\lambda_5=1$$

Es importante observar que si bien la asignación de los subíndices de las raíces es arbitraria, es conveniente que la asignación tenga como referencia los subíndices de la solución de la homogénea asociada.

De acuerdo a las raíces anteriores, la solución de (B) es:

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \underbrace{C_3 + C_4 x + C_5 x e^x}_{y_p}$$

Donde y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea y y_G es la solución general. Las constantes desconocidas de y_p se llaman ***Coeficientes Indeterminados***. Para determinar su valor, como se vio en clase, se considera que si y_p es solución de la ecuación no homogénea (A), entonces la satisface. Por lo tanto, debemos obtener las derivadas de y_p :

$$y_p = C_3 + C_4 x + C_5 x e^x$$
$$y'_p = C_4 + C_5 x e^x + C_5 e^x$$
$$y''_p = C_5 x e^x + 2C_5 e^x$$

Sustituyendo en (A):

$$C_5 x e^x + 2C_5 e^x - \left(C_3 + C_4 x + C_5 x e^x\right) = 2 - e^x + x$$
$$C_5 x e^x + 2C_5 e^x - C_3 - C_4 x - C_5 x e^x = 2 - e^x + x$$

Reduciendo términos semejantes: $2C_5 e^x - C_3 - C_4 x = 2 - e^x + x$

Por igualdad de polinomios se tiene:

$$2C_5 = -1 \Rightarrow C_5 = \frac{-1}{2}$$
$$-C_4 = 1 \Rightarrow C_4 = -1$$
$$-C_3 = 2 \Rightarrow C_3 = -2$$

Por lo que la solución particular es $y_p = -2 - x - \frac{1}{2}xe^x$ y la solución general:

$$y_G = y_h + y_p$$

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2 - x - \frac{1}{2} xe^x$$

De esta forma , se ha ilustrado la aplicación del Método de Coeficientes Indeterminados – Enfoque Operador Anulador.

Enseguida se presenta otro ejemplo.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y''' + y'' = sen(2x) + 5$ **………… (A)**

Solución:

Se tiene una ecuación diferencial no homogénea, por lo que su solución es de la forma:

$$y_G = y_h + y_p$$

Como se ha presentado en clase, inicialmente se obtiene y_h , que es la solución de la ecuación homogénea asociada:

y_h :

$$y''' + y'' = 0$$

En términos del operador diferencial:

$$D^3 y + D^2 y = 0$$

$$\left(D^3 + D^2\right) y = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \ , \ \lambda_3 = -1$$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_2 e^{-x}$$

y_p : Para obtener esta solución empleamos Coeficiente Indeterminados, por lo que se requiere un operador anulador de la función $q(x) = sen(2x) + 5$

$$P(D) = D\left(D^2 + 4\right)$$

Este Operador se aplica en ambos miembros de la ecuación diferencial no homogénea (A)

$$D\left(D^2+4\right)\left(D^3+D^2\right)y=0 \quad .....(B)$$

$$\lambda\left(\lambda^2+4\right)\left(\lambda^3+\lambda^2\right)=0$$

$$\lambda\left(\lambda^2+4\right)\lambda^2\left(\lambda+1\right)=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0\ ,\ \lambda_3=-1\ ,\ \lambda_4=\ 0\ ,\ \lambda_{5,6}=\pm 2i$$

$$y_G=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\underbrace{C_4x^2+C_5\cos 2x+C_6\,sen2x}_{y_p}$$

$$y_p=C_4x^2+C_5\cos 2x+C_6\,sen2x$$

$$y'_p=2C_4x-2\,C_5\,sen2x+2C_6\cos 2x$$

$$y''_p=2C_4-4C_5\cos 2x-4C_6\,sen2x$$

$$y'''_p=\ 8C_5\,sen2x-8C_6\cos 2x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (A)

$$8C_5\,sen2x-8C_6\cos 2x+2C_4-4C_5\cos 2x-4C_6\,sen2x=sen\,2x+5$$

Factorizando:

$$\left(8C_5-4C_6\right)sen2x+\left(-8C_6-4C_5\right)\cos 2x+2C_4=sen\,2x+5$$

$$Por\ igualdad\ de\ polinomios$$

$$8C_5-4C_6=1$$

$$-8C_6-4C_5=0$$

$$2C_4=5$$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$$C_4=\frac{5}{2}\ ,\ C_5=\frac{1}{10}\ ,\ C_6=-\frac{1}{20}$$

Entonces la solución particular es: $y_p=\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{20}\,sen2x$ y la solución general:

$$y_G=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{20}sen\,2x$$

Como puede observarse, este método se caracteriza por un proceso algebraico que puede llegar a ser en ocasiones muy laborioso, pero es inevitable. También hay que recordar que si hay condiciones iniciales, se aplicarán en la solución general.

TAREA PARA ENVIAR EL MIÉRCOLES 25 DE MARZO (FORMATO PDF)

Se indica la solución a la cual se debe llegar (eso les ayudará a identificar y a corregir un posible error)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, mediante el método de coeficientes indeterminados:

1) $y'' - 2y' + 5y = e^x sen x$

   Solución: $y_G = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x sen\, 2x + \frac{1}{3} e^x sen\, x$

2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

   Solución: $y_G = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x + x - 13$