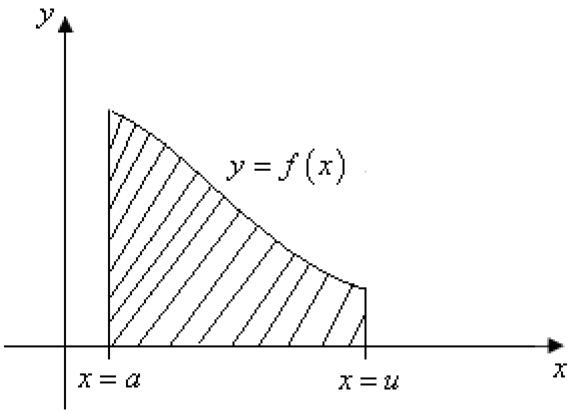
NOTAS DE CLASE

LA INTEGRAL IMPROPIA

Sea una función f continua en un cierto intervalo $[a\ ,\ \infty)$, siempre positiva y que cumple con el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



Si $u > a$, siendo $u\ ,\ a \in D_f$, entonces el área $A(u)$ bajo la curva entre a y u está dada por la expresión:

$$A(u) = \int_a^u f(x)\,dx$$

Si en esta expresión el $\lim_{u \to \infty} A(u)$ existe, entonces el límite puede ser interpretado como el área bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x y hacia la derecha de $x = a$ y el símbolo que se usa para denotar este valor es

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln b$$

$$\int_a^x f(u)\,du + C$$

Ahora bien, de forma más general diremos que si se tiene una función f, continua en el intervalo $[a\ ,\ \infty)$, entonces por definición:

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\,dx \qquad \text{si el límite existe}}$$

(A)

De manera similar, si f es continua en el intervalo $(-\infty\ ,\ a)$, se define entonces:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^a f(x)\,dx}$$

(B)

Si $f(x) \geq 0 \quad \forall\ x$, esta expresión puede ser tomada como el área bajo la curva, sobre el eje x y a la izquierda de $x = a$.

Las expresiones (A) y (B) **son llamadas integrales impropias.**

La diferencia de estas integrales con las integrales definidas se debe a que uno de los límites de integración no es un número real.

Las integrales impropias se dice que convergen cuando al tender $u \to \infty$, $u \to -\infty$, el lado derecho de la ecuación existe. (**Es decir, que el límite dado en el lado derecho de A y B existe).**

Cuando no es así, (es decir que lím $\notin$) se dice que la integral diverge.

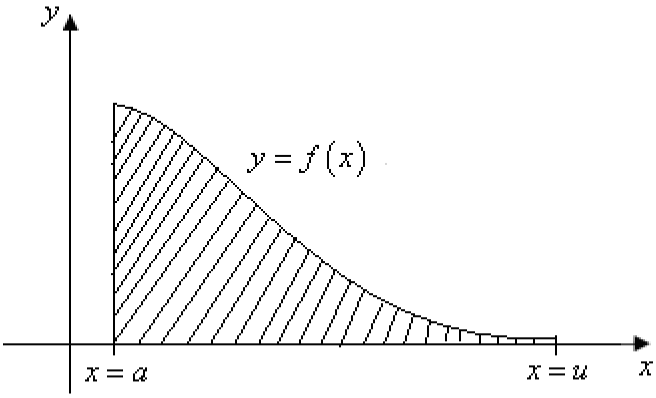
Las integrales impropias se presentan también con dos límites de integración. De manera específica, si f es continua $\forall\ x$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces por definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{ó}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^a f(x)\,dx + \lim_{v \to \infty} \int_a^v f(x)\,dx$$

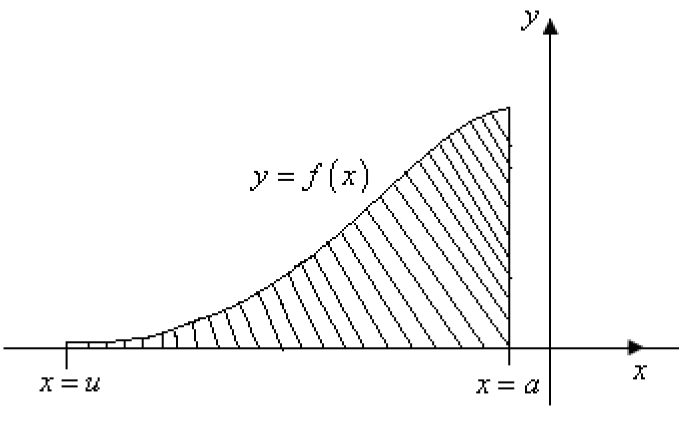
Si las dos integrales laterales convergen la integral impropia converge. Si una de ellas diverge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se dice que diverge.

$\int_{a}^{u} f(x)\,dx$ determina el área bajo la curva $y = f(x)$ y el límite indicado es igual a esta área.



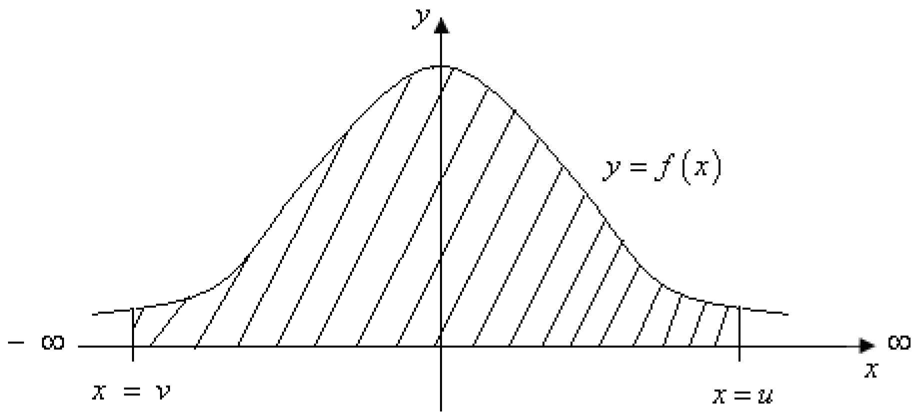
(A)

$$A(u) = \lim_{u \to \infty} \int_{a}^{u} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$



(B)

$$A(u) = \lim_{u \to \infty} \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx$$



(C)

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{v \to -\infty} \int_{v}^{a} f(x)\,dx + \lim_{u \to \infty} \int_{a}^{u} f(x)\,dx$$

$$-\infty < a < \infty$$

<u>Las integrales A, B y C son llamadas integrales impropias y se caracterizan cuando uno o ambos extremos de integración no son números reales.</u>

Las integrales impropias se dice que convergen cuando el límite existe, si no es así (límite no existe), se dice que la integral impropia diverge.

Ilustramos estos conceptos a continuación:

Ejemplo:

Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen

1) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_{2}^{u} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \lim_{x \to u} \int_{2}^{u} (x-1)^{-2}\,dx = \int u^n\,du$

$$u = x - 1$$
$$du = dx$$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \Bigg]_{2}^{u} = \lim_{u \to \infty} \frac{-1}{(x-1)} \Bigg]_{2}^{u}$$

$$\lim_{u \to \infty}\left[\frac{-1}{u-1} - \frac{-1}{(2-1)}\right] = \lim_{u \to \infty}\frac{-1}{u-1} + \lim_{u \to \infty}\frac{1}{1} = 0 + 1 = 1$$

el límite existe por lo tanto la integral converge y tiene el valor de 1.

2) $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{u \to \infty}\int_{2}^{u}\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{u \to \infty}\left[\ln(x-1)\right]_{2}^{u} =$

$$= \lim_{u \to \infty}\left[\ln(u-1) - \ln(2-1)\right] = \lim_{u \to \infty}\ln(u-1) - \lim_{u \to \infty}\ln(1)$$

$= \infty$, con más precisión diremos que $\lim\limits_{u \to \infty} \notin$

En este caso, el límite no existe y la integral diverge.

1) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx = \lim_{u \to \infty}\int_{2\pi}^{u}\frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx = \int \cos u\,dx$

$u = \dfrac{1}{x}$

$du = -\dfrac{1}{x^2}\,dx$

$$= \lim_{u \to \infty}\left[-\int_{2\pi}^{u}\frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx\right]$$

$$= \lim_{u \to \infty} - \left[sen(1/x)\right]_{2\pi}^{u}$$

$$= -\lim_{u \to \infty}\left[sen(1/x)\right]_{2\pi}^{u}$$

$$= -\lim_{u \to \infty}\left[sen(1/u) - sen(1/2\pi)\right] - sen(1/2\pi)$$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{u \to -\infty}\int_{u}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{u \to -\infty}\int_{u}^{2}(4-x)^{-2}\,dx =$

$$= \lim_{u \to -\infty}(-1)\int_{u}^{2}(4-x)^{-2}(-dx) = \lim_{u \to -\infty}(-1)\left[\frac{1}{4-x}\right]\Bigg|_{u}^{2}$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4 - u} \right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \exists$ el límite y la integral converge.

5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx + \lim_{v \to \infty} \int_{0}^{v} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{du}{1 + u^2}\, dx \qquad u^2 = x^2 \ , \ u = x \ , \ du = dx$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[ang \tan x \right]_u^0 + \lim_{v \to \infty} \left[ang \tan x \right]_0^v =$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[ang \tan(0) - ang \tan(u) \right]$$

$$+ \lim_{v \to \infty} \left[ang \tan(v) - ang \tan(0) \right]$$

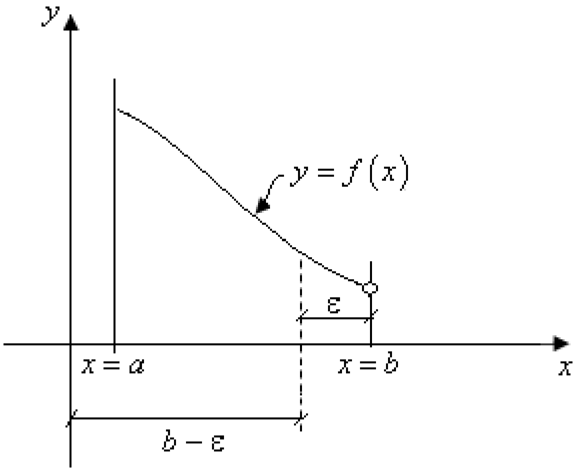
$$= -\left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

En el estudio de las integrales impropias, puede ocurrir que el integrando presente uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a \le x \le b$, en cuyo caso consideramos el siguiente manejo.

INTEGRANDO DISCONTINUO

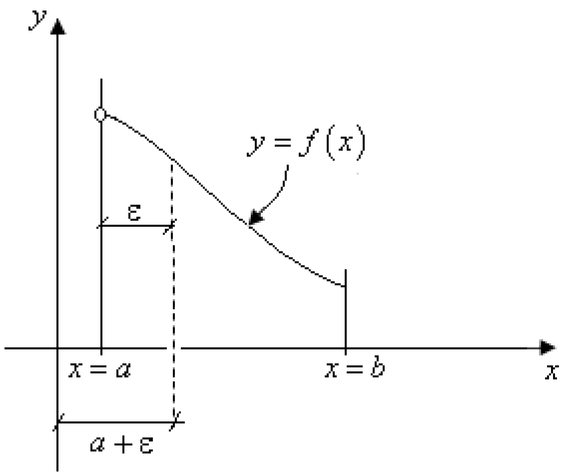
Sea $f(x)$ continua en $a \le x < b$, pero discontinua en $x = b$, es decir, discontinua en el extremo superior del intervalo; se establece

$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$, si el límite existe



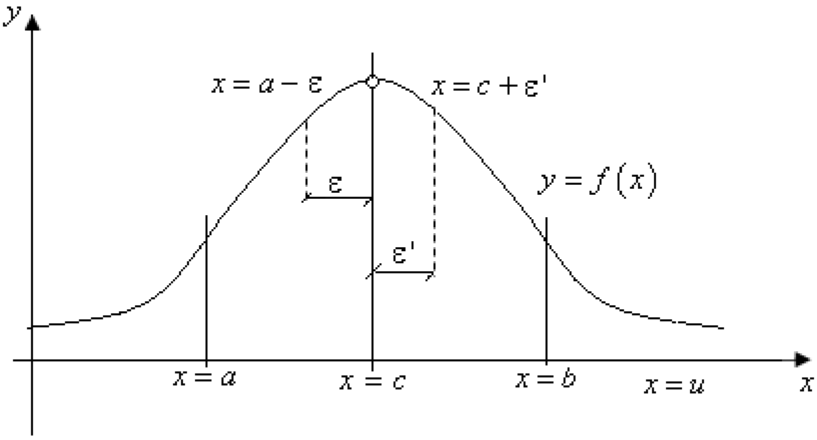
Sea $f(x)$ es continua en el intervalo $a < x \leq b$ pero discontinua en $x = a$, es decir discontinua en el extremo inferior del intervalo, se establece

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$, si el límite existe



Sea $f(x)$ continua para toda x en el intervalo $a \leq x \leq b$, excepto en $x = c$, con $a < c < b$, se establece

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$, si ambos límites existen



Ejemplos:

Calcular

1) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Resolución:

El integrando es discontinuo en $x = 3$, y éste es uno de los extremos de integración (el extremo superior), por lo cual consideramos lo anteriormente desarrollado:

$$\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0}^{3-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ang\ sen\left(\frac{x}{3} \right) \right]_{0}^{3-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ang\,sen\left(\frac{3 - \varepsilon}{3}\right) - ang\,sen\left(\frac{0}{3}\right)\right]$$

$$= ang\,sen\,(1) - ang\,sen\,(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \text{(converge)}$$

2) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x - 1)^2}$

Resolución

Observamos que es discontinua en $x = 1,\ 1 \in [0\ ,\ 4]\ 0 \le 1 \le 4$ (estamos en el tercero de los casos mostrados), entonces, para este ejemplo tenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x - 1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x - 1)^2} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon'}^4 \frac{dx}{(x - 1)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{x - 1} \right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon'}^4 \left[-\frac{1}{x - 1} \right]_{1+\varepsilon'}^4$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{(1 - \varepsilon - 1)} + \frac{1}{(0 - 1)} \right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \left[\frac{-1}{(4 - 1)} + \frac{1}{(1 + \varepsilon' - 1)} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{(-\varepsilon)} - 1 \right] + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \left[\frac{-1}{3} + \frac{1}{\varepsilon'} \right]$$

$$= (\infty - 1) + \left(\frac{-1}{3} + \infty \right)$$

Estos límites no existen por lo tanto la integral diverge.

Gráficamente: