IMPORTANTE

ESTAS NOTAS DEBERÁN SER IMPRESAS Y MUY BIEN ESTUDIADAS, ASÍ COMO LOS EJEMPLOS QUE SE MUESTRAN, PUES EN CLASE SÓLO SE ATENDERÁN DUDAS Y SE CONTINUARÁ CON EL PROGRAMA DE LA ASIGNATURA.

TEMA 2

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS – ENFOQUE OPERADOR ANULADOR

Breve Introducción Teórica:

Este método se usa para obtener una solución particular (y_p) de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes, cuya forma general es:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = q(x)$$

Las funciones $q(x)$ deben ser del tipo de las que se presentan a continuación.

Los operadores anuladores anulan a la función $q(x)$. Dependiendo del tipo de función, se emplean diferentes anuladores.

OPERADORES DIFERENCIALES ANULADORES (ANIQUILADORES)

1) El Operador Diferencial D^n anula cada una de las funciones

$$k(cte), x, x^2, x^3, \ldots x^{n-1} .$$

n indica el número de veces que se repite la raíz

Ejemplo: Obtener un operador diferencial aniquilador que anule a cada una de las siguientes funciones y verifique que efectivamente haga cero a la función.

a) $f(x) = 3$

Esta es la función constante, para que sea cero, debe derivarse una vez, lo que significa aplicar el operador diferencial anulador $P(D) = D$. Por inspección , se observa que cuando este operador se aplica a la función constante 3 , la hace cero (es decir la anula o aniquila).

b) $f(x) = x^2$

Esta es una función polinomial de grado 2, para que sea cero, debe derivarse 3 veces. El operador diferencial anulador es $P(D) = D^3$. Nótese que el grado del operador es mayor en una unidad que el exponente de la función.

2) El Operador Diferencial $(D - \lambda)^n$ anula cada una de las funciones

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, x^3 e^{\lambda x}, \ldots x^{n-1} e^{\lambda x}$$

n indica el número de veces que se repite la raíz λ

Ejemplo: Obtener un operador diferencial aniquilador que anule a cada una de las siguientes funciones y verifique que efectivamente haga cero a la función.

c) $f(x) = e^x$

Aquí la raíz que genera esta función es $\lambda = 1$, por lo que el operador anulador es $P(D) = (D-1)$.

Se verifica aplicando este operador a la función:

$$P(D)\left(e^x\right) = (D-1)\left(e^x\right) = D\left(e^x\right) - e^x = e^x - e^x = 0$$

d) $f(x) = xe^{-2x}$

Aquí la raíz que genera esta función es $\lambda = -2$, que está repetida 2 veces, por lo que el operador anulador es $P(D) = (D+2)^2$

Se verifica aplicando este operador a la función:

$$P(D)\left(xe^{-2x}\right)=(D+2)^2\left(xe^{-2x}\right)$$
$$=\left(D^2\ +\ 4D+4\right)\left(xe^{-2x}\right)$$

Cada término del operador anulador se aplica al producto de funciones.

Al aplicar D^2 al producto, se deriva 2 veces. Es importante indicar que se obtiene la primera derivada y el resultado obtenido nuevamente se deriva.

$$D^2\left(xe^{-2x}\right)=D\cdot\left[D\left(xe^{-2x}\right)\right]=D(-2xe^{-2x}\ +\ e^{-2x})=4xe^{-2x}-4e^{-2x}$$

Enseguida se aplica el siguiente término del operador anulador al producto de funciones:

$$4D\left(xe^{-2x}\right)=4\left(-2xe^{-2x}\ +\ e^{-2x}\ \right)=-8xe^{-2x}\ +\ 4e^{-2x}$$

Después sólo se multiplica la constante 4 por la función:

$$4\left(xe^{-2x}\right)\ =4xe^{-2x}$$

Finalmente se suman los resultados obtenidos:

$$4xe^{-2x}-4e^{-2x}-8xe^{-2x}+4e^{-2x}\ +\ 4xe^{-2x}\ =0$$

Lo anterior comprueba que efectivamente el operador que se eligió, es el anulador adecuado.

3) El Operador Diferencial $\left[D^2-2\alpha D\ +\ \left(\alpha^2\ +\beta^2\right)\right]^n$ aniquila cada una de las funciones

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, x^3e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, x^2e^{\alpha x}sen\beta x, x^3e^{\alpha x}sen\beta x,\ldots x^{n-1}e^{\alpha x}sen\beta x,$$

Donde α es la parte real y β la parte imaginaria de la raíz compleja $\lambda=\alpha\pm\beta$

n indica el número de veces que se repite la raíz

Ejemplo: Obtener un operador diferencial aniquilador que anule a cada una de las siguientes funciones y verifique que efectivamente haga cero a la función.

e) $f(x) = 2\cos x - 3senx$

En este caso, la raíz que genera los términos de la función es compleja de la forma $\lambda = \alpha \pm \beta$ con parte real $\alpha = 0,\ \beta = 1$.

El operador anulador para esta función es $P(D) = \left[D^2 + 1^2\right]$.

Se aplica a la función dada:

$$P(D) = \left(D^2 + 1^2\right)\left(2\cos x - 3senx\right)$$

$$= D^2\left(2\cos x - 3senx\right) + 1^2\left(2\cos x - 3senx\right)$$

$$= D\left[D\left(2\cos x - 3senx\right)\right] + \left(2\cos x - 3senx\right)$$

$$= D\left(-2senx - 3\cos x\right) + \left(2\cos x - 3senx\right)$$

$$= -2\cos x + 3senx + 2\cos x - 3senx = 0$$

De esta manera se comprueba que el operador anulador es correcto.

LOS 3 OPERADORES ANULADORES DEBERÁN APRENDERSE DE MEMORIA (NO HAY FORMULARIO), PERO SOBRETODO COMPRENDER CÓMO SE APLICAN A LAS FUNCIONES, PUES A PARTIR DE ELLAS SE RESOLVERÁN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CORRESPONDIENTES.