SERIE TEMA VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

1. Ejercicio: 002_VACD_081

Sean las distribuciones marginales de probabilidad de las variables aleatorias X y Y:

X	1	2
$f_x(x)$	0.40	0.60

Y	0	1	2	3
$f_y(y)$	0.20	0.30	0.40	0.10

Si X y Y son estadísticamente independientes:

Obtener la distribución de probabilidad conjunta.

Demostrar que el coeficiente de correlación: $p(x,y)=0$

Solución

a) Si X y Y son estadísticamente independientes, entonces:

$$f_{xy}(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$

$$f_{xy}(1,0)=0.40(0.20)=0.08 \qquad f_{xy}(2,0)=0.60(0.20)=0.12$$

$$f_{xy}(1,1)=0.40(0.30)=0.12 \qquad f_{xy}(2,1)=0.60(0.30)=0.18$$

$$f_{xy}(1,2)=0.40(0.40)=0.16 \qquad f_{xy}(2,2)=0.60(0.40)=0.24$$

$$f_{xy}(1,3)=0.40(0.10)=0.04 \qquad f_{xy}(2,3)=0.60(0.10)=0.06$$

		Y		
		1	2	$f_y(y)$
X	0	0.08	0.12	0.20
	1	0.12	0.18	0.30
	2	0.16	0.24	0.40
	3	0.04	0.06	0.10
	$f_x(x)$	0.40	0.60	1.0

b) $$Cov(x,y)=E(xy)-\mu_x\mu_y$$

$$E(xy)=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=2}^{3} xy\ f_{xy}(x,y) = (1)(0)(0.08)+(1)(1)(0.20)+(1)(2)(0.16)$$
$$+(1)(3)(0.40)+(2)(0)(0.12)+(2)(1)(0.18)$$
$$+(2)(2)(0.24)+(2)(3)(0.06) = 2.24$$

$$\mu_x = E(x) = \sum_{X=1}^{2} x\ f_x(x) = (1)(0.40)+(2)(0.60) = 1.60$$

$$\mu_y = E(y) = \sum_{X=0}^{3} y\ f_y(y) = (0)(0.20)+(1)(0.30)+(2)(0.4)+(3)(0.10) = 1.40$$

$$Cov(x,y)=2.24-2.24=0$$

$$\rho(x,y)=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{0}{\sigma_x\sigma_y}=0$$

2. Ejercicio: 003_VACD_081

Sean X y Y variables aleatorias con las distribuciones siguientes:

X	10	20
P(x)	0.6	0.4

Y	-4	7	10
P(y)	0.2	0.3	0.5

a)

b) Obtener la distribución conjunta de X y Y.

c) Calcular el promedio conjunto de X y Y.

d) Existe algún tipo de relación entre las variables, fundamentar la respuesta.

Solución

a)

X / Y	10	20	Marg Y
-4	0.12	0.08	0.20
7	0.18	0.12	0.30
10	0.30	0.20	0.50
Marg.X	0.60	0.40	1.00

b)
$$E(X,Y)=\sum xyp(x,y)$$
$$E(X,Y)=(-49)(10)(0.12)+...+(10)(29)(0.20)=88.2$$

c) No existe ninguna relación por ser independientes y considerando que

$$f(x,y)=f(x)f(y)..........A$$
$$Si\ \ f(x,y)=0.18$$
$$f(x=10)=0.6 \qquad f(y=7)=0.3$$

Sustituyendo en A se tiene $0.18=0.18$

Por lo tanto se cumple y son independientes

3. Ejercicio: 004_VACD_142

Se seleccionan al azar dos repuestos para una pluma de una caja que contiene 4 repuestos azules, 3 rojos y 5 verdes. Sea X la variable aleatoria que representa el número de repuestos azules en la selección y sea Y la variable aleatoria que representa el número de repuestos rojos.

a) Determinar la distribución de probabilidad conjunta.

b) Calcular $P\left[(x,y)\in A\right]$ donde $A=\{(x,y)\mid X+Y\le 1\}$

Diga si X y Y son estadísticamente independientes.

Solución

a) La distribución de probabilidad conjunta se define por:

$$f_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)=P(X=x\cap Y=y)$$

Sea **X** la variable aleatoria que representa el número de repuestos azules, su recorrido es:

$$R_X=\{0,1,2\}$$

Sea **X** la variable aleatoria que representa el número de repuestos azules, su recorrido es:

$$R_y=\{0,1,2\}$$

La función de probabilidad en forma analítica es:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\binom{4}{x}\binom{3}{y}\binom{5}{2-x-y}}{\binom{12}{2}}; & x=0,1,2;\ \ y=0,1,2;\ \ x+y\le 2\\ 0, & en\ otro\ caso\end{cases}$$

La función de probabilidad, en forma tabular, es:

$$f_{XY}(0,0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{(1)(1)(10)}{66}=\frac{10}{66}$$

$$f_{XY}(0,1)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{(1)(3)(5)}{66}=\frac{15}{66}$$

$$f_{XY}(0,2)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}}=\frac{(1)(3)(1)}{66}=\frac{3}{66}$$

$$f_{XY}(1,0)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{0}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{(4)(1)(5)}{66}=\frac{20}{66}$$

$$f_{XY}(1,1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}}=\frac{(4)(3)(1)}{66}=\frac{12}{66}$$

$f_{XY}(1,2)=0$ ya que $x+y$ debe ser ≤ 2,

$$f_{XY}(2,0)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}}=\frac{(6)(1)(1)}{66}=\frac{6}{66}$$

$f_{XY}(2,1)=0$ ya que $x+y$ debe ser ≤ 2,

$f_{XY}(2,2)=0$ ya que $x+y$ debe ser ≤ 2,

Entonces la forma tabular es:

$f_{XY}(x,y)$		x			$f_Y(y)$
		0	1	2	
y	0	$\frac{10}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{36}{66}$
	1	$\frac{15}{66}$	$\frac{12}{66}$	0	$\frac{27}{66}$
	2	$\frac{3}{66}$	0	0	$\frac{3}{66}$
$f_X(x)$		$\frac{28}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{6}{66}$	1

a) $P\left[(x,y)\in A\right]$ donde $A=\{(x,y)\mid X+Y\le 1\}$, esto es :

$$P(X+Y\le 1)=f_{XY}(0,0)+f_{XY}(0,1)+f_{XY}(1,0)=\frac{10}{66}+\frac{15}{66}+\frac{20}{66}=\frac{45}{66}$$

b) Las variables aleatorias conjuntas son independientes, cuando se cumple la definición:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

Sustituyendo se tiene:

$$f_{XY}(0,0)=f_X(0)f_Y(0)$$

Sustituyendo los valores de la función conjunta y de las funciones marginales, se tiene:

$$\frac{10}{66}\neq\left(\frac{28}{66}\right)\left(\frac{36}{66}\right)\quad o\ sea:\ \frac{5}{33}\neq\frac{28}{121}$$

Por tanto, no son estadísticamente independientes.

4. Ejercicio: 009_VACD_112

Sea $f(x,y)=c(x-y)\quad para\quad x=-2,0,2\quad y\quad y=-2,3;$

Determine el valor de c para que esta expresión sea una función de probabilidad conjunta.

Solución

Uno de los requisitos es que la suma de las probabilidades de 1, con lo cual podemos despejar el valor de c

$$1=c\left[\left(-2-(-2)\right)+\left(-2-(3)\right)+\left(0-(-2)\right)+\left(0-(3)\right)+\left(2-(-2)\right)+\left(2-(3)\right)\right]$$

$$1=c\left[0-5+2-3+4-1\right]$$

$$1=c(-3)$$

$$c=-\frac{1}{3}$$

5. Ejercicio: 010_VACD_112

Dos oftalmólogos se asociaron para poner una clínica en la que, por la subespecialidad que manejan, él puede atender hasta cinco pacientes por día y ella puede atender hasta tres pacientes por día. Si (X, Y) es un vector aleatorio, donde X es el número de pacientes atendidos por el doctor e Y es el número de pacientes atendidos por la doctora, según la tabla que muestra la función de masa de probabilidad conjunta.

Pacientes atendidos por la doctora	Función de masa de probabilidad conjunta (X, Y)					
	Pacientes atendidos por el doctor					
	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

a) Determine la función de distribución acumulada conjunta

b) Determine las funciones marginales de masa de probabilidad de X y de Y

c) Calcule la probabilidad de que entre los dos atiendan al menos a 6 pacientes en un día cualquiera.

d) Determine la función de densidad de probabilidad condicional del número de pacientes atendidos por el doctor, cuando la doctora atiende a dos pacientes

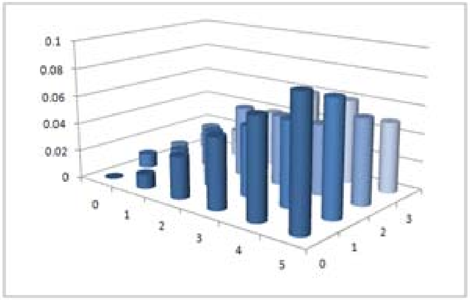
e) Determine la función de densidad de probabilidad condicional del número de pacientes que atiende la doctora, cuando el doctor atiende a cinco pacientes

f) Calcule las probabilidades $P(X=2\,|\,Y=2)$ y $P(Y=2\,|\,X=2)$

Determine si las variables aleatorias X e Y son independientes

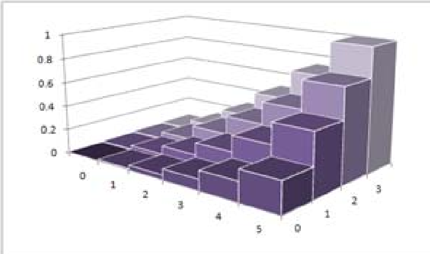
Solución

Gráfica de la FDP:



a) $$F_X(x,y)=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{3}p_X(x)$$

	Función de distribución acumulada conjunta					
	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25
1	0.01	0.04	0.11	0.21	0.34	0.51
2	0.02	0.08	0.2	0.35	0.53	0.76
3	0.03	0.11	0.27	0.48	0.72	1



$$p_X(x)=\sum_{j=0}^{3} p_X(x_i,y_j); \quad p_Y(y)=\sum_{i=0}^{5} p_X(x_i,y_j)$$

	Función de masa de probabilidad conjunta						
	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
X	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1

b) $P(X+Y\geq 6)=p_X(3,3)+p_X(4,2)+p_X(4,3)+p_X(5,1)+p_X(5,2)+p_X(5,3)$

$$=0.06+0.05+0.06+0.08+0.06+0.05=0.36$$

	Función de masa de probabilidad conjunta (X, Y)					
	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

c) $$p_X(x\mid y=2)=\frac{p_X(x,y)}{p_Y(2)}$$

	Función de masa de probabilidad conjunta						
	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24

	Función de masa de probabilidad condicional						
X | Y = 2	0.04	0.12	0.2	0.2	0.2	0.24	1

$$P(0\mid y=2)=\frac{0.01}{0.25}=0.04$$

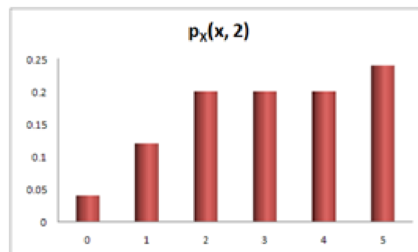
$$P(1\mid y=2)=\frac{0.03}{0.25}=0.12$$

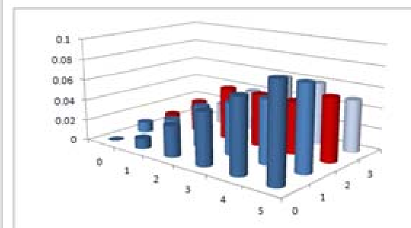
$$P(2\mid y=2)=\frac{p(2,2)}{0.25}=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

$$P(3\mid y=2)=\frac{p(3,2)}{0.25}=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

$$P(4\mid y=2)=\frac{p(4,2)}{0.25}=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

$$P(5\mid y=2)=\frac{p(5,2)}{0.25}=\frac{0.06}{0.25}=0.24$$



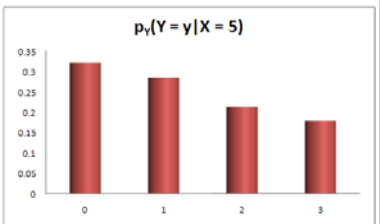


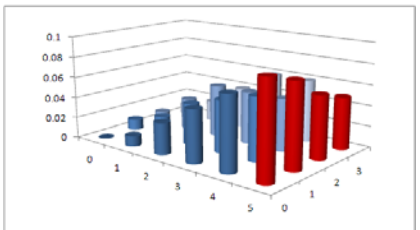
d)

	Función de masa de probabilidad conjunta				
	0	1	2	3	X
0	0	0.01	0.01	0.01	0.03
1	0.01	0.02	0.03	0.02	0.08
2	0.03	0.04	0.05	0.04	0.16
3	0.05	0.05	0.05	0.06	0.21
4	0.07	0.06	0.05	0.06	0.24
5	0.09	0.08	0.06	0.05	0.28

	Función de masa de probabilidad condicional				
Y|X=5	0.32142857	0.28571429	0.21428571	0.17857143	1

$$p_X(y \mid x=5) = \frac{p_X(x,y)}{p_X(5)}$$





e)

$$P(X=2 \mid Y=2) = \frac{p_X(2,2)}{p_Y(2)} = \frac{0.05}{0.16} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

$$P(Y=2 \mid X=2) = \frac{p_X(2,2)}{p_X(2)} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5} = 0.2$$

f) Las variables aleatorias X e Y no son independientes porque la masa de probabilidad conjunta no coincide con el producto de las marginales; por ejemplo:

$p_X(3)p_Y(1) = 0.21 \times 0.26 = 0.0546 \neq 0.05 = p_X(3,1);$ Además, se percibe que ni las filas, ni las columnas son proporcionales entre sí.

6. Ejercicio: 001_VACC_151

La función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) está dada por la expresión:

$$f_X(X,Y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{k}, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determine:

a) El valor de k que haga que la expresión dada sea efectivamente una FDP

b) La función de distribución acumulada conjunta del vector (X, Y)

c) Las funciones de masa de probabilidad marginal de las variables aleatoria X e Y

d) La función de masa de probabilidad condicional de X, para $Y = 1$

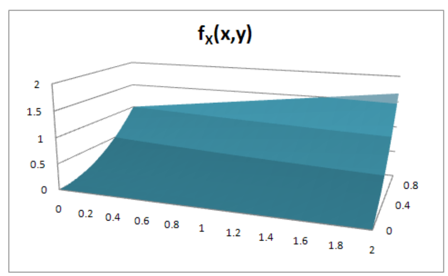
Solución

a)

$$\int_0^1\int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{k}\right)dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2k}\right]_0^2 dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2x}{k}\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{k}\right]_0^1$$

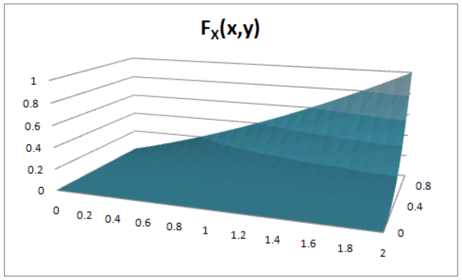
$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{k} = 1, \quad \frac{2k+3}{3k} = 1, \quad 2k+3 = 3k, \quad k = 3$$

$$f_X(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3}, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$$

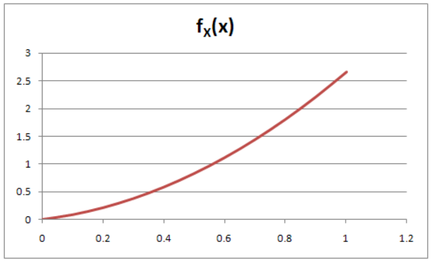


b) $F_X(x,y)=\int_0^x\int_0^y\left(u^2+\frac{uv}{3}\right)dv\,du=\int_0^x\left[u^2v+\frac{uv^2}{6}\right]_0^y du=\int_0^x\left(u^2y+\frac{uy^2}{6}\right)du$

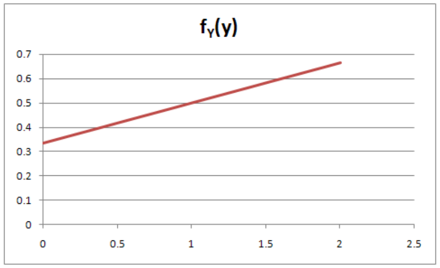
$$=\left[\frac{u^3y}{3}+\frac{u^2y^2}{12}\right]_0^x=\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{12}$$



c) $f_X(x)=\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=\left[x^2y+\frac{xy^2}{6}\right]_0^2=2x^2+\frac{2x}{3}$



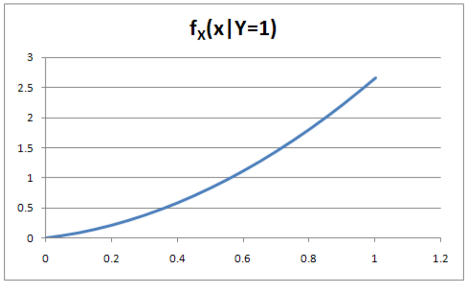
$$f_Y(y)=\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{6}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$$



d) La función de masa de probabilidad condicional de *X*, para *Y* = *1*

$$f_X(x\mid Y=1)=\frac{f_X(x,1)}{f_Y(1)}=\frac{x^2+x/3}{1/3+1/6}$$

$$=\frac{x^2+x/3}{1/2}=2x^2+\frac{2x}{3}$$



7. Ejercicio: 005_VACC_141

Sea X la variable aleatoria que mide la temperatura ambiental, en grados centígrados, que necesita un motor diesel para encender, Y la variable que mide el tiempo transcurrido, en minutos, hasta que enciende. Suponiendo que la f.d.p.c. viene dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}C(4x+2y+1) & si\ 0\le x\le 40;\ \ 0\le y\le 2\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante C.

b) Calcular las funciones de densidad marginales.

c) Calcular la probabilidad de que un día con temperatura de 20 ºC, tarde en encender más de un minuto.

Solución

a) Debemos considerar que se cumple (por ser f(x,y) f.d.p.c.):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$$

$$\int_0^{40} c\int_0^2 (4x+2y+1)\,dydx = 1$$

$$c = \frac{1}{6640}$$

b) Función de densidad marginal respecto de X:

$$g_X(x) = \begin{cases} \int_0^2 f(x,y)\,dy = \dfrac{1}{66440}(8x+6) & si \;\; 0 \le x \le 40 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Función de densidad marginal respecto de Y:

$$h(y) = \begin{cases} \int_0^{40} f(x,y)\,dx = \dfrac{1}{66440}(3240+80y) & si \;\; 0 \le y \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

c) La probabilidad pedida es:

$$P(Y>1 \,|\, X=20) = \frac{f(20,y)}{g(x=20)} = \frac{\frac{1}{6640}\left(4(20)+2y+1\right)}{\frac{1}{6640}\left(8(20)+6\right)}$$

$$P(Y>1 \,|\, X=20) = \begin{cases} \dfrac{1}{166}(81+2y) & si \;\; 0 \le y \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Entonces: $P(Y>1 \,|\, X=20) = \dfrac{1}{66}\int_1^2 (81+2y)\,dy = 0.506$

8. Ejercicio: 007_VACC_141

Un consultorio médico cuenta con dos líneas telefónicas. En un día seleccionado al azar, sea X la proporción del tiempo que se utiliza la línea 1 y sea Y la proporción del tiempo que se utiliza la línea 2. Si la función de densidad conjunta de estas variables aleatorias es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+2y); & 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 1 \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que la línea telefónica 2 se encuentre libre durante el 80% del día?

Solución

Probabilidad de que la línea telefónica 2 se encuentre libre durante el 80% del día = P(Y ≤ *0.2*)

$$P(Y \le 0.2) = \int_0^{0.2} f(y)\,dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{3}(x+2y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2y\right) = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}$$

Por lo tanto:

$$P(Y \le 0.2) = \int_0^{0.2} f(y)\,dy = \int_0^{0.2}\left(\frac{2}{6}+\frac{4}{3}y\right)dy = \frac{2(0.2)}{6}+\frac{4}{6}(0.2)^2 = \frac{7}{75} \approx 0.093$$

9. Ejercicio: 008_VACC_151

Suponga que el porcentaje X de alumnos y Y de alumnas que han concluido un examen de probabilidad y estadística se pueden describir mediante la función densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy \;\; para & 0 < x < 1, \;\; 0 < y < \varepsilon \\ 0 & c.o.c. \end{cases}$$

a) Encuentre las funciones marginales de X y Y respectivamente.

b) La función de probabilidad condicional de Y dado X

c) Calcule la probabilidad de que menos de 1/8 de las alumnas que participan en este examen lo hayan terminado si se sabe que exactamente ½ de los alumnos lo hicieron.

d) Determine la covariancia de X y Y.

Solución

a) $1=\int_0^y\int_0^1 8\,x\,y\;dx\;dy$; $1=2y^2$; $y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; $y=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$g(x)=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} 8\,xy\,dy = 2x$$

$$h(y)=\int_0^1 8\,xy\,dx = 4y$$

b) $P(y\mid x)=\dfrac{F(x,y)}{g(x)}=\dfrac{8xy}{2x}=4y$

c) $P\left(y<\dfrac{1}{8}\mid x=\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\int_0^{\frac{1}{8}}8\left(\frac{1}{2}\right)ydy}{g\left(x=\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\int_0^{\frac{1}{8}}4ydy=\frac{1}{16}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{32}$

d) Para determinar la covarianza primero se asegurará que las variables no sean independientes:

$f(x,y)=g(x)h(y)$

$8xy=(2x)(4y)$

$8xy=8xy$

$\therefore$ Las variables son independientes y la covarianza es igual a cero.

10. Ejercicio: 009_VACC_151

Sea X el precio que el transportista inicial paga por un barril de petróleo crudo, y Y, el que paga la refinería que compra ese petróleo. La densidad conjunta de X,Y está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{200} \qquad 20<x<y<40$$

a) Desde el punto de vista físico, ¿debe ser positiva o negativa CovX,Y?

b) Calcular EX, EY, EXY y CovX, Y.

c) Calcular EY- X. Interpretar esta esperanza desde el punto de vista práctico.

Solución

a) $\displaystyle\int_{20}^{40}\int_{20}^{y}\frac{1}{200}\,dx\,dy = 2$

NO ES FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA

Sugerido para clase

1. Ejercicio: 007_VACD_132

Supóngase que X y Y tienen la siguiente distribución conjunta

X \ Y	-2	1	3	Suma
2	0.15	0.14	0.2	0.49
4	0.25	0.15	0.11	0.51
suma	0.4	0.29	0.31	1

a) Hallar las distribuciones marginales de X y de Y.

b) Hallar la $cov(X,Y)$, esto es, la covarianza de X y de Y.

c) Hallar $p(X,Y)$, esto es, la correlación de X y de Y.

d) ¿X y Y son variables aleatorias independientes?

Solución

a) La distribución marginal a la derecha es la distribución de X:

X_i	2	4	Suma
$f(x_i)$	0.49	0.51	1.00

Y la distribución marginal del fondo es la distribución de Y:

Y_i	-2	1	3	Suma
$f(y_i)$	0.40	0.29	0.31	1.00

b) Primero Calculamos $\mu_X \mu_Y$:

$$\mu_X = \sum x_i f(x_i) = 2(0.49) + 4(0.51)$$
$$\mu_y = \sum y_j g(y_j) = -2(0.40) + 1(0.29) + 3(3.1) = 0.42$$

Luego se calcula $E(XY)$:

$$E(XY) = \sum x_i y_j h(x_i, y_j)$$
$$= 2(-2)(0.15) + 2(1)(0.14) + 2(3)(0.2)$$
$$+4(-2)(0.25) + 4(1)(0.15) + 4(3)(0.11)$$
$$= -0.6 + 0.28 + 0.12 - 2 + 0.6 + 1.32 = -0.28$$

Entonces:

$$cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_y = -0.28 - (3.02)(0.42)$$
$$= -0 - 28 - 1.2648 = 1.5484$$

c) Primero calculamos σ_X *y* σ_Y

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) = (2)^2(0.49) + (4)^2(0.51) = 10.12$$
$$\sigma_X^2 = var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 10.12 - (3.02)^2 = 0.9996$$
$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.9996} = 0.9998$$
$$E(Y^2) = \sum y_j^2 g(y_j)$$
$$= (-2)^2(0.40) + (1)^2(0.29) + (3)^2(0.31) = 4.68$$
$$\sigma_Y^2 = var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = 4.68 - (0.42)^2 = 4.5036$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{4.5036} = 2.1222$$

Entonces:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-1.5484}{(0.9998)(2.1222)} = -0.7298$$

d) X y Y no son independientes, puesto que:

$$P(X = 2,\ Y = -2) \neq P(X = 2)p(Y = -2)$$
$$h(2,-2) \neq f(2)g(-2)$$
$$0.15 \neq (0.49)(0.40)$$
$$0.15 \neq 0.196$$

2. Ejercicio: 012_VACC_121

Una instalación de servicio telefónico opera con dos líneas de servicio. En un día seleccionado aleatoriamente, sea *X* la proporción de tiempo que se utiliza la primera línea y *Y* la proporción de tiempo que se utiliza la segunda. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta para (□, □) es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2); & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcular la probabilidad de que ninguna línea se utilice más de la mitad del tiempo

b) Obtener la probabilidad de que la primera línea esté ocupada más del 75% del tiempo

Solución

a) Para que ninguna línea se utilice más de la mitad del tiempo se tiene $X \le \frac{1}{2}$ y $Y \le \frac{1}{2}$.

$$P(0 \le X \le 0.5,\ \ 0 \le Y \le 0.5) = \frac{3}{2}\int_{0.5}^{0.5}\int_{0.5}^{0.5}\left(x^2+y^2\right)dydx = \frac{1}{16}$$

b) La marginal de X es:

$$f_x(x) = \frac{3}{2}\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dy = \frac{3}{2}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)$$

Para $0 \le x \le 1$

Por lo que la probabilidad buscada está dada por:

$$P(X \ge 0.75) = \frac{3}{2}\int_{0.75}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{53}{128} \approx 0.414$$

3. Ejercicio: 014_VACC_112

Considere que la función de densidad de probabilidad conjunta de un vector aleatorio (*T, U*) es $f_X(t,u) = ke^{-(2t+u)},\quad t \ge 0,\quad u \ge 0$, donde *T* es el tiempo de espera en cola, en minutos, de los clientes en la caja normal de un pequeño supermercado, y *U* es el tiempo de espera en cola, en minutos, de los clientes en la caja rápida.

a) Determine el valor de *k* que hace que la función dada corresponda realmente a una función de densidad de probabilidad

b) Determine la función de distribución acumulada conjunta

c) Determine las funciones marginales de masa de probabilidad de *T* y de

d) Calcule la probabilidad de que el tiempo de espera en cola en la caja rápida sea mayor que el tiempo de espera en la caja normal

e) Determine la función de densidad de probabilidad condicional del tiempo de espera en cola de la caja normal cuando el tiempo de espera en cola de la caja rápida es de un minuto.

Solución

a)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty ke^{-(2t+u)}du\,dt = k\lim_{a\to\infty}\int_0^b \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(2t+u)}du\ dt$$

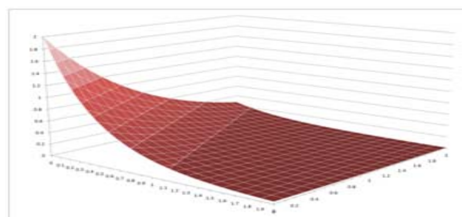
$$= k\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left[-\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(2t+u)}(-du)\right]dt$$

$$= k\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left\{-\lim_{a\to\infty}\left[e^{-(2t+u)}\right]_0^a\right\}dt = k\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left\{-\lim_{a\to\infty}\left[e^{-(2t+a)}-e^{-2t}\right]\right\}dt$$

$$= k\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left(e^{-2t}-e^{-\infty}\right)dt = k\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2t}dt = k\left\{-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2t}(-2dt)\right\}$$

$$= -\frac{k}{2}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-2t}\right]_0^b = -\frac{k}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-2b}-e^0\right) = \frac{k}{2}\left(1-e^{-\infty}\right) = \frac{k}{2}(1) = \frac{k}{2}$$

$$\frac{k}{2} = 1,\quad k = 2 \quad\Rightarrow\quad f_X(t,u) = 2e^{-(2t+u)},\quad t \ge 0,\quad u \ge 0$$



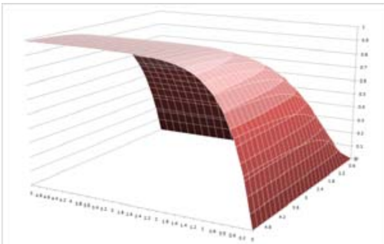
a)

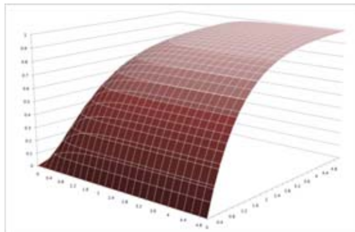
$$F_X(t,u) = 2\int_0^u\int_0^t e^{-(2x+y)}dxdy = 2\int_0^u\int_0^t e^{-2x}e^{-y}dxdy = 2\int_0^u\left(-\frac{e^{-y}}{2}\right)\int_0^t e^{-2x}(-2dx)dy$$

$$= -\int_0^u e^{-y}\left[e^{-2x}\right]_0^t dy = -\int_0^u e^{-y}\left(e^{-2t}-e^0\right)dy = -\int_0^u e^{-y}\left(e^{-2t}-1\right)dy$$

$$= -\left(1-e^{-2t}\right)\int_0^u e^{-y}\left(-dy\right) = \left(e^{-2t}-1\right)\left[e^{-y}\right]_0^u = \left(e^{-2t}-1\right)\left(e^{-u}-e^0\right)$$

$$= \left(e^{-2t}-1\right)\left(e^{-u}-1\right) = e^{-2t-u}-e^{-u}-e^{-2t}+1$$





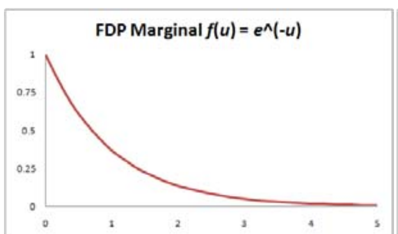
b)

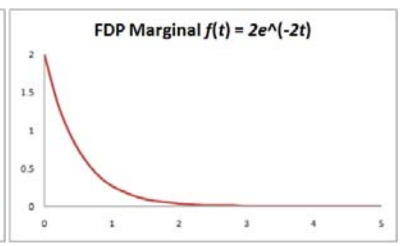
$$f_T(t) = 2\int_0^\infty e^{-2t}e^{-u}du = -2e^{-2t}\int_0^\infty e^{-u}(-du) = -2e^{-2t}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-u}(-du)$$

$$= -2e^{-2t}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-u}\right]_0^b = -2e^{-2t}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-e^0\right) = -2e^{-2t}\left(e^{-\infty}-1\right) = 2e^{-2t}$$

$$f_U(u) = 2\int_0^\infty e^{-2t}e^{-u}dt = -e^{-u}\int_0^\infty e^{-2t}(-2dt) = -e^{-u}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2t}(-2dt)$$

$$= -e^{-u}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-2t}\right]_0^b = -e^{-u}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-e^0\right) = -e^{-u}\left(e^{-\infty}-1\right) = e^{-u}$$

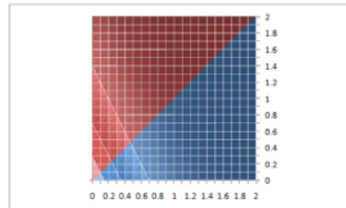




c) $$P(U\ge T) = P(0\le T\le\infty, T\le U\le\infty) = \int_0^\infty\int_t^\infty 2e^{-(2t+y)}dy\,dt = \int_0^\infty\left(-2e^{-2t}\right)\int_t^\infty e^{-y}(-dy)\,dt$$

$$= \int_0^\infty\left(-2e^{-2t}\right)\left[e^{-y}\right]_t^\infty dt = \int_0^\infty\left(-2e^{-2t}\right)\left(\cancel{e^{-\infty}}-e^{-t}\right)dt = \int_0^\infty 2e^{-2t}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty e^{-3t}dt$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-3t}(-3dt) = -\frac{2}{3}\left[e^{-3t}\right]_0^\infty = -\frac{2}{3}\left(\cancel{e^{-\infty}}-e^0\right) = -\frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3}$$



d)

$$f_T(t\,|\,u) = \frac{f_X(t,u)}{f_U(u)} = \frac{2e^{-(2t+u)}}{e^{-u}} = 2e^{-2t-u+u} = 2e^{-2t} = f_T(t)$$

$$f_U(u) = e^{-u},\quad f_U(1) = e^{-1} = \frac{1}{e},\quad f_T(t\,|\,1)$$

$$= \frac{f_X(t,1)}{f_U(u)} = \frac{2e^{-(2t+1)}}{1/e} = 2e^{-2t-1+1} = 2e^{-2t} = f_T(t)$$

La FDP condicional $f_T(t\,|\,u)$ coincide con la FDP marginal $f_T(t)$. También se debe verificar que

$$f_U(u\,|\,t) = f_U(u)$$

f) Identifique si las variables aleatorias *T* y *U* son independientes.

El resultado inmediato anterior indica que las variables aleatorias *T* y *U* son estadísticamente independientes. Otra forma de corroborarlo es que su FDP conjunta es el producto de sus FDPs marginales: $f_T(t)f_U(u) = 2e^{-2t}e^{-u} = 2e^{-(2t+u)} = f_X(t,u)$