FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
ACADEMIA DE PROBABILIDAD

Semestre: 2017-1

SERIE TEMA I
TEORIA DE PROBABILIDAD

1. El narcotráfico en Sinaloa tiene tres formas de transportar precursores para droga, por tierra, por río o por aire. La mitad del material es transportada por tierra, 30% por río y el resto por aire. La transportación por tierra puede ser 60% por brecha y el resto por autopista. La probabilidad de librar los retenes que la Policía Federal ha impuesto a lo largo de los diversos trayectos es 10% por autopista, 5% por brecha, 6% por río y 2% por aire.

a) ¿Qué porcentaje de los precursores logrará evadir la acción de la justicia?

b) Si los precursores no fueron interceptados, ¿cuál es la probabilidad de que hayan sido transportados por río?

c) Si los precursores no fueron interceptados, ¿cuál de los medios de transporte es el que presenta la mayor probabilidad de no ser interceptado?

Solución:

A1: Transportar por brecha (por tierra).
A2: Transportar por autopista (por tierra).
A3: Transportar por río (Fluvial).
A4: Transportar por aire.
B: Librar retenes.

P(A1)=60% de 50%=30%= 0.3
P(A2)=40% de 50%=20%= 0.2
P(A3)=30%= 0.3
P(A4)=20%= 0.2

P(B|A1)=5%= 0.05
P(B|A2)=10%= 0.10
P(B|A3)=6%= 0.06
P(B|A4)=2%= 0.02

a) ¿Qué porcentaje de los precursores logrará evadir la acción de la justicia?
Por el Teorema de Probabilidad Total:

P(B)= P(B|A1)P(A1)+ P(B|A2)P(A2)+
P(B|A3)P(A3)+ P(B|A4)P(A4)

P(B)= 0.05*0.3+0.1*0.2+0.06*0.3+0.02*0.2= 0.057

El 5.7% de los precursores logra evadir la acción de la justicia.

b) Si los precursores no fueron interceptados, ¿cuál es la probabilidad de que hayan sido transportados por río?

Por el Teorema de Bayes:

$$P(A1\,|\,B)=\frac{P(A1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\,|\,A1)P(A1)}{P(B)}=\frac{0.05*0.3}{0.057}=0.263158$$
$$=26.3158\%$$
$$P(A2\,|\,B)=\frac{P(A2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\,|\,A2)P(A2)}{P(B)}=\frac{0.1*0.2}{0.057}=0.350877$$
$$=35.0877\%$$
$$P(A3\,|\,B)=\frac{P(A3\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\,|\,A3)P(A3)}{P(B)}=\frac{0.06*0.3}{0.057}=0.315789$$
$$=31.5789\%$$
$$P(A4\,|\,B)=\frac{P(A4\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\,|\,A4)P(A4)}{P(B)}=\frac{0.02*0.2}{0.057}=0.070175$$
$$=7.0175\%$$

Como se puede apreciar en los cálculos anteriores, la probabilidad de que hayan sido transportados por río, dado que no fueron interceptados fue de 31.5789%.

c) Si los precursores no fueron interceptados, ¿cuál de los medios de transporte es el que presenta la mayor probabilidad de no ser interceptado?

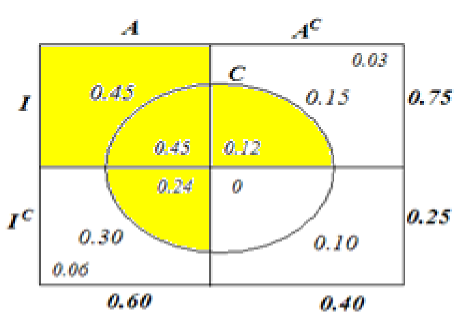
Como se puede apreciar en el inciso (b) la mayor probabilidad de no ser interceptados se tiene por autopista, con 35.0877%.

2. La contaminación del aire en Ciudad de México se debe, casi en su totalidad, a las emisiones de dos fuentes: vehículos e industria. La probabilidad de controlar esas fuentes es 75% para los vehículos y 60% para la industria. Se estima que si se llegara a controlar alguna de esas fuentes, la contaminación podría controlarse con una probabilidad del 80%. Si hay independencia entre control vehicular e industrial:

a) Determinar la probabilidad de controlar la contaminación en la Ciudad de México.

b) Si la contaminación no se controla, determinar la probabilidad de que el programa de control de emisiones en los vehículos no es exitoso.

Solución:



A: Control emisión vehicular; $P[A]=0.75$

I :Control emisión industrial; $P[I]=0.60$

C: Control de contaminación; $P[C|AI^C]=P[C|A^CI]=0.80$

$P[CAI]=P[C|AI]P[AI]=(1.00)(0.45)=0.45$

$P[CAI^C]=P[C|AI^C]P[AI^C]=(0.8)(0.3)=0.24$

$P[CA^CI]=P[C|A^CI]P[A^CI]=(0.8)(0.15)=0.12$

$P[CA^CI^C]=P[C|A^CI^C]PA^CI^C]=(0)(0.10)=0$

a) $P[C]=0.45+0.24+0.12+0=\mathbf{0.81}$

b) $P[A^C|C^C]=1- P[A|C^C]=1- P[AC^C]/P[C^C] =$

$= 1- 0.06/0.19 = \mathbf{0.684}$

3. Un inversionista está pensando en comprar un número muy grande de acciones de una compañía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en la información en la bolsa de valores, se observa que la cotización se relaciona con el valor del oro en el mercado internacional. Si el valor del oro aumenta en el mundo, la probabilidad de que aumenten las acciones es de 0.8; si el valor del oro es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0.17; si el valor del oro disminuye, la probabilidad es de sólo 0.13. Si para los siguientes meses los analistas asignan las probabilidades de 0.5, 0.3 y 0.2 a los eventos: el oro sube, es el mismo o disminuye en su valor, respectivamente:

a) Determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos 6 meses.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el valor del oro aumente dentro de 6 meses, no obstante que el valor de las acciones aumente?

Solución:

Eventos:
A_1= {El oro aumenta}
A_2={El valor del oro es el mismo}
A_3={El valor del oro disminuye}
B={Las acciones aumentan}

Datos:
$P(A_1)=0.50$
$P(A_2)= 0.30$
$P(A_3)= 0.20$

$$P(B|A_1)=0.80$$
$$P(B|A_2)=0.17$$
$$P(B|A_3)=0.13$$

a) Probabilidad total del evento B

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$P(B)=0.50(0.80)+0.30(0.17)+0.20(0.13)=\underline{0.477}$$

b) Teorema de Bayes

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}$$
$$P(A_3|B)=\frac{0.20(0.13)}{0.477}=\underline{0.0545}$$

4. Una empresa comercializadora de artículos electrónicos está considerando comercializar un nuevo modelo de televisor. En el pasado, el 40% de los equipos de televisión que la empresa lanzó al mercado tuvieron éxito y el 60% no fueron exitosos. Antes de lanzar al mercado el equipo de televisión, el departamento de investigación de mercados realiza un extenso estudio y entrega un reporte, ya sea favorable o desfavorable. En el pasado, el 80% de los equipos de televisión exitosos habían recibido un reporte de investigación favorable y el 30% de los equipos de televisión no exitosos habían recibido un reporte de investigación favorable. Para los nuevos modelos de B. televisión bajo consideración, el departamento de investigación de mercado ha entregado un reporte favorable. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de televisión tenga éxito en el mercado?

Solución:

Evento S = equipo de televisión exitoso

Evento F = reporte favorable

Evento S’ = equipo de televisión no exitoso

Evento F’ = reporte no favorable

$$P(S)=0.40 \qquad P(F|S)=0.80$$
$$P(S')=0.60 \qquad P(F|S')=0.30$$

Por el teorema de Bayes:

$$P(S|F)=\frac{P(F|S)P(S)}{P(F|S)P(S)+P(F|S')P(S')}$$
$$=\frac{(0.80)(0.40)}{(0.80)(0.40)+(0.30)(0.60)}=\frac{0.32}{0.50}=0.64$$

Es decir la probabilidad de que el equipo de televisión tenga éxito en el mercado, dado que se recibió un reporte favorable es de 0.64

5. Un maestro lanza dos dados sobre una mesa y los números que salieron los cubre parra que sus alumnos no los vean. Entonces el maestro pregunta:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los dados muestre un cuatro y el otro un cinco?

b) Si el maestro les dice a los alumnos que en uno de los dados salió cinco, entonces ¿cuál es la probabilidad de que el otro dado muestre un cuatro?

Solución:

a) Si los dados se pueden distinguir, uno como dado 1 el que puede caer de m1 maneras y el otro como dado 2 que puede caer de m2 maneras, entonces los puntos del espacio muestral son de la forma (m, n) por lo que el espacio está formado por 6 x 6 = 36 eventos, es decir, $\mathbf{\Omega} = \{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,6)\}$

Si E es el evento que muestra en un dado el número 4 y en el otro el número, entonces 5 el evento $\mathrm{E} = \{(4,5),(5,4)\}$, es decir que hay dos casos favorables entre 36 casos posibles totales por lo tanto

$$P(E) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b) La información que proporciona el maestro reduce el espacio muestral a un conjunto $\mathbf{A} = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$

Es decir de un espacio de 36 puntos se ha reducido a un espacio de 11 eventos y no son 12 porque en este caso la pareja (5, 5) se repite dos veces. Los eventos en el espacio A muestran la información que proporcionó el maestro y sea el evento B = { en uno de los dados salió el 4} entonces

$$A \cap B = \mathrm{E} = \{(4,5),(5,4)\}$$

Por lo tanto

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(E)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}}$$

$$P(B/A) = \frac{2}{11}$$

6. Para el experimento de tirar un dado y una moneda. Dado los espacios muestrales y los eventos:
S= {A, S}
Cara de la moneda es águila; MA= {A}
Cara de la moneda es sol; MS= {S}
S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Cara superior del dado es 1: D1 = {1}; Cara superior del dado es 4; D4 = {4}
Cara superior del dado es 2; D2 = {2}; Cara superior del dado es 5; D5 = {5}
Cara superior del dado es 3; D3 = {3}; Cara superior del dado es 6; D6 = {6}

a) ¿Son los eventos D3 y MA independientes?
b) Obtener el evento: CD3= (D3 ∩ MA) ∩ (D3 ∩ MS)
c) Obtener P (CD3)

Solución:

a) Condición de independencia

$$P(D3 \cap MA) = P(D3) * P(MA) \ldots (I)$$

$$S1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$S2 = \{A, S\}$$

$$N(S1XS2) = 12; \quad D3 \cap MA = \{3, A\}$$

$P(D3 \cap MA) = \frac{1}{12} \dots (A) \qquad N(D3 \cap MA) = 1$

Por otro lado: $P(D3) = \frac{1}{6}$ y $P(MA) = \frac{1}{2}$

Obteniendo al producto:

$$P(D3) * P(MA) = \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \dots (B)$$

De (A) y (B) se observa que se cumple la condición (I)

b) $CD3 = \{(3, A), (3, S)\}; \quad N(CD3) = 2$

c) $P(CD3) = \frac{N(CD3)}{N(S)} = \frac{2}{12}$

7. En un grupo de alumnos de cierta universidad nacional están inscritos 50 alumnos. De éstos, 15 pertenecen al programa B1, 25 al programa B2 y 10 al programa B3. De una universidad del extranjero invitan a 6 alumnos del grupo mencionado para participar en un programa de intercambio académico y con la finalidad de no favorecer ninguno de los tres programas se seleccionan aleatoriamente a los 6 alumnos del grupo referido.

a) Obtener la probabilidad de que 3 de los alumnos seleccionados pertenezcan al programa B1.

b) Obtener la probabilidad de que 3 pertenezcan al programa B1, 2 al programa B2 y 1 al programa B3.

Solución:

Se tienen en total, 50 alumnos, se quiere formar un grupo de 6 de ellos para que vayan a una universidad del extranjero.

Todos los arreglos posibles que se pueden hacer sin importar del programa que sean los alumnos es:

$$C_6^{50} = \frac{50!}{6!(50-6)!} = \frac{50x49x48x47x46x45}{6!} = 15890700$$

Del programa B1 hay 15 alumnos

Del programa B2 hay 25 alumnos y

Del programa B3 hay 10 alumnos

a) Si interesa ver la probabilidad de que 3 de los alumnos pertenezcan al programa B1, entonces se tiene que hacer un subgrupo de 3 alumnos de ese programa (3 de 15 alumnos) y los otros tres (para que sean 6 en total) se pueden elegir del resto de los alumnos (es decir, otro subgrupo de 3 de 35 alumnos), entonces:

$$C_3^{15} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455 \qquad \text{y} \qquad C_3^{35} = \frac{35!}{3!(35-3)!} = 6545$$

Tenemos 455 x 6545 = 2977975 arreglos posibles de tal forma que vayan 3 alumnos del programa B1, entonces la probabilidad que nos piden es:

$$P(A) = \frac{2977975}{15890700} = 0.1874 = 18.74\%$$

b) En este caso interesa conocer la probabilidad de que vayan 3 alumnos del programa B1, 2 del programa B2 y 1 del programa B3, entonces hacemos un procedimiento análogo al anterior pero con las siguientes combinaciones:

Que vayan 3 alumnos de B1: Que vayan 2 alumnos del B2 Que vaya 1 alumno del B3

$$C_3^{15} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455; \qquad C_2^{25} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300$$

$$C_1^{10} = \frac{10!}{1!(10-1)!} = 10$$

Tenemos 455 x 300 x 10 = 2977975 arreglos posibles de tal forma que vayan 3 alumnos del programa B1, entonces la probabilidad que nos piden es:

$$P(B) = \frac{1365000}{15890700} = 0.0859 = 8.59\%$$

8. En una determinada gasolinera, el 25% de los clientes utilizan gasolina Premium sin plomo para sus vehículos, el 55% usan gasolina Magna sin plomo, y el resto utilizan gasolina Alternativa (Etanol). De los clientes que consumen gasolina Premium sólo el 30% de ellos llenan sus tanques, de los que usan gasolina Magna el 60% llenan sus tanques, en tanto que los que consumen gasolina alternativa el 50% llenan los tanques de sus automóviles.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida al despachador llenar su tanque?
b) Sí el siguiente cliente llena su tanque, ¿qué probabilidad hay de que solicite al despachador gasolina magna?
c) Si el siguiente cliente no llena su tanque ¿qué probabilidad hay de que pida al despachador gasolina alternativa?

Solución:

Eventos: $A = \{Gasolina\ Premium\}$

$B = \{Gasolina\ Magna\}$

$C = \{Gasolina\ Alternativa\}$

$D = \{Automóvil\ con\ tanque\ lleno\}$

$D^c = \{Automóvil\ con\ tanque\ no\ lleno\}$

Datos: $P(A) = 0.25$

$P(B) = 0.55$

$P(C) = 0.20$

$P(D|A) = 0.30$

$P(D|B) = 0.60$

$P(D|C) = 0.50$

a) De acuerdo con el concepto de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)]$$

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$$

$$P(D) = 0.25(0.30) + (0.55)(0.60) + (0.20)(0.50) = \underline{\underline{0.5050}}$$

b) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)} = \frac{0.55(0.60)}{0.5050} = \frac{0.3300}{0.5050}$$

$$P(B|D) = \underline{\underline{0.6534}}$$

c) Considerando el Teorema de los Eventos Complementarios:

$$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 0.5050 = 0.4950$$

$$P(C|D^c) = \frac{P(C)P(D^c|C)}{P(D^c)} = \frac{0.20(0.50)}{0.4950} = \frac{0.1000}{0.4950}$$

$$P(C|D^c) = \underline{\underline{0.2020}}$$

9. Con base en varios estudios geológicos una compañía ha clasificado, de acuerdo a la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio al que se le asignan las probabilidades de 0.35, 0.40 y 0.25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia, se sabe que el petróleo se encuentra en un 40% de formaciones del tipo I, en un 20% de formaciones del tipo II y en un 30% de formaciones del tipo III.

a) ¿Cuál es la probabilidad total de que la compañía encuentre petróleo en ese sitio?

b) Si la compañía no descubre petróleo en ese sitio, determinar la probabilidad de que exista una formación del tipo II.

Solución:

Eventos: A1: Formación del tipo I
A2: Formación del tipo II
A3: Formación del tipo III
B: Se descubre petróleo
B^c: No se descubre petróleo

Datos: P(A1)=0.35 ; P(B│A1)=0.40
P(A2)=0.40 ; P(B│A2)=0.20
P(A3)=0.25 ; P(B│A3)=0.30

a) Probabilidad Total del Evento B: Se descubre petróleo

P(B)= P(A1)P(B│A1)+ P(A2)P(B│A2)+ P(A3)P(B│A3)
P(B)= 0.35(0.40)+(0.40)(0.20)+(0.25)(0.30) = **0.295**

b) Por lo tanto, la probabilidad de que no se descubra petróleo es:

$P(B^c)$ = 1 – 0.295 = 0.705

Ahora, aplicando el Teorema de Bayes:
Si no se descubra petróleo, la probabilidad de que exista una formación del tipo II

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}^c) = \frac{(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^c)}{\mathrm{P}(\mathrm{B}^c)} = \frac{0.40(0.80)}{0.705} = \mathbf{0.4539}$$

10. Supóngase que en un centro médico, de todos los fumadores de quienes se sospecha tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es de 0.45, ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, sea fumador?

Solución:

B_1 = “el paciente es fumador” $P(B_1) = 0.45$

B_2 = “el paciente es no fumador” $P(B_2) = 0.55$

A = “el paciente tiene cáncer pulmonar”

$P(A|B_1) = 0.9$; $P(A|B_2) = 0.05$

Del Teorema de Bayes

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{0.45 * 0.9}{0.45 * 0.9 + 0.55 + 0.05}$$

$$P(B_1|A) = 0.9364$$