

TEMA IV

MODELOS PROBABILÍSTICOS DE FENÓMENOS ALEATORIOS DISCRETOS.

Objetivo: El alumno conocerá algunas de las distribuciones discretas más utilizadas en la práctica de la Ingeniería y seleccionará la más adecuada para analizar algún fenómeno aleatorio en particular.

Distribuciones para variable aleatoria Discreta

- *Distribución uniforme discreta
- *Ensayo o experimento de Bernoulli
- *Distribución Binomial
- *Distribución Geométrica
- *Distribución Binomial Negativa o de Pascal
- *Distribución Poisson
- *Aproximación de Poisson a la Binomial

Distribuciones para variable aleatoria Continua

- *Distribución uniforme continua o rectangular
- *Generación de números aleatorios
- *Distribución Normal y Normal Estándar
- *Distribución Gamma
- *Distribución exponencial
- *Distribuciones Chi Cuadrada, t de Student, F de Fisher
- *Distribuciones Weibull y Log normal

* Distribución Uniforme Discreta.

| | x_i | $P(x_i)$ | $x_i P(x_i)$ | $x_i^2 P(x_i)$ |
|----------|-------|---------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a | x_1 | $\frac{1}{n}$ | $x_1 \frac{1}{n}$ | $x_1^2 \frac{1}{n}$ |
| | x_2 | $\frac{1}{n}$ | $x_2 \frac{1}{n}$ | $x_2^2 \frac{1}{n}$ |
| | | | | |
| b | x_n | $\frac{1}{n}$ | $x_n \frac{1}{n}$ | $x_n^2 \frac{1}{n}$ |
| Σ | | 1 | $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ | $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ |

-Media o valor esperado:

$$\mu_x = E[x] = \sum_{\forall x} xP(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

$$E[x^2] = \sum_{\forall x} x^2 P(x)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

O también:

$$\mu_x = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Ejemplo:

| x_i | $P(x_i)$ | $x_i P(x_i)$ | $x_i^2 P(x_i)$ |
|-------|----------|--------------|----------------|
| 1 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| 2 | 1/6 | 2/6 | 4/6 |
| 3 | 1/6 | 3/6 | 9/6 |
| 4 | 1/6 | 4/6 | 16/6 |
| 5 | 1/6 | 5/6 | 25/6 |
| 6 | 1/6 | 6/6 | 36/6 |
| | 1 | 21/6 | 91/6 |

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mu_x = E[X] = \sum_{\forall x} x_i = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x] = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = 15.1667 - 12.25 = 2.9167$$

$$E[x^2] = \frac{91}{6}$$

-Con la otra fórmula:

$$\sigma_x^2 = \frac{(6-1+1)^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} = 2.9167$$

*ENSAYO O EXPERIMENTO DE BERNOULLI.

Sea el experimento aleatorio que consta de dos resultados únicamente, uno de los resultados se denomina "éxito" y al otro "fracaso", sin que esto signifique un juicio de valor.

La probabilidad de éxito se denomina p:

$$P(\text{éxito}) = p$$

$$P(\text{fracaso}) = 1 - p = q$$

Definamos la variable aleatoria X como el número de éxitos, entonces.

$$X = \{0, 1\}$$

Entonces la distribución de probabilidad correspondiente es:

| x | P (x) | x P (x) | X ² P(x) |
|--------------------------------|-------|---------|---------------------|
| 0 | 1-p | 0 | 0 |
| 1 | p | p | p |
| $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ | 1 | p | p |

-Media o valor esperado:

$$\mu_x = E[x] = \sum_{\forall x} xP(x)$$

$$\mu_x = p \rightarrow \text{media}$$

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x] = p - p^2 = p(1 - p) = \boxed{p * q}$$

$$E[x^2] = \sum x^2 P(X) = p$$

Si p=q=0.5, entonces se tiene la varianza más alta o la “peor variación”.

*DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

Sea el ensayo de Bernoulli que se repite n veces, entonces una secuencia de resultados sería:

$$\underbrace{p * p * q * q * q * q * q * q * \dots * p * p * q}$$

Se supone que hay x éxitos con n ensayos y en consecuencia hay n-x fracasos:

$$\underbrace{\boxed{x}} \quad \underbrace{\boxed{n-x}}$$

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot q \cdot q \cdot q}_{n \text{ ensayos}} = p^x \cdot q^{n-x}$$

$$p(x \text{ éxitos}) = p_n^{x, n-x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$p_n^{x, n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = c_n^x = \binom{n}{x}$$

$$\boxed{p(x \text{ éxitos}) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n} \Rightarrow \boxed{\text{Distribución Binomial}}$$

Para que se defina una función masa de probabilidad debe cumplirse que la suma de probabilidades de x éxitos sea:

$$\sum_{\forall x} P(x) = 1$$

O sea:

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = 1$$

Del teorema del binomio:

$$n \in \mathfrak{R} \quad (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots + b^n$$

Si n es entero y positivo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$(q+p)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} q^{n-x} p^x = 1$$

-Media o valor esperado:

$$\mu_x = E[x] = \sum_{\forall x} xP(x)$$

$$\mu_x = \sum_{\forall x} x \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}$$

$$\mu_x = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x * q^{n-x}$$

$$\mu_x = \sum_{x=1}^n \frac{x * n(n-1)!}{x * (x-1)!(n-x)!} p * p^{x-1} * q^{n-x}$$

$$\mu_x = np \sum_{x=1}^n \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} * q^{n-x}; \sum_{x=1}^n \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} * q^{n-x} = (q+p)^{n-1} = 1$$

| | | |
|--------------|---|------------------------|
| $\mu_x = np$ | ⇒ | Media o valor esperado |
|--------------|---|------------------------|

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^n x^2 \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}$$

si hacemos $x^2 = x(x-1) + x$

$$x^2 = \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

donde:

$$\sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = np$$

$$E[x^2] = \sum_{x=2}^n \frac{x(x-1)(n)(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{(x-2)} q^{n-x} + np$$

$$E[x^2] = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{(x-2)} q^{n-x} + np;$$

$$\text{donde: } \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{(x-2)} q^{n-x} = (q+p)^{n-2} = 1$$

$$E[x^2] = n(n-1)p^2 + np$$

$$\sigma_x^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2$$

$$\sigma_x^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2$$

$$\sigma_x^2 = np(1-p)$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = npq} \Rightarrow \text{Varianza}$$

El experimento Binomial debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. El experimento consta de n ensayos estadísticamente independientes y repetidos.
2. Cada ensayo tiene dos resultados posibles: uno llamado “éxito” y el otro “fracaso”. (Cada ensayo es un experimento de Bernoulli).
3. La probabilidad de éxito en cada ensayo es la misma e igual a “p” y la de fracaso, “q”, donde $p + q = 1$.
4. Consta de una variable aleatoria discreta X, asociada al experimento que cuenta el número de éxitos en los n ensayos o el número de ensayos con éxito, entonces los valores de X son : $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$.

n – pruebas de ensayo

Ensayos independientes

Ejemplo: $P(x) = \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}, \quad x=0,1,2,3,\dots,n$

Obtener las distribuciones de probabilidad binomial para los siguientes casos. Trazar las gráficas correspondientes.

- a) $n=6, p=0.3$
- b) $n=6, p=0.5$
- c) $n=6, p=0.7$

a)

| X | P(x) |
|--------------------------------|--------|
| 0 | 0.1176 |
| 1 | 0.3025 |
| 2 | 0.3241 |
| 3 | 0.1852 |
| 4 | 0.0592 |
| 5 | 0.0102 |
| 6 | 0.0007 |
| $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ | 1 |

$$P(x=0) = \binom{6}{0} (0.3)^0 (0.7)^6 = 0.117$$

$$P(x=1) = \binom{6}{1} (0.3)^1 (0.7)^5 = 0.302$$

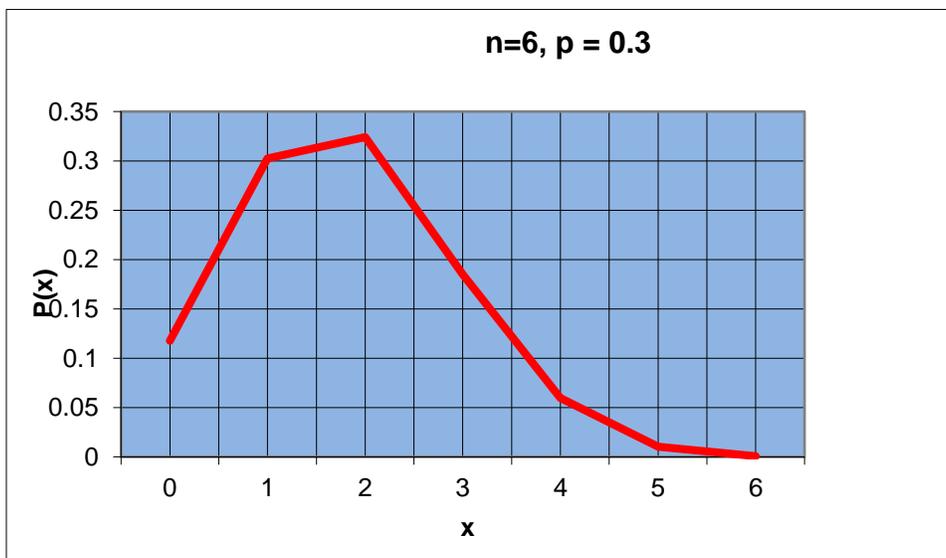
$$P(x=2) = \binom{6}{2} (0.3)^2 (0.7)^4 = 0.324$$

$$P(x=3) = \binom{6}{3} (0.3)^3 (0.7)^3 = 0.185$$

$$P(x=4) = \binom{6}{4} (0.3)^4 (0.7)^2 = 0.059$$

$$P(x=5) = \binom{6}{5} (0.3)^5 (0.7)^1 = 0.010$$

$$P(x=6) = \binom{6}{6} (0.3)^6 (0.7)^0 = 0.000$$



b)

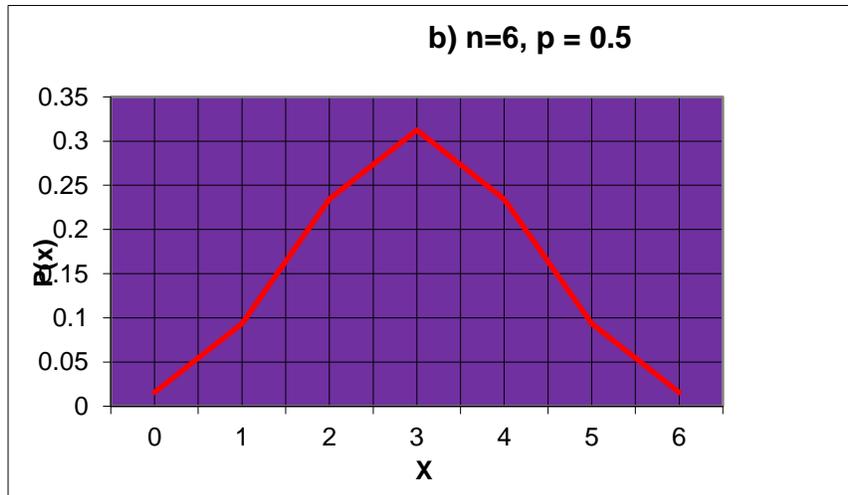
| X | P(x) |
|---|--------|
| 0 | 0.0156 |
| 1 | 0.0937 |
| 2 | 0.2344 |
| 3 | 0.3125 |
| 4 | 0.2344 |
| 5 | 0.0937 |
| 6 | 0.0156 |

$$P(x=0) = \binom{6}{0} (0.5)^0 (0.5)^6 = 0.0156$$

$$P(x=1) = \binom{6}{1} (0.5)^6 = 0.0937$$

$$P(x=2) = \binom{6}{2} (0.5)^6 = 0.2344$$

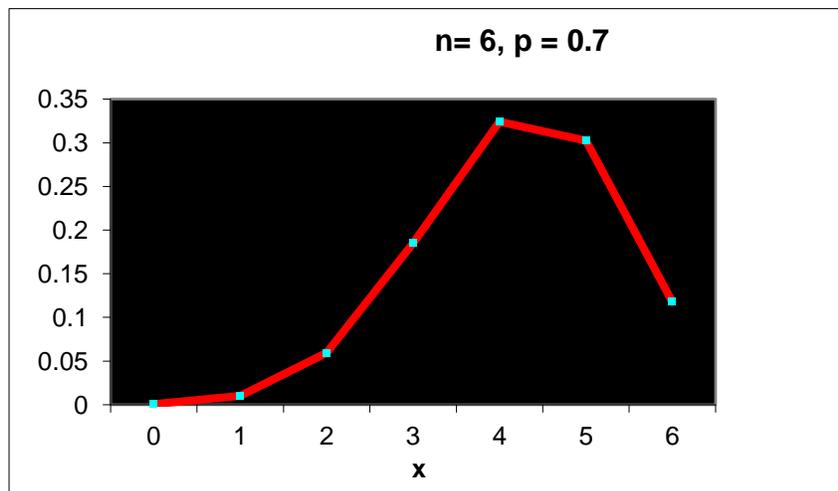
$$P(x=3) = \binom{6}{3} (0.5)^6 = 0.3125$$



c)

| X | P(x) |
|---|--------|
| 0 | 0.0007 |
| 1 | 0.0102 |
| 2 | 0.0595 |
| 3 | 0.1852 |
| 4 | 0.3291 |
| 5 | 0.3025 |
| 6 | 0.1176 |

⇒ Es el recíproco del inciso a)



Ejemplo: La probabilidad de que un paciente se recupere de una enfermedad sanguínea es 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad, ¿Cuál es la probabilidad de que:

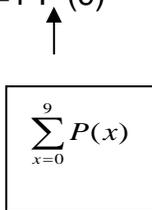
- Sobrevivan al menos 10.
- Sobrevivan entre 3 y 8 inclusive.
- Sobreviven exactamente 5.

$$P(x) = b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x=0,1,2,\dots,n$$

a) $P(x \geq 10) = P(10) + P(11) + P(12) + P(13) + P(14) + P(15) = 1 - F(9) = 1 - 0.9662 = 0.0338$

$n=15$

$p=0.4=1-F(9)$



| |
|--|
| $P(0) = \binom{15}{0} (0.4)^0 (0.6)^{15} = 0.0005$ |
| $P(1) = \binom{15}{1} (0.4)^1 (0.6)^{14} = 0.0047$ |
| $P(2) = \binom{15}{2} (0.4)^2 (0.6)^{13} = 0.0219$ |
| $P(3) = \binom{15}{3} (0.4)^3 (0.6)^{12} = 0.0634$ |
| $P(4) = \binom{15}{4} (0.4)^4 (0.6)^{11} = 0.1268$ |
| $P(5) = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10} = 0.1859$ |
| $P(6) = \binom{15}{6} (0.4)^6 (0.6)^9 = 0.2066$ |
| $P(7) = \binom{15}{7} (0.4)^7 (0.6)^8 = 0.1771$ |
| $P(8) = \binom{15}{8} (0.4)^8 (0.6)^7 = 0.1181$ |
| $P(9) = \binom{15}{9} (0.4)^9 (0.6)^6 = 0.0612$ |

| X | P(X) | F(X) |
|---|--------|--------|
| 0 | 0.0005 | 0.0005 |
| 1 | 0.0047 | 0.0052 |
| 2 | 0.0219 | 0.0271 |
| 3 | 0.0634 | 0.0905 |
| 4 | 0.1268 | 0.2173 |
| 5 | 0.1859 | 0.4032 |
| 6 | 0.2066 | 0.6098 |
| 7 | 0.1771 | 0.7869 |
| 8 | 0.1181 | 0.9050 |
| 9 | 0.0612 | 0.9662 |

$P(x \geq 10) = 1 - 0.9662$

$p(x \geq 10) = 0.0338$

b)

$P(3 \leq x \leq 8) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) + P(8) = F(8) - F(2) = 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$

c)

$$P(x = 5) = P(5) = 0.1859$$

d) Media, Varianza y Desviación Estándar:

$$\mu_x = np = (15)(0.4) = 6$$

$$\sigma_x^2 = npq = (15)(0.4)(0.6) = 3.6$$

$$\sigma_x = 1.8974$$

Ejercicio: El promedio de bateo de un jugador de béisbol es de 0.25. ¿Cuál es la probabilidad de que pegue exactamente hit en sus cuatro siguientes turnos?

$$p = 0.25$$

$$n = 4$$

$$x = 1$$

$$P(x=1) = \binom{4}{1} (0.25)^1 (0.75)^3 = 0.4219$$

Ejercicio: Al probar cierto tipo de neumático para camión para terreno escarpado se sabe que un 25% de los camiones no terminan la prueba por ponchadura de neumático. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 5 y 10 de los siguientes 15 camiones sufran una ponchadura?

$$n = 15$$

$$p = 0.25$$

$$q = 0.75$$

$$P(x) = \binom{15}{x} (0.25)^x (0.75)^{15-x}$$

$$P(5 \leq x \leq 10) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10)$$

$$P(5 \leq x \leq 10) = F(10) - F(4) = 0.3123$$

| X | P(X) |
|----|--------|
| 5 | 0.1651 |
| 6 | 0.0917 |
| 7 | 0.0393 |
| 8 | 0.0131 |
| 9 | 0.0034 |
| 10 | 0.3133 |

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

***DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL.**

Si un ensayo puede dar E_x resultados con probabilidades P_k , la distribución de probabilidad de las variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_k , que representan el número de ocurrencias para los k resultados en n intentos independientes es:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k; P_1, P_2, \dots, P_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} P_1^{x_1} P_2^{x_2} \dots P_k^{x_k}$$

$$\sum x_k = n \qquad \sum P_k = 1$$

Ejemplo: De acuerdo con la teoría de la genética cierto cruce de conejillos de indias da por resultado crías rojas, negras y blancas en un proporción 8:4:4. Hallé la probabilidad de que, en 8 descendientes, 5 sean rojos y 2 negros y un blanco.

8(rojos) : 4(negros); 4(blancos)

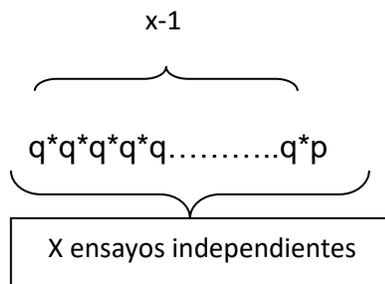
$$\frac{8}{16}, \frac{4}{16}, \frac{4}{16} \qquad P(5r, 2n, 1b) = \frac{8!}{5!2!1!} = \binom{8}{5} \binom{4}{2} \binom{4}{1}$$

$$P(5r, 2n, 1b) = 168(0.0313)(0.0625)(0.25) = \boxed{0.0820}$$

***DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA.**

Si los ensayos repetidos independientes tienen un éxito con p y un fracaso de probabilidad $1-p = q$. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, es el número de ensayos en que ocurre el primer éxito está dado por:

X= número de ensayos.



$$g(x, p) = q^{x-1} p$$

$$\mu_x = \frac{1}{p}; \quad \sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$$

Media Varianza

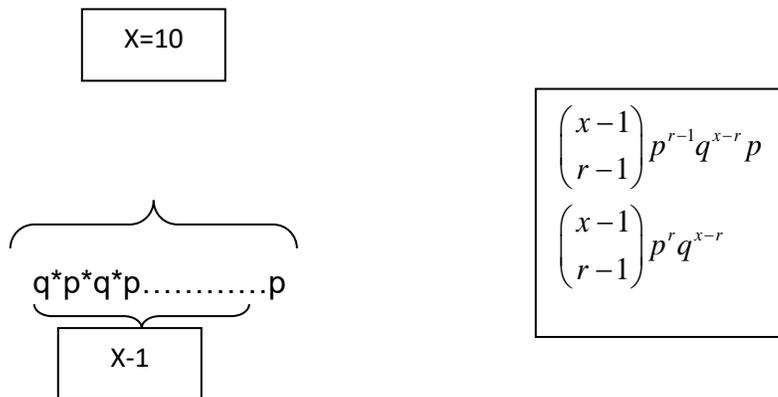
Ejemplo:

Si se sabe que en cierto proceso de fabricación, en promedio 1 de cada 100 piezas esta defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que se inspeccionen 5 piezas antes de encontrar una defectuosa?

$$g(5, 0.01) = (0.99)^4 (0.01) = 0.0096$$

$$\mu_x = \frac{1}{0.01} = 100 \quad \sigma_x^2 = \frac{0.99}{(0.01)^2} = 9900; \quad \sigma_x = 99.5$$

*DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA O DE PASCAL



Si x ensayos repetidos independientes con probabilidad de éxito p y de fracaso $1-p=q$ entonces la probabilidad de la variable aleatoria X, que es el número de ensayos en que ocurre el r – ésimo éxito, está dado por:

$$b^*(x, r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \quad x=r+1, r+2, \dots$$

$$\mu_x = \frac{r}{p}; \quad \sigma_x^2 = \frac{rq}{p^2}$$

Ejemplo:

1.- Encuentre la probabilidad de que al lanzar 3 monedas al aire se obtengan 3 águilas por segunda vez en el quinto intento.

$$b^*\left(5, 2, \frac{1}{8}\right) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0.0419$$

$$\mu_x = \binom{2}{\frac{1}{8}} = 16 \quad \sigma_x^2 = \frac{2 * \frac{7}{8}}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 112; \quad \sigma_x = \sqrt{112} = 10.58$$

2.- Tres personas tiran monedas al aire y el disparejo paga el café. Si los tres resultados son iguales las monedas se tiran nuevamente. Encuentre la probabilidad de que se necesiten menos de cuatro intentos.

aaa
 aas
 asa
 saa
 ass
 sas
 ssa
 sss

p=1/8

$$P = \frac{3}{4}$$

$$g\left(1, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$g\left(2, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

$$g\left(3, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{64}$$

$$p(x \leq 3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} = \frac{63}{64}$$

Ejercicio:

La probabilidad de que un estudiante de aviación apruebe el examen escrito para obtener su licencia de piloto es de 0.7. Encuentre la probabilidad de que una persona apruebe el examen.

- a) En el tercer intento.
- b) Antes del cuarto intento

$$P = 0.7$$

$$a) g(3, 0.7) = (0.3)^2(0.7) = 0.063$$

$$b) g(1, 0.7) = (0.3)^0(0.7) = 0.7$$

$$g(2, 0.7) = (0.3)^1(0.7) = 0.21$$

$$P(x \leq 3) = 0.973$$

*DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

En esta distribución de variable aleatoria X se refiere al número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n seleccionada entre N elementos de una población o lote de los cuales x son éxitos y (N-k) son fracasos, es decir:

$$h(x, k, n, N) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{N}; \quad \begin{matrix} x=0,1,2,3,\dots,k \\ x=0,1,2,3,\dots,n \end{matrix}$$

$$\mu = np$$

-Media o Valor esperado:

$$\mu = n \left(\frac{k}{N} \right)$$

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = n \left(\frac{k}{N} \right) \left(1 - \frac{k}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

donde:

$$\left(\frac{N-n}{N-1} \right) = \text{corrección por población finita}$$

-Desviación estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Ejemplo:

Se extraen 5 cartas de una baraja de 52. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

- a) Un as.
- b) Por lo menos un as.

$$N=52 \quad n=5 \quad k=4$$

$$a) \quad P(x=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0.299$$

$$b) \quad P(x \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\binom{4}{0} \binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - 0.6588 = 0.3412$$

Ejemplo:

Unos lotes de 40 componentes cada uno son aceptados si no contienen más de tres componentes defectuosos. El procedimiento para muestrear un lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazarlo si se encuentra al menos uno defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad:

- a) De encontrar exactamente un componente defectuoso en la muestra si hay tres defectuosos en el lote.
- b) De aceptar el lote.
- c) Calcular la media o valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

$$N=40 \quad n=5 \quad k=3$$

a)

$$P(x=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0.3011$$

b)

$$P(\text{rechazar}) = P(x \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{37}{5}}{\binom{40}{5}} = 0.3376$$

$$P(\text{aceptar}) = 1 - 0.3376 = 0.6624$$

c)

$$\mu_x = 5 \left(\frac{3}{40} \right) = 0.375$$

$$\sigma_x^2 = 5 \left(\frac{3}{40} \right) \left(1 - \frac{3}{40} \right) \left(\frac{40-5}{40-1} \right) = 0.3113$$

$$\sigma_x = 0.5579$$

*DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson es otra distribución para variable aleatoria discreta, cuyo nombre se debe al matemático francés, Simeon Denis Poisson (1781-1840), quien la introdujo en 1837. Tiene grandes aplicaciones en biología, medicina, física, ingeniería, investigación de operaciones, etc.

La distribución de Poisson se obtiene al considerar que en la distribución binomial el número n de veces que se repite el experimento de Bernoulli tiende a infinito, mientras que la probabilidad de éxito p tiende a cero.

Supongamos que X es una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p) y sea $\lambda = np$ entonces:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} (p)^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

Extrayendo a n de cada factor del cociente y agrupando todos los obtenidos con la potencia de p

$$P(x) = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \frac{(np)^x (1-p)^n}{x! (1-p)^x}$$

Haciendo $\lambda = np$

Se obtiene

$$P(x) = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \frac{\lambda^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{x! \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

Considerando ahora que $n \rightarrow \infty$ pero de tal manera que λ permanezca constante.

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

el límite que aparece en la expresión anterior tiende a $e^{-\lambda}$

por lo que finalmente:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{Distribución de Poisson}$$

Donde $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

Comprobando de que efectivamente define una distribución de probabilidad:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Media o valor esperado:

$$\mu = E[x] = \sum_{x=0}^{\infty} x P(x)$$

Donde el primer término de la serie vales cero. Ahora bien:

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&\quad \boxed{\mu = \lambda}
\end{aligned}$$

Varianza

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[x^2] - E^2[x] \\
E[x^2] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1) + x] P(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) P(x) + \sum_{x=0}^{\infty} x P(x) \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&\quad \boxed{\sigma^2 = \lambda}
\end{aligned}$$

Si X es el número de ocurrencias de un evento aleatorio en un intervalo de tiempo o espacio (superficie o volumen), la probabilidad de que X ocurra, está dada por la función de probabilidad de Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La letra griega $\lambda > 0$ (lambda) es el parámetro de esta distribución y es el promedio de ocurrencias del evento aleatorio en el intervalo.

El símbolo e es una constante cuyo valor aproximado a cinco cifras decimales es 2.71828 (base de los logaritmos naturales).

El experimento de Poisson cumple con las siguientes condiciones:

1. Los eventos ocurren en forma independiente, es decir, la ocurrencia de un evento en un intervalo de tiempo o espacio no afecta la probabilidad de una segunda ocurrencia del evento en el mismo u otro intervalo.
2. Teóricamente es posible que el evento pueda ocurrir infinitas veces en el intervalo.
3. La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.
4. $np = \lambda \rightarrow$ número de ocurrencias en el intervalo de tiempo o espacio de referencia.

Ejemplo:

En cierto proceso de fabricación en el que se producen artículos de vidrio ocurren defectos o burbujas que a veces desaconsejan su venta. Se sabe que en promedio uno de cada 1000 artículos producidos tienen una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 8000 artículos se encuentren menos de 7 artículos con burbujas?

$n=8000$ $p=0.001$

$$P(x < 7) = \sum_{x=0}^6 \binom{8000}{x} (0.001)^x (0.999)^{8000-x}$$

$$= F(x=6) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

- Utilizando la distribución de Poisson como aproximación a la binomial:

$$\lambda = np = 8000(0.001) = 8$$

$$P(0) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} = 0.0003$$

$$P(1) = \frac{8^1 e^{-8}}{1!} = 0.0027$$

$$P(2) = \frac{8^2 e^{-8}}{2!} = 0.0107$$

$$P(3) = \frac{8^3 e^{-8}}{3!} = 0.0286$$

$$P(4) = \frac{8^4 e^{-8}}{4!} = 0.0573$$

$$P(5) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0.0916$$

$$P(6) = \frac{8^6 e^{-8}}{6!} = 0.1221$$

$$P(x < 7) = 0.3134$$

Ejercicio:

Cierta zona de un continente sufre en promedio 6 huracanes por año. Encuentre la probabilidad de que, en un año dado:

- a) Sufra menos de cuatro huracanes.
- b) Sufra entre 6 y 8 huracanes inclusive.

$\lambda = 6$ huracanes/año

$$a) P(x < 4) = P(x \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.1512$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = 0.0025$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 0.0149 = \frac{6}{1} P(0)$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = 0.0446 = \frac{6}{2} P(1)$$

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = 0.0892 = \frac{6}{3} P(2)$$

Fórmula de recurrencia para el cálculo de probabilidades de Poisson.

$$P_0(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P_0(x+1) = \frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{(x+1)!} = \frac{\lambda \lambda^x e^{-\lambda}}{x!(x+1)}$$

$$P_0(x+1) = \frac{\lambda}{x+1} P_0(x) \Rightarrow \text{Fórmulas de recurrencia}$$

$$b) \quad P(6 \leq x \leq 8) = P(6) + P(7) + P(8) = 0.4016$$

$$P(6) = \frac{6^6 e^{-6}}{6!} = 0.1606$$

$$P(7) = \frac{6^7 e^{-6}}{7!} = 0.1377$$

$$P(8) = \frac{6^8 e^{-6}}{8!} = 0.1033$$

Ejercicio:

En cierto cruce, el promedio de accidentes de tránsito semanales es de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que en el ocurran exactamente 10 accidentes en la próximas dos semanas?

$$\lambda = 3 \quad \text{accidentes/semana}$$

$$\lambda = 6 \quad \text{accidentes/2 semanas}$$

$$P_6(x = 10) = \frac{6^{10} e^{-6}}{10!} = 0.0413$$