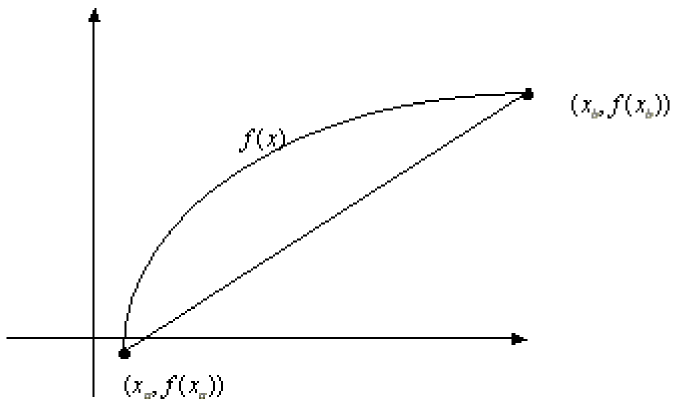
MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN (REGULA FALSI).

Como se mencionó en el método de bisección, conviene considerar que la raíz de una ecuación está localizada más cerca de alguno de los extremos del intervalo.

Consideremos nuevamente una gráfica de la función $f(x)$,



Donde hemos agregado la línea recta que une los puntos extremos de la gráfica en el intervalo $[a,b]$.
Es claro que si en lugar de considerar el punto medio del intervalo, tomamos el punto donde cruza al eje x esta recta, nos aproximaremos mucho más rápido a la raíz; ésta es en sí, la idea central del método de la regla falsa y ésta es realmente la única diferencia con el método de bisección, puesto que en todo lo demás los dos métodos son prácticamente idénticos.

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ que es continua en el intervalo $[x_a, x_b]$ y además, $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos.

Calculemos la ecuación de la línea recta que une los puntos $(x_a, f(x_a))$, $(x_b, f(x_b))$. Sabemos que la pendiente de esta recta está dada por:

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$y - f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}(x - x_a)$$

Para obtener el cruce con el eje x, hacemos $y = 0$:

$$-f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}(x - x_a)$$

Multiplicando por $x_b - x_a$ nos da:

$$-f(x_a)(x_b - x_a) = (f(x_b) - f(x_a))(x - x_a)$$

Finalmente, de aquí despejamos x:

$$x = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)}\right]$$

Este punto es el que toma el papel de x_r en lugar del punto medio del método de bisección.
Así pues, el método de la regla falsa sigue los siguientes pasos:
Sea $f(x)$ continua,

i) Encontrar valores iniciales x_a, x_b tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tengan signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual a:

$$x_r = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)}\right]$$

iii) Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $$f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$$

En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.

-

$$f(x_a)\cdot f(x_r)>0$$

En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo, y de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.

- $$f(x_a)\cdot f(x_r)=0$$

En este caso se tiene que $f(x_r)=0$ y por lo tanto ya localizamos la raíz.
El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\in_a|<\in_s$$

Ejemplo 1
Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x)=e^{-x}-\ln x$, comenzando en el intervalo $[1,2]$ y hasta que $|\in_a|<1\%$.

Solución
Este es el mismo ejemplo 1 del método de la bisección. Así pues, ya sabemos que $f(x)$ es continua en el intervalo dado y que toma signos opuestos en los extremos de dicho intervalo. Por lo tanto podemos aplicar el método de la regla falsa.

$$x_r = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b-x_a)}{f(x_b)-f(x_a)}\right] = x_b - \left[\frac{f(x_b)(x_a-x_b)}{f(x_a)-f(x_b)}\right]$$

Calculamos la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a-x_b]}{f(x_a)-f(x_b)} = 2-\frac{f(2)\cdot[1-2]}{f(1)-f(2)} = 1.397410482$$

Puesto que solamente tenemos una aproximación, debemos seguir con el proceso.

Así pues, evaluamos $f(x_{r_1}) = e^{-1.397410482}-\ln(1.397410482 = -0.087384509 < 0$

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(2)$
$+$	$-$	$-$

a de signos:

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1,1.397410482]$.
Con este nuevo intervalo, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.397410482 - \frac{f(1.397410482)\cdot[1-1.397410482]}{f(1) - f(1.397410482)}$$

$$x_{r_2} = 1.321130513$$

En este momento, podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.321130513 - 1.397410482}{1.321130513}\times 100\%\right| = 5.77\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo seguimos con el proceso.
Evaluamos $f(x_{r_2}) = f(1.321130513) = -0.011654346 < 0$, y hacemos la tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(1.321130513)$
$+$	$-$	$-$

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1, 1.321130513]$, con el cual, podemos calcular la nueva aproximación:

$$x_{r_3} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.321130513 - \frac{f(1.321130513)\cdot[1-1.321130513]}{f(1) - f(1.321130513)}$$

$$x_{r_3} = 1.311269556$$

Y el error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.311269556 - 1.321130513}{1.311269556}\times 100\%\right| = 0.75\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_{r_3} = 1.311269556$$

Observe la rapidez con la cual converge el método de la regla falsa a la raíz, a diferencia de la lentitud del método de la bisección.

Ejemplo 2

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x) = \arctan x + x - 1$, comenzando en el intervalo $[0,1]$ y hasta que $|\in_a| < 1\%$.

Solución

Este es el mismo ejemplo 2 del método de la bisección. Así pues, ya sabemos que se cumplen las hipótesis necesarias para poder aplicar el método, es decir, que $f(x)$ sea continua en el intervalo dado y que $f(x)$ tome signos opuestos en los extremos de dicho intervalo.

Calculamos pues, la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1 - \frac{f(1) \cdot [0-1]}{f(0) - f(1)} = 0.5600991535$$

Como solamente tenemos una aproximación, debemos avanzar en el proceso.

Evaluamos $f(x_{r_1}) = \arctan(0.5600991535) + 0.5600991535 = 0.070662953 > 0$

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(0)$	$f(0.5600991535)$	$f(1)$
−	+	+

De lo cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo $[0, 0.5600991535]$.

Así pues, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = 0.5600991535 - \frac{f(0.5600991535) \cdot [0 - 0.5600991535]}{f(0) - f(0.5600991535)} = 0.5231330281$$

Y calculamos el error aproximado:

$$|\in_a| = \left| \frac{0.5231330281 - 0.5600991535}{0.5231330281} \times 100\% \right| = 7.06\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo, seguimos avanzando en el proceso.

Evaluamos $f(x_{r_2}) = \arctan(0.5231330281) + 0.5231330281 - 1 = 0.00511533 > 0$.

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(0)$	$f(0.5231330281)$	$f(0.5600991535)$
−	+	+

De los cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo $[0,0.5231330281]$, con el cual podemos calcular al siguiente aproximación:

$$x_{r_3} = 0.5231330281 - \frac{f(0.5231330281) \cdot [0 - 0.5231330281]}{f(0) - f(0.5231330281)} = 0.5204706484$$

Y el siguiente error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5204706484 - 0.523133081}{0.5204706484} \times 100\% \right| = 0.51\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_{r_3} = 0.5204706484$$

Nuevamente observamos el contraste entre la rapidez del método de la regla falsa contra la lentitud del método de la bisección.
Por supuesto que puede darse el caso en el que el método de la regla falsa encuentre la aproximación a la raíz de forma más lenta que el método de la bisección. Como ejercicio, el estudiante puede aplicar ambos métodos a la función $f(x) = x^6 - 1$, comenzando en el intervalo $[0,1.5]$, donde notará que mientras que el método de bisección requiere de 8 aproximaciones para lograr que $|\epsilon_a| < 1\%$, el método de la regla falsa necesita hasta 16 aproximaciones.

Veremos a continuación un ejemplo del método de la Posición, Falsa con la siguiente ecuación:

$X^3+X+16=0$