INTEGRACIÓN POR CUADRATURA GAUSSIANA

Gauss investigo y encontró que es factible disminuir el error en la integración cambiando la localización de los puntos sobre la curva de integración f(x). El investigador desarrollo su propio método conocido como cuadratura de Gauss.

Se tiene la curva de la función f(x) que se desea integrar entre los límites a y b. La parte (a) de la figura muestra cómo se integraría usando un trapecio: uniendo el punto A de coordenadas (a, f(a)) con el punto B (b, f(b)) mediante un segmento de recta $P_1(x)$ Esto forma un trapecio de base h = (b-a) cuya área es:

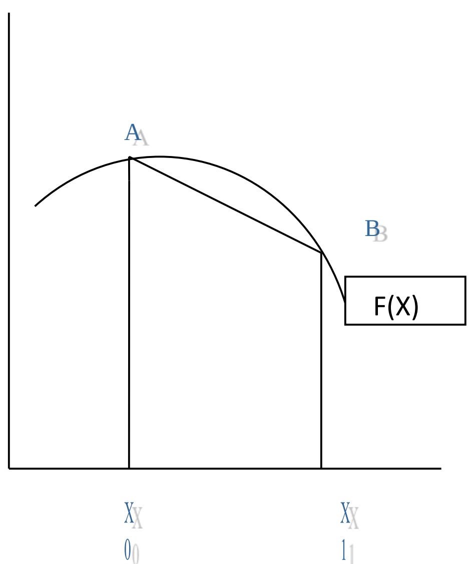
$$A = h / 2\ [f(a) + f(b)],$$

Y que podía escribirse como

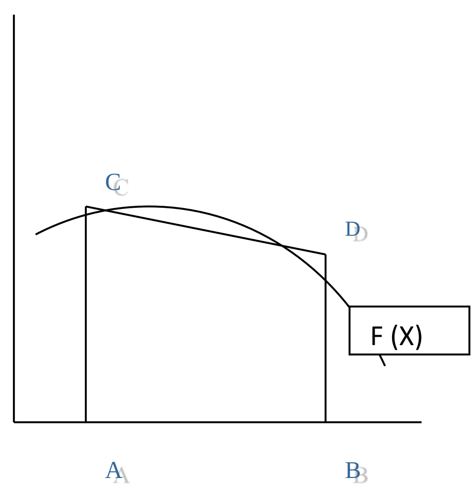
$$A = W_1 f(a) + W_2 f(b)$$

Donde $W_1 = W_2 = h / 2$

Por otro lado en la aplicación de la cuadratura de Gauss en lugar de tomar los dos puntos A y B en los extremos del intervalo se escogen dos puntos interiores C y D



MÉTODO
TRAPEZOIDE



MÉTODO
DE GAUSS CON DOS PUNTOS

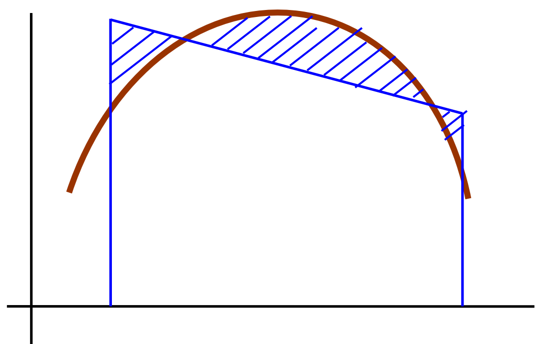
Gauss se propuso desarrollar una fórmula del tipo.

$$A = W_1 f(Z_1) + W_2 f(Z_2)$$

Ya que esto simplificaría relativamente el cálculo del área. El problema planteado de esta manera consiste en encontrar los valores de Z_1, Z_2 W_1 y W_2 Entonces hay cuarto parámetros por determinar y por tanto cuatro condiciones que se pueden imponer.

La Cuadratura Gaussiana selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma espaciada. Se escogen los nodos $X_1, X_2, \ldots X_n$ en el intervalo [a, b] y los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i)$$



Para resolver cualquier problema por medio de la cuadratura de Gauss, primero tenemos que cambiar los límites de integración a [-1, 1] mediante la siguiente formula:

$$Z = \frac{2x - (a+b)}{(b-a)}$$

Posteriormente tenemos que efectuar un cambio de variable a la función para que quede en términos de "Z" mediante la siguiente formula:

$$f(x) = f\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)Z + \left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Ya que $$x = \left(\frac{b-a}{2}\right)Z + \left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Luego tenemos que cambiar nuestra “dx” a una “dz”, para que todos nuestros términos estén en función de “Z”.

$$dx = \frac{b-a}{2} dz$$

Una cuestión importante es que el método de Gauss puede extenderse a tres o más puntos.
En general el algoritmo tiene la forma:

$$\int_a^b f(z)dz = W_1 f(Z_1) + W_2 f(Z_2) + W_3 f(Z_3) + \ldots + W_n f(Z_n)$$

Donde se han calculado los valores de Wi y Zi por usar. La tabla muestra estas constantes. Con dos puntos el método de Gauss está diseñado para obtener exactitud en polinomios cúbicos, con tres se tendrá exactitud de un polinomio de cuarto grado y así sucesivamente.

Por ultimo determinamos el número de puntos en que queremos dividir nuestro intervalo, mientras más puntos tomemos mejor será nuestra aproximación.

No. de Puntos	Coeficientes Wi	Raíces Zi
2	$W_1 = W_2 = 1.0$	$-Z_1 = Z_2 = 0.5773502$
3	$W_2 = 0.88888$ $W_1 = W_3 = 0.55555$	$Z_2 = 0.0$ $-Z_1 = Z_3 = 0.7745966$
4	$W_2 = W_3 = 0.6521451549$ $W_1 = W_4 = 0.3478548451$	$-Z_2 = Z_3 = 0.33998104$ $-Z_1 = Z_4 = 0.861136311$
5	$W_3 = 0.56888888$ $W_2 = W_4 = 0.4786286705$ $W_1 = W_5 = 0.2369268850$	$Z_3 = 0.0$ $-Z_2 = Z_4 = 0.53846931$ $-Z_1 = Z_5 = 0.90617984$

EJERCICIO 1.

Integre la función $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en el intervalo (- 0.8, 1.5) por cuadratura de Gauss.

SOLUCION

A) Con dos puntos
Cambio de límites de la integral con la ecuación

$$Z=\frac{2x-\left(a+b\right)}{(b-a)}$$

$$Z_{(-0.8)}=\frac{2(-0.8)-\left(0.7\right)}{(2.3)}=-1$$

$$Z_{(1.5)}=\frac{2(1.5)-\left(0.7\right)}{(2.3)}=1$$

Es decir. si X = 0.8, z = - 1 Si X = 1.5, Z = 1

Con el cambio de la función en términos de la nueva variable Z queda

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-0.8}^{1.5}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$x=\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)Z+\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \qquad dx=\frac{b-a}{2}dz$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1.5-(-0.8)}{2}\right]e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1.5-(-0.8)}{2}Z-\frac{1.5+(-0.8)}{2}\right]^2}dz$$

$$I=\frac{2.3}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{1}{8}\left(2.3Z+0.7\right)^2}dz$$

$$\int_a^b f(z)dz=W_1f(Z_1)+W_2f(Z_2)+W_3f(Z_3)+\ldots+W_nf(Z_n)$$

De la tabla $W_1=W_2=1.0$; $-Z_1=Z_2=0.5773502692$ al evaluar la función del integrando en Z_1, Z_2

$$f(-0.5773502692)=e^{-\frac{1}{8}[2.3(-0.5773502692)+0.7]^2}=0.9519115$$

$$f(0.5773502692)=e^{-\frac{1}{8}[2.3(0.5773502692)+0.7]^2}=0.5980684$$

Se aplica la ecuación

$$I=\frac{2.3}{2\sqrt{2\pi}}\left[1(0.9519115)+1(0.5980684)\right]=0.711105$$

B) CON TRES PUNTOS

$W_1 = W_3 = 0.55555$ $W_2 = 0.88888$
$-Z_1 = Z_3 = 0.7745966692$ $Z_2 = 0.0$

Al evaluar la función del integrando en Z_1, Z_2, Y Z_3

$$I = \frac{2.3}{2\sqrt{2\pi}}\left[0.5555(0.4631) + 0.88888(0.9405) + 0.55555(0.8639)\right] = 0.721825$$

EJERCICIO 2.

Integre la función $\int_3^7 \ln|x|\,dx$ en el intervalo (3, 7) por cuadratura de Gauss.

$$\int_3^7 \ln|x|\,dx = (x\ln|x| - x)\Big|_3^7 = (7\ln|7| - 7) - (3\ln|3| - 3) = 6.6213 - 0.2958$$

= **<u>6.32546</u>**

Para x = 3; $Z = \frac{2(3)-(3+7)}{7-3} = \frac{6-10}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

Para x = 7; $Z = \frac{2(7)-(3+7)}{7-3} = \frac{14-10}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Por otra parte: $f(x) = f\left(\frac{7-3}{2}Z + \frac{3+7}{2}\right) = f\left(\frac{4}{2}Z + \frac{10}{2}\right) = f\left(2Z+5\right)$

En consecuencia:

$$\ln|x| = \ln|2Z+5|$$

Ahora bien:

$$dx = \frac{7-3}{2}dz = \frac{4}{2}dz = 2dz$$

Por lo que:

$$\int_3^7 \ln|x|\,dx = \int_{-1}^{1} \ln|2Z+5|2dz = 2\int_{-1}^{1} \ln|2Z+5|dz$$

Usando Gauss para 5 puntos:

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = W_1 f(Z_1) + W_2 f(Z_2) + W_3 f(Z_3) + W_4 f(Z_4) + W_5 f(Z_5)$$

Aplicando el método

$2\int_{-1}^{1} \ln|2Z+5|dz$ = 2 (0.2369268850 * [ln |2(-0.9061798459) + 5|]

+ 0.4786286705 * [ln |2(-0.5384693101) + 5|]
+ 0.5688888889 * [ln |2(0) + 5|]
+ 0.4786286705 * [ln |2(0.5384693101) + 5|]
+ 0.2369268850 * [ln |2(0.09061798459) + 5|] =

=2(0.274664819+ 0.654224278 + 0.915591345 + 0.863685939 + 0.390263182)

= 2(3.098429563) = **6.196859127**