Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

En este tema se estudiará la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de la forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \qquad \ldots (1)$$

En donde, generalmente, los coeficientes A, B y C son funciones de (x, y) y F es función de $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Este tipo de ecuaciones se presenta en problemas de ingeniería que se relacionan con transferencia de calor, vibraciones, elasticidad y otros.

De acuerdo con los valores de los coeficientes A, B y C, la ecuación en derivadas parciales (1) se puede clasificar en:

Elíptica, parabólica o hiperbólica

En esta parte trataremos las ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES ELÍPTICAS

En las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, se cumple que:

$$B^2 - 4AC < 0$$

Siendo A, B y C los coeficientes de la ecuación (1).

Dos casos de estas ecuaciones son:

a) La ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial xy^2}u(x,y) = 0$$

b) La ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial xy^2}u(x,y) = F(x,y)$$

En forma similar a la obtención de fórmulas de derivación, se pueden obtener expresiones que proporciones un valor aproximado de un derivada parcial en un punto i, j dado. Así por ejemplo la $\left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{i,j}$ se puede sustituir por el esquema de derivación correspondiente

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{2h}\left\{-1\frac{\partial}{\partial y} \quad \underset{=}{0}\frac{\partial}{\partial y} \quad 1\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

$$\frac{1}{2h}\left\{-1\cdot\frac{1}{2h}\left\{\begin{matrix}1\\ \underset{=}{0}\\ -1\end{matrix}\right\}\underset{=}{0}\cdot\frac{1}{2h}\left\{\begin{matrix}1\\ \underset{=}{0}\\ -1\end{matrix}\right\}1\cdot\frac{1}{2h}\left\{\begin{matrix}1\\ \underset{=}{0}\\ -1\end{matrix}\right\}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{4h^2}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0- & -\underline{\underline{0}}- & -0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ --i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} | \\ j \end{array} & \end{array} \qquad (2)$$

Donde i representa el i-ésimo renglón y j la j-ésima columna y están donde se encuentra el pivote.

Entonces si se aplica el operador $\left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{i,j}$ a una función $u(x,y)$ se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y) = \frac{1}{4h^2}\left[-u\left(x_{i-1},y_{j-1}\right) + u\left(x_{i-1},y_{j+1}\right) + u\left(x_{i+1},y_{j-1}\right) - u\left(x_{i+1},y_{j+1}\right)\right]$$

La solución de la ecuación de Laplace o la ecuación de Poisson es una función $u(x,y)$, tal que la verifique idénticamente. Un método para obtener la solución de este tipo de ecuaciones es el método de *diferencias finitas*, que consiste en sustituir las derivadas de la ecuación diferencial por fórmulas de derivación.

Para la ecuación de Laplace se puede decir que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\left\{1 \quad \underline{\underline{-2}} \quad 1\right\} + \frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ \underline{\underline{-2}} \\ 1 \end{array}\right\}$$

Sumando renglón con renglón y columna con columna:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} (j-1) & (j) & (j+1) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \underline{\underline{-4}} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (i-1) \\ (i) \\ (i+1) \end{array} \end{array} \qquad (3)$$

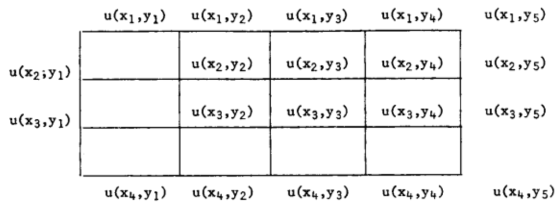
Aplicando la fórmula anterior a una función $u(x,y)$ se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) \\ &\qquad = \frac{1}{h^2}\left[u\left(x_i,y_{j-1}\right) + u\left(x_i,y_{j+1}\right) - 4u\left(x_i,y_j\right) + u\left(x_{i-1},y_j\right) + u\left(x_{i+1},y_j\right)\right] \end{aligned}$$

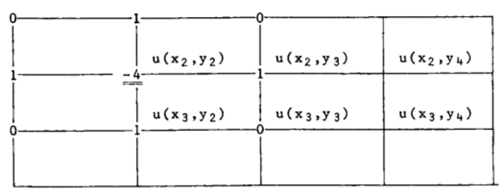
Para ilustrar la aplicación del método, considérese el siguiente problema de valores en la frontera.

Si la función $u(x, y)$ representa las temperaturas que se tienen en diferentes puntos de una placa, de la cual son conocidas las temperaturas en la frontera de la misma; entonces esta función debe satisfacer a la ecuación de Laplace, así como las condiciones de frontera en toda la periferia de la placa, cuando ésta se encuentre en equilibrio térmico.

Para conocer las temperaturas internas de la placa se sobrepondrá a ésta, una *malla* de la siguiente forma:



donde $u(x_1,y_1)$, $u(x_1,y_2)$, $u(x_1,y_3)$, $u(x_1,y_4)$, $u(x_1,y_5)$, $u(x_2,y_5)$, $u(x_3,y_5)$, $u(x_4,y_5)$, $u(x_4,y_4)$, $u(x_4,y_3)$, $u(x_4,y_2)$, $u(x_4,y_1)$, $u(x_3,y_1)$, y $u(x_2,y_1)$ son las temperaturas en la frontera de la placa las cuales se conocen. Lo que se desea determinar son los valores de $u(x_2,y_2)$, $u(x_2,y_3)$, $u(x_2,y_4)$, $u(x_3,y_2)$, $u(x_3,y_3)$ y $u(x_3,y_4)$ los cuales representan las temperaturas internas de la placa. Para lograrlo se aplicará la expresión (3) a cada uno de los puntos internos. Considerando $u(x_2,y_2)$ como pivote, se obtiene:



lo cual significa que:

$$\frac{1}{h^2}\Big[u(x_2,y_1) + u(x_2,y_3) - 4u(x_2,y_2) + u(x_1,y_2) + u(x_3,y_2)\Big] = 0$$

Aplicando la expresión (3) a cada uno de los puntos internos restantes se obtiene:

$$\frac{1}{h^2}\Big[u(x_2,y_2) + u(x_2,y_4) - 4u(x_2,y_3) + u(x_1,y_3) + u(x_3,y_3)\Big] = 0$$

$$\frac{1}{h^2}\Big[u(x_2,y_3) + u(x_2,y_5) - 4u(x_2,y_4) + u(x_1,y_4) + u(x_3,y_4)\Big] = 0$$

$$\frac{1}{h^2}\Big[u(x_3,y_1) + u(x_3,y_3) - 4u(x_3,y_2) + u(x_2,y_2) + u(x_4,y_2)\Big] = 0$$

$$\frac{1}{h^2}\Big[u(x_3,y_2) + u(x_3,y_4) - 4u(x_3,y_3) + u(x_2,y_3) + u(x_4,y_3)\Big] = 0$$

$$\frac{1}{h^2}\Big[u(x_3,y_3) + u(x_3,y_5) - 4u(x_3,y_4) + u(x_2,y_4) + u(x_4,y_4)\Big] = 0$$

suponiendo que las temperaturas en la frontera de la placa son:

$u(x_1,y_1) = 50$	$u(x_4,y_5) = 70$
$u(x_1,y_2) = 5$	$u(x_4,y_4) = 80$
$u(x_1,y_3) = 5$	$u(x_4,y_3) = 90$
$u(x_1,y_4) = 10$	$u(x_4,y_2) = 80$
$u(x_1,y_5) = 30$	$u(x_4,y_1) = 70$
$u(x_2,y_5) = 40$	$u(x_3,y_1) = 30$
$u(x_3,y_5) = 40$	$u(x_2,y_1) = 30$

y eliminando h^2, debido a que las ecuaciones están igualadas a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$30 + u(x_2,y_3) - 4u(x_2,y_2) + 5 + u(x_3,y_3) = 0$$

$$u(x_2,y_2) + u(x_2,y_4) - 4u(x_2,y_3) + 5 + u(x_3,y_3) = 0$$

$$u(x_2,y_3) + 40 - 4u(x_2,y_4) + 10 + u(x_3,y_4) = 0$$

$$30 + u(x_3,y_3) - 4u(x_3,y_2) + u(x_2,y_2) + 80 = 0$$

$$u(x_3,y_2) + u(x_3,y_4) - 4u(x_3,y_3) + u(x_2,y_3) + 90 = 0$$

$$u(x_3,y_3) + 40 - 4u(x_3,y_4) + u(x_2,y_4) + 80 = 0$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss-Seidel, con ayuda de una computadora digital, se obtiene que las temperaturas internas de la placa son:

$u(x_2,y_2) = 22.185$	$u(x_3,y_2) = 46.481$
$u(x_2,y_3) = 27.636$	$u(x_3,y_3) = 53.739$
$u(x_2,y_4) = 29.619$	$u(x_3,y_4) = 50.839$