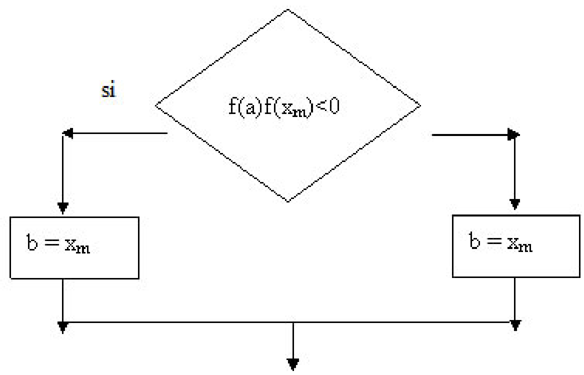
Bisección

Este método consiste en obtener una mejor aproximación de la raíz a partir de un intervalo inicial (a,b) en el cual hay un cambio de signo en la función, es decir: f(a)f(b)<0.

Se obtiene el punto medio:

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

xm es la nueva aproximación a la raíz, y se vuelve a tomar un intervalo, pero ahora mas pequeño, considerando que siga existiendo un cambio de signo en la función, es decir, el nuevo intervalo queda determinado por:



El método termina cuando se cumple con alguna condición de paro, en este programa la condición es la tolerancia :

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$$

Este es un método "de encierro", para aplicarlo se debe contar con un intervalo inicial, en donde f(a)*f(b) < 0. Este método requiere de menos pasos en un programa, sin embargo converge mas lentamente que el de Newton-Raphson.

Los pasos del método son los siguientes:

1.- Localizar un intervalo que contenga al menos una raíz.

2.- Dividir el intervalo en dos partes iguales reteniendo la mitad en donde f(x) cambia de signo, para conservar al menos una raíz.

3.- Repetir el procesó varias veces hasta cumplir con la tolerancia deseada.

$$m = \frac{(a+b)}{2}$$

si:

f(m) f(b)<0 entonces conservar (m,b) como el sem. intervalo que contiene al menos una raíz.

A cada paso se le llama "iteración" y reduce el intervalo a la mitad.

Después de cada iteración el intervalo re reduce a la mitad, después de n iteraciones, el intervalo original se había reducido 2^n veces, por lo tanto, si el intervalo original es de tamaño "a" y el criterio de convergencia aplicado al valor absoluto de la diferencia de dos Xm consecutivas es " $\in$ ", entonces se requerían "n" iteraciones donde "n" se calcula con la igualdad de la expresión:

$$\frac{a}{2^n} \leq \in$$

de donde: $$n = \frac{\ln a - \ln \in}{\ln 2}$$ $\Leftarrow$ iteraciones que se requieren.

Ejemplo1

Buscar la raíz de $x^5 - x + 3 = 0$

f (-2) = $(-2)^5$ - (-2) + 3 = -32 + 2 + 3 = -27 *negativo*

f (-1) = $(-2)^5$ - (-1) + 3 = -1 + 1 + 3 = 3 *positivo*

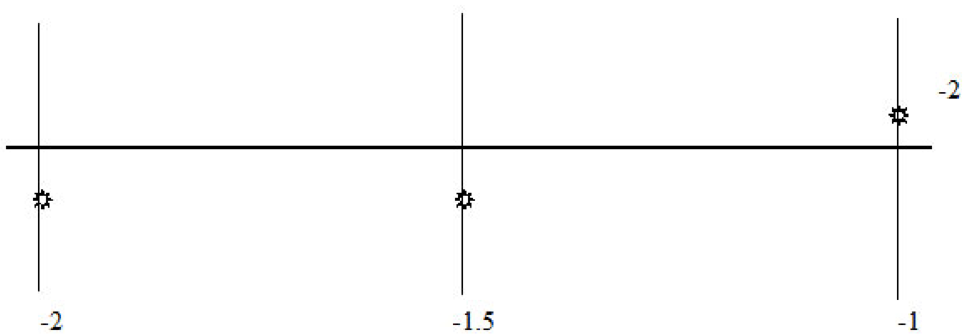
Debe haber por lo menos una raíz en (-2,-1)

$$x_{m1} = \frac{-2+(-1)}{2} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

f (-1.5) = $(-1.5)^5$ - (-1.5) + 3 = - 7.59 + 1.3 + 3 = -3.09375 *negativo*

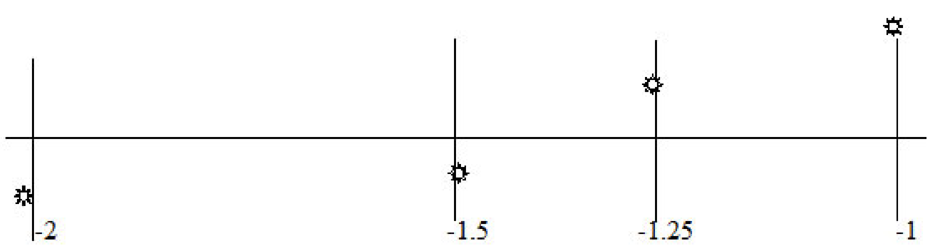
El intervalo donde cambia el signo es

(-1.5,-1)



$$x_{m2} = \frac{-1.5-1}{2} = -1.25$$

f (-1.25) = $(-1.25)^5$ - (-1.25) + 3 = -3.0 + 1.25 + 3 = 1.19824 *positivo*



La raíz "R" esta en el intervalo (-1.5,-1.25)

$$x_{m3} = \frac{-1.5 - 1.25}{2} = -1.375$$

f $(-1.375)^2 = (-1.375)^5 - (-1.375) + 3 = -0.5398$ *negativo*

Hay que determinar un numero máximo de iteraciones

Normalmente esto se hace considerando una "tolerancia" , esto es:

El valor absoluto de la diferencia de la $x_{i+1} - x_i$ debe ser menor que la tolerancia o el resultado de alguna fórmula de error debe ser menor que la tolerancia dada.

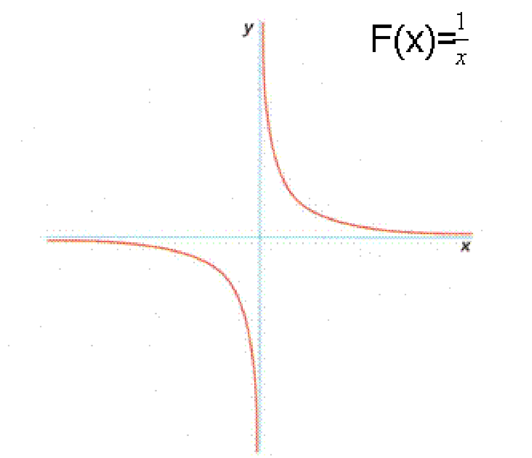
Una de las fórmulas de error mas útiles es la del error relativo porcentual aproximado:

$$e_r = \left| \frac{X_{nueva} - X_{anterior}}{X_{nueva}} \right| 100\ \%$$

Ventajas: este método se aplica a cualquier función continua y no requiere derivadas

Desventajas: es un método lento

Una de las limitaciones de este método es que puede resultar un polo considerándolo como un "cero" ,por ejemplo, la sig. función tiene un cambio de signo cerca del origen.



En este caso, nunca se va a encontrar una raíz, aunque haya un cambio de signo en la función en el intervalo dado.

Ejemplo2

Encontrar una raíz real de: $e^{x-1} - 1.5x = 0$

Con una tolerancia de : $\varepsilon = 0.1$ $|X_i + 1 - X_i| \langle \varepsilon$

$f(0) = e^{0-1} - 1.5(0) = e^{-1} - 0 = 0.3678$

$f(1) = e^{1-1} - 1.5(1) = e^{0} - 1.5 = -0.5$

ITERACIÓN 1 con un limite de (0,1)

$x_1 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es ,; $x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$

$f(0.5) = e^{0.5-1} - 1.5(0.5) = 0.6065 - 0.75 = -0.1435$

ITERACIÓN 2 con un limite de (0,0.5)

$x_2 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_2 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25$

$f(0.25) = e^{0.25-1} - 1.5(0.25) = 0.4723 - 0.375 = 0.0973$

ITERACIÓN 3 con un limite de (0.25, 0.5)

$x_3 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_3 = \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375$

$$f(0.375) = e^{0.375-1} - 1.5(0.375) = 0.5352 - 0.5625 = -0.0273$$

ITERACIÓN 4 con un limite de (0.25,0.375)

$x_4 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_4 = \frac{0.25+0.375}{2} = 0.03125$

$x_4 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_4 = \frac{0.25+0.375}{2} = 0.3125$

$$|x_4 - x_3| = |0.3125 - 0.375| = 0.0625(0.1$$

Por lo tanto la raíz aproximada es : 0.3125

La gráfica correspondiente al ejercicio es la siguiente:

ITERACIÓN 3 con un limite de (0.25, 0.5)

$x_3 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_3 = \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375$

$$f(0.375) = e^{0.375-1} - 1.5(0.375) = 0.5352 - 0.5625 = -0.0273$$

ITERACIÓN 4 con un limite de (0.25,0.375)

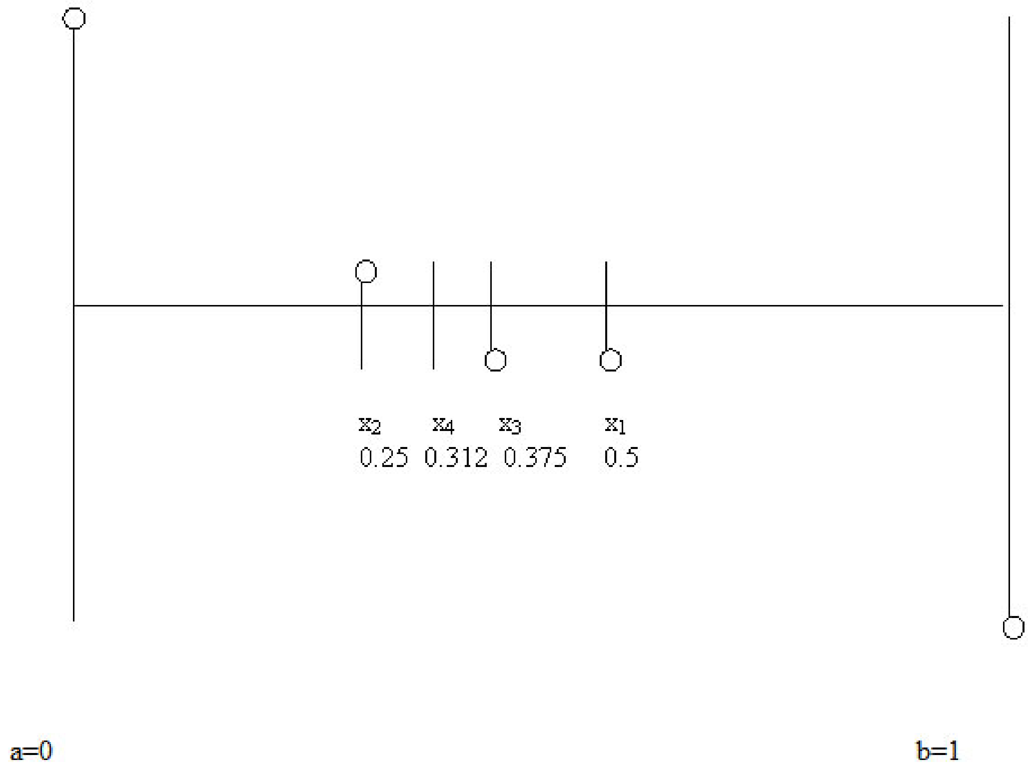
$x_4 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_4 = \frac{0.25+0.375}{2} = 0.03125$

$x_4 = \frac{a+b}{2}$, por lo tanto esto es .; $x_4 = \frac{0.25+0.375}{2} = 0.3125$

$$|x_4 - x_3| = |0.3125 - 0.375| = 0.0625(0.1$$

Por lo tanto la raíz aproximada es : 0.3125

La gráfica correspondiente al ejercicio es la siguiente:



Bibliografía:

[Burden,1998] páginas 48-52.

[Chapra,1999] páginas 131-140.

[Iriarte,1990] páginas 23-26.

[Maron, 1995] páginas 86-90.

[Nakamura,1992] páginas 63-67.

[Nieves,1999] páginas 57-59.

[Smith,1988] páginas 76-80.