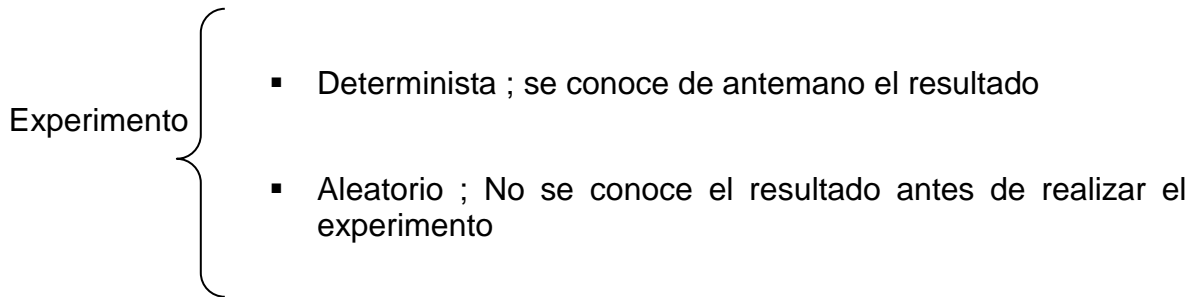


TEMA 2. Fundamentos de la teoría de la probabilidad.

Objetivo: El alumno comprenderá el concepto de probabilidad, así como los teoremas en los que se basa esta teoría.

Experimentos.- Toda acción que se realiza para la obtención de un resultado.



Espacio muestral o espacio de eventos "S": son todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

$$S = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

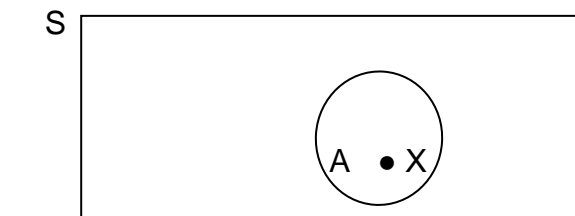
Evento compuesto ò evento: Es un subconjunto del espacio de eventos cuyos elementos tienen una característica en común.

$$A = \{x \mid x \text{ es impar} \} = \{1, 3, 5\}$$

Evento elemental ò punto muestral: Es uno de los resultados o elementos de un evento.

$$X \in A \subset S$$

Ejemplificado con el diagrama de Venn - Euler:



dónde:

S = espacio de eventos

A = evento compuesto o evento

X = evento elemental o punto muestral

Designación de eventos:

$$S = \{ x \mid x \text{ es el resultado del tiro del dado} \} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por comprensión

Por extensión

$$B = \{X \mid X \text{ es par} \} = \{2, 4, 6\}$$

$$X = \{4\} \quad 4 \in B$$

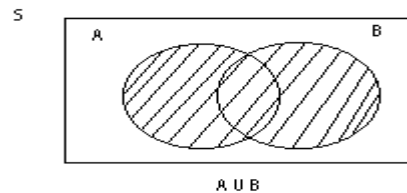
OPERACIONES ENTRE EVENTOS

Sean A y B eventos tales que $A \subset S$ y $B \subset S$

Las operaciones siguientes tienen la propiedad de cerradura.

- **Unión**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$



U: se refiere a uno u otro o ambos, o por lo menos uno de ellos.

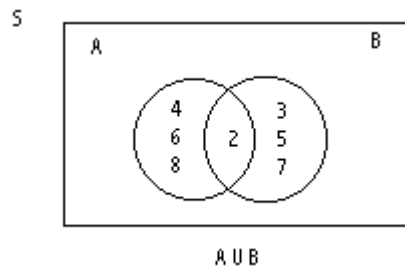
Ejemplo:

$$\text{Sea } S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x \text{ es un número par}\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\} = \{x \mid x \text{ es un número primo}\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



COROLARIO

$$A \cup B = B \cup A; \text{ propiedad de conmutatividad}$$

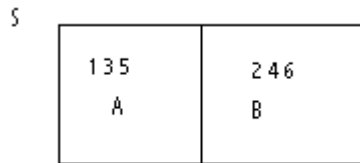
Ejemplo:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$$

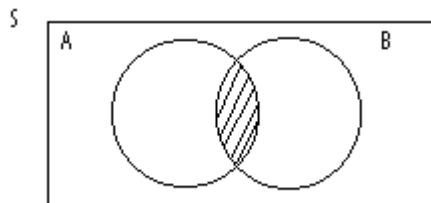


A, B Son eventos colectivamente exhaustivos

A, B Son eventos mutuamente excluyentes

- **Intersección**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



$$A \cap B$$

Del ejemplo anterior: $A \cap B = \{2\}$

COROLARIO

$A \cap B = B \cap A$; propiedad de conmutatividad

Si $A \cap B = \{ \} = \text{evento imposible} = \Phi$

Ejemplo:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{ \} = \Phi$$

$B = \{2, 4, 6\}$

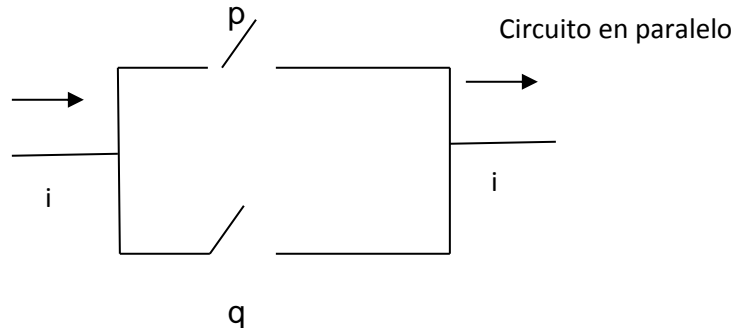
Si $A \cap B = \Phi$; entonces A, B son eventos mutuamente excluyentes

A S también se le denomina “evento seguro “

Relación en la lógica matemática

Disyunción; sean p y q dos proposiciones lógicas: $p \vee q = p$ disyunción q

TABLA DE VERDAD		
P	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
f	F	f



Conjunción; sean p y q dos proposiciones lógicas: $p \wedge q = p$ conjunción q

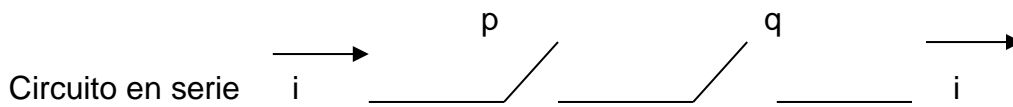
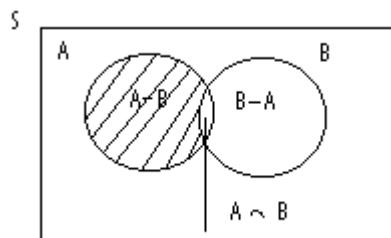


TABLA DE VERDAD		
P	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
f	F	F

Diferencia; sean $A \subseteq S$ y $B \subseteq S$, \subseteq : pertenece o es igual

$$A - B = A \setminus B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$$



$$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

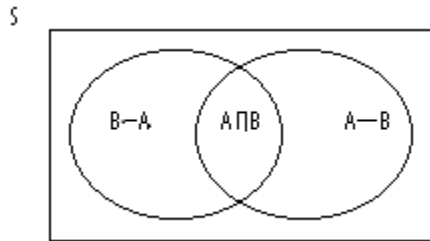
$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

$$B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$$

$$A - B = \{ 4, 6, 8 \}$$

Corolario 1 ; $A - B \neq B - A$ anticonmutatividad $B - A = \{ 3, 5, 7 \}$

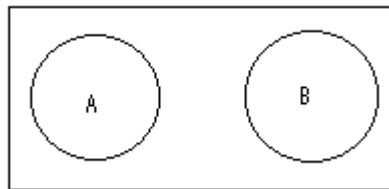
Corolario 2; $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$



Corolario 3; si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces;

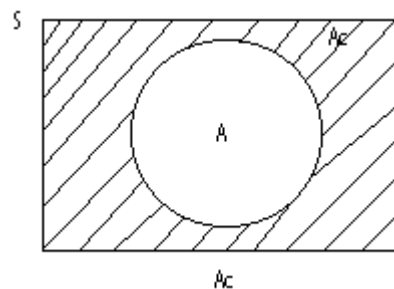
$$A - B = A$$

$$B - A = B$$



Complemento ;Sea $A \subseteq S$

$$A^c = A' = \bar{A} = S - A = \{x \mid x \in S, x \notin A\} \quad \text{donde ; } A^c: \text{complemento de } A$$



Del ejemplo anterior: $A^c = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

Corolario 4;

a) $A \cup A^c = S$

b) $A \cap A^c = \Phi$

LEYES DE DE'MORGAN

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$b) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

- **Cardinalidad de un evento $n(A) = \#A$:** Es el número de elementos no repetidos del evento

Ejemplo:

$$n(S) = 10$$

$$n(A) = 4$$

$$n(B) = 4$$

$$n(A - B) = 3$$

Ejemplo:

$$A = \{ 1,0,0,1,0,0,1 \} \quad n(A) = 2 \quad B = \{ 3,4,4,5,7,7,8 \} \quad n(B) = 5$$

TÉCNICAS DE CONTEO O ANÁLISIS COMBINATORIO

- **Teorema fundamental del conteo (acciones o eventos).**

Si una acción puede realizarse de m maneras distintas y una segunda acción puede realizarse de n maneras distintas entonces ambas acciones se podrán realizar de $m \times n$ maneras diferentes en el orden indicado.

Ejemplo:

$$A = \{\text{lanzamiento de un dado}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{\text{lanzamiento de una moneda}\} = \{a, s\}$$

$$A \times B = \{ (1,a), (1,s), (2,a), (2,s), (3,a), (3,s), (4,a), (4,s), (5,a), (5,s), (6,a), (6,s) \}$$

$$n(A) = 6$$

$$n(B) = 2$$

$$n(A \times B) = 6 \times 2 = 12$$

Generalización :

Primera acción ----- m_1 maneras distintas

Segunda acción ----- m_2 maneras distintas

r-ésima acción ----- m_r maneras distintas

La ocurrencia simultánea y en el orden indicado de las r acciones distintas, se calcula como m_1, m_2, \dots, m_r

Ejemplo:

menú de desayuno			
	entrada	plato fuerte	postre
	café	rancheros	
	yogurt	cereal	helado
	jugo	hot cakes	fruta
totales =	3	3	2

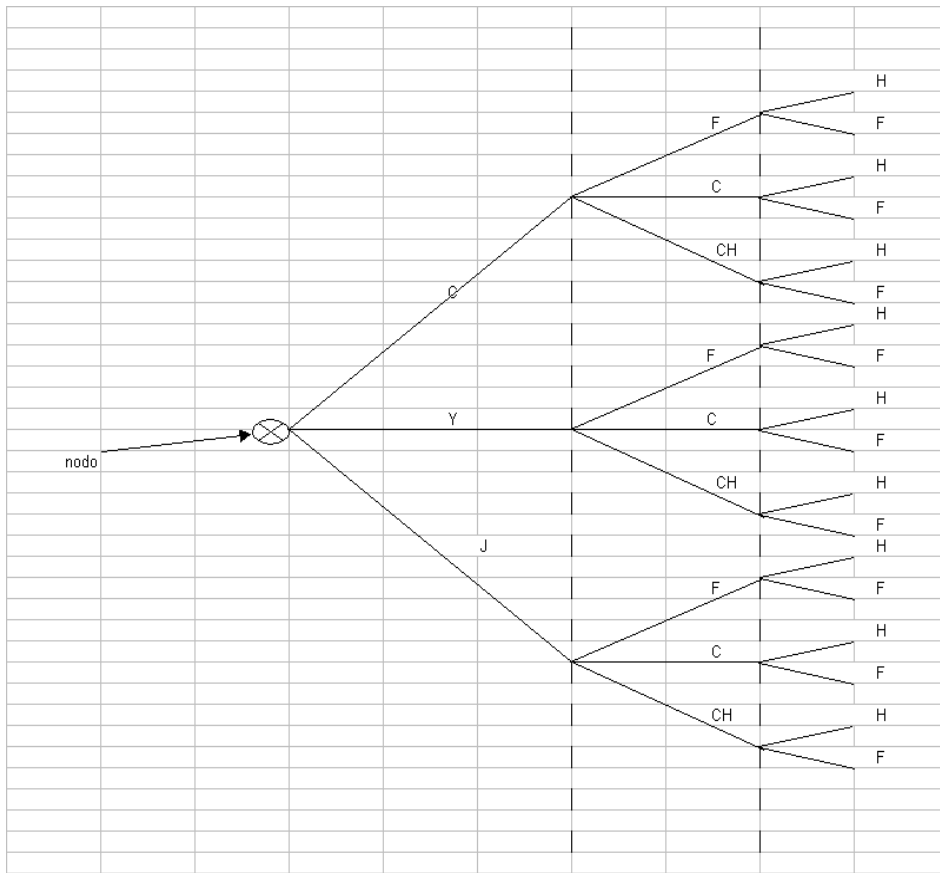
¿Cuántos menús disfrutarías? = $3 \times 3 \times 2 = 18$

- **Diagrama de árbol**

Es una herramienta gráfica que permite representar las diferentes acciones lógicas consecutivas:

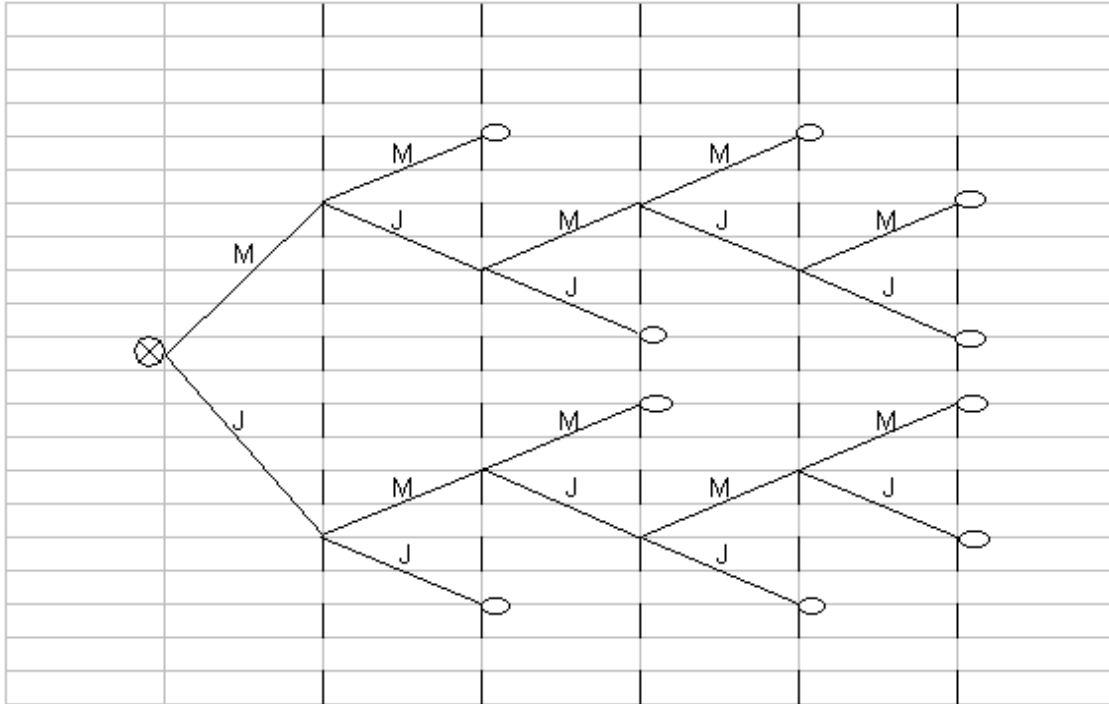
Se parte de un punto llamado nodo.

Del ejemplo:



Ejemplo:

Marisol y Julio participan en un torneo de tenis, el primero que gane dos juegos seguidos o un total de tres será el vencedor del torneo. Empleando un diagrama de árbol obtener el número total de maneras en que puede realizarse el torneo.



Total de maneras en el que se puede realizar el torneo $n = 10$

ANÁLISIS COMBINATORIO O TÉCNICAS DE CONTEO.

- Permutaciones simples u ordenaciones
- Permutaciones con repetición
- Permutaciones con grupos de elementos iguales
- Permutaciones circulares
- Combinaciones simples
- Combinaciones con repetición

Factorial de un número (entero no negativo)

$$n! = n(n-1)(n-2), \dots (3)(2)(1)$$

Ejemplo:

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

nota: por definición $0! = 1$

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL FACTORIAL

$$n! = n(n-1)!$$

Corolario:

$$n = \frac{n!}{(n-1)!}$$

Ejemplo:

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

$$\frac{3!}{4!} + \frac{5!}{6!} = \frac{3!}{4 \cdot 3!} + \frac{5!}{6 \cdot 5!} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

Demostraciones:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = \frac{(r+1)n! + (n-r)n!}{(r+1)!(n-r)!} = \frac{rn! + n! + nn! - rn!}{(r+1)!(n-r)!} +$$

$$\frac{n!(1+n)}{(r+1)!(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$$

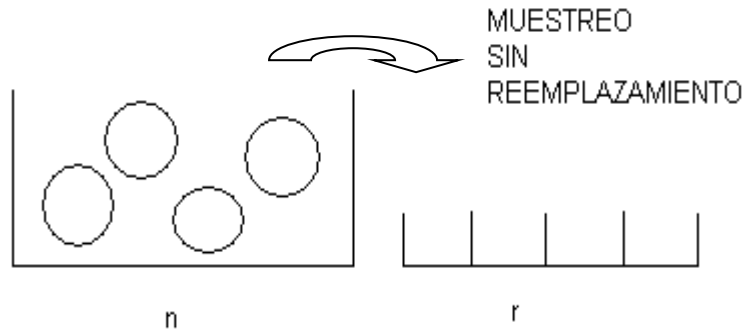
$$\frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{(n-r+1)n! + r!n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{nn! - rn! + n! + rn!}{r!(n-r+1)!} +$$

$$\frac{nn! + n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

- **Permutaciones simples**

Se llaman permutaciones simples de n elementos de orden r a los diferentes grupos ordenados que se pueden formar, al elegir r elementos de un grupo de n elementos dados, de tal manera que dos permutaciones se consideran distintas si difieren alguno de sus elementos ò en el orden de ellos. En la definición anterior, se ha considerado implícitamente que el orden r es menor ò igual que el número n de elementos dados, lo que equivale a no permitir la repetición de elementos en una misma permutación.

$$r \leq n$$



Ejemplo. Obtener las permutaciones de los órdenes 1, 2, 3 de las 4 letras a, b, c y d

-Orden 1

a b c d 4

-Orden 2

ab ba ca da

ac bd cb db 12

ad bc cd dc

-Orden 3

abc bac cab dab

abd bca cba dba

adb bcd cda dca 24

adc bdc cad dac

acb bda dad dbc

acd bad cdb dcd

-Cálculo del número de permutaciones simples:

- 1) Elegir el primer elemento las n maneras posibles
- 2) Elegir el segundo elemento las $(n-1)$ maneras posibles
- 3) Elegir el tercer elemento las $(n-2)$ maneras posibles

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

a) Elegir el r-ésimo elemento las (n-r+1) maneras posibles

$$P_n^r = nPr = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplos:

1.- Calcular el número de arreglos diferentes de tres letras que se pueden formar con las letras de la palabra libreta, si en los arreglos no se permiten tener letras repetidas.

$$n=7 \quad r=3$$

$$P_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

2.-Cuantos comités formados por un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal se pueden elegir de un grupo de 10 personas que son candidatos a cualesquiera de los puestos.

$$n=10 \quad r=4$$

$$P_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Ejemplo: ¿Cuántas filas de 6 personas se pueden formar de un grupo de 10, si 3 de las personas deben estar siempre juntas, aparezcan o no en la fila?

a) Las 3 personas de la condición no aparecen en la fila.

$$n=7, r=6$$

$$P_7^6 = \frac{7!}{(7-6)!} = 5040$$

b)

$$P_7^3 \cdot 4 \cdot 3! = \frac{7!}{(7-3)!} = 5040$$

$$\text{Total de filas} = 5040 + 5040 = 10080$$

Ejemplo: De cuantas maneras se pueden colocar 10 libros si 4 de ellos deben de estar siempre juntos.

a) Si se requiere que el grupo de 4 libros debe ocupar en un lugar determinado.

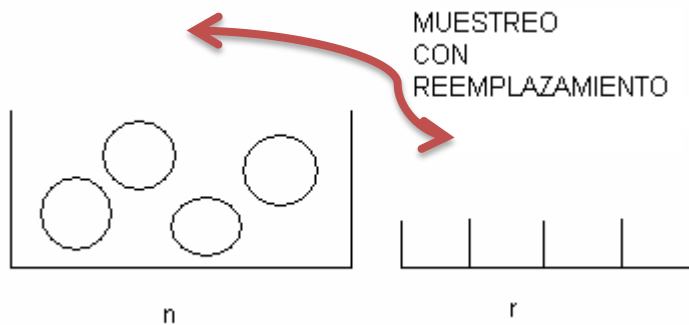
$$P_6^6 \cdot 7 \cdot 4! = 120960$$

Permutaciones con repetición

Don arreglos ordenados en donde pueden repetirse elementos en el mismo arreglo, por lo que puede suceder que el orden r de las permutaciones con repetición sea mayor que el número n de elementos dados.

$r \leq n$

$r > n$



Ejemplo:

Formar las ordenaciones con repetición de las órdenes 1, 2, 3 de las letras a, b, c.

-Orden 1

a b c 3

-Orden 2

aa ba ca

ab bb cb 9

ac bc cc

-Orden 3

aaa baa caa
 aab bab cab
 aac bac cac
 aba bba cba
 abb bbb cbb 27
 abc bbc cbc
 aca bca cca
 acb bcb ccb
 acc bcc ccc

- **Cálculo del número de permutaciones con repetición.**

- 1) Elegir el primer elemento de las n maneras distintas
- 2) Elegir el primer elemento de las n maneras distintas

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

- r) Elegir el primer elemento de las n maneras distintas

$$PR_n^r = n^r$$

Ejemplos: ¿Cuántos mensajes se pueden formar si cada mensaje puede contener hasta cuatro de tales elementos?

Morse + -

1 elemento

$$+ - = 2$$

2 elementos

++

$$+ - = 4$$

- +

--

3 elementos

+++

++-

+ - +

- + + =8

+ - -

- + -

- - +

- - -

4 elementos

++++

+++ -

++ - +

+ - + +

+ - + -

+ - - - =16

+ - - -

- + + +

- + + -

- + - +

- + - -

- - + +

- - + -

- - - +

- - - -

Total 30 mensajes.

$$2+4+8+16= 30$$

Ejemplo:

- 1) cuantos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5

$$PR_5^5 = 3125$$

- 2) cuantos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4

nota: debe tenerse en cuenta que los números de 5 cifras que empiecen con un 0 o más en realidad no tienen 5 cifras sino menos.

$$PR_5^5 - \frac{1}{5}PR_5^5 = 2500$$

- **Permutaciones con grupos de elementos iguales**

Sea una muestra de n elementos en los que hay α elementos iguales y β elementos iguales.

El número de permutaciones con α elementos iguales y β iguales es X .

Si se toman los α elementos iguales y se transforman en α elementos distintos y se permutan de las $\alpha!$ maneras distintas.

Se obtendrán las permutaciones de n elementos donde hay α elementos distintos y β elementos iguales:

$$X\alpha!$$

Si se toman los β elementos iguales y se transforman en β elementos distintos y se permutan de las $\beta!$ maneras distintas,

Se obtendrán las permutaciones de n elementos donde hay α elementos distintos y β elementos distintos:

$$X\alpha!\beta! = n!$$

$$x = P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \beta!}; \alpha + \beta = n$$

Permutaciones de n elementos donde hay α elementos iguales y β elementos iguales

$$\alpha + \beta = n$$

Ejemplo: En una urna hay 10 bolitas de las cuales 4 son blancas y 6 son negras. Calcular el número de arreglos que se pueden tomar con las 10 bolitas.

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4! 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$$

La expresión anterior puede generarse:

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, w} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots w!}; \alpha + \beta + \dots + w = n$$

Ejemplo: Se tiene una bandera de 10 posiciones y 10 banderas de las que 5 son rojas, 3 azules y dos blancas. Calcular el número de señales diferentes que pueden formarse al colocar todas las banderas simultáneamente en el asta.

5R, 3A, 2B

$$P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5! 3! 2!} = 2520$$

Ejercicio: Calcular cuantas permutaciones se pueden formar con las letras de las palabras:

- a) EVA
- b) LAURA
- c) INGENIERIA
- d) SOCIOLOGICOS
- e) CIBERNETICA
- f) MURCIELAGO

a)

$$PR_3^1 = \frac{3!}{1} = 6$$

b)

$$PR_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$$

c)

$$PR_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{2! 2! 3!} = 151200$$

d)

$$PR_{12}^{4,2,2,2} = \frac{12!}{4! 2! 2! 2!} = 2494800$$

e)

$$PR_{11}^{2,2,2} = \frac{11!}{2! 2! 2!} = 4989600$$

f)

$$PR_{10}^1 = \frac{10!}{1} = 3628800$$

- **Combinaciones simples**

Se llaman combinaciones de n elementos de orden r a los diferentes grupos que pueden formarse al elegir r elementos dados, de tal manera que 2 combinaciones son distintas si difieren en el número de sus elementos.



sin reemplazamiento
no importa el orden

$r \leq n$



Ejemplo: Calcula el número de combinaciones de las 4 letras a, b, c, d

-Orden 1

a b c d 4

-Orden 2

ab bc cd

ac bd 6

ad

-Orden 3

abc bcd

abd 4

acd

-Orden 4

abcd 1

- **Cálculo del número de combinaciones C_n^r**

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinaciones simples de n elementos y de orden r.

Notación

$$C_n^r = nCr = \binom{n}{r}$$

Ejemplo: Cuantos comités distintos de 4 personas se pueden formar de un grupo de 10.

$$n = 10, r = 4 \quad 10C4 = 10!/4!(10-4)! = 210$$

- **Números combinatorios**

-nCr

Definición: se llaman números combinatorios de n elementos de orden r a las combinaciones de n elementos de orden r.

$\binom{n}{r}$ numerador

; Enteros positivos $r \leq n$

r orden

Propiedades de los números combinatorios:

1. Los números combinatorios de orden 0 valen la unidad:

$$\binom{n}{0} = 1$$

2. Los números combinatorios de orden 1 son igual a su numerador:

$$\binom{n}{1} = n$$

3. Los números combinatorios de orden igual a su numerador valen la unidad:

$$\binom{n}{n} = 1$$

- **Números combinatorios de órdenes complementarios**

Definición: se llaman números combinatorios de órdenes complementarios a los números que tienen el mismo numerador y su orden está formado por la diferencia del numerador menos el orden del otro número combinatorio.

$$\binom{n}{r} \quad \binom{n}{n-r}$$

4. Los números combinatorios de ordenes complementarios son iguales

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

5. Se puede establecer la suma cerrada entre dos números combinatorios de acuerdo a las siguientes características:

Para que la suma entre dos números combinatorios sea cerrada, es decir que su resultado sea otro número combinatorio, ambos sumandos, deberán tener el mismo numerador y su orden diferir en una unidad.

El resultado será otro número combinatorio cuyo numerador está aumentando en una unidad y cuyo orden será mayor de los números combinatorios sumados.

- **Teorema fundamental del binomio**

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^n = a^n b^0 + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n ; \text{ para } n \in \mathbb{R}$$

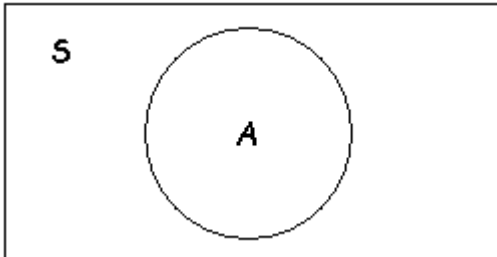
$$(a+b)^n = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

- **Triangulo de pascal**

			1					1			
		1			2			1			
	1		3			3			1		
	1	4		6		6		4	1		
1		5		10		10		5		1	

Probabilidad axiomática

Sea A un evento y S el espacio de eventos $A \subseteq S$



Probabilidad clásica

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{tamaño de } A}{\text{tamaño de } S} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

Primer axioma

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Segundo Axioma

Si \emptyset es el evento imposible

$$P(\emptyset) = 0$$

Si S es el evento seguro

$$P(S) = 1$$

Cada uno de los elementos del espacio de eventos tienen la misma oportunidad de aparición por lo que a S se le considera un espacio equiprobable:

$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$; donde A_i : son eventos colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$$

-Axioma

Sea A y A' (complemento); son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

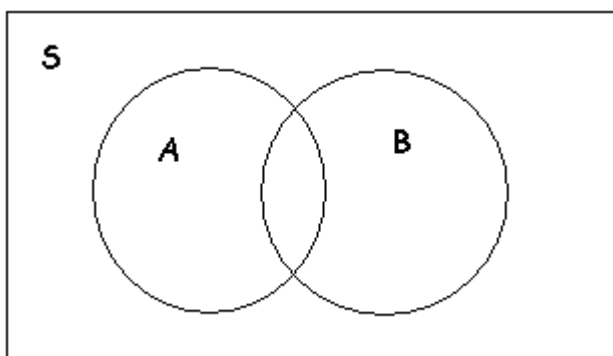
$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1 = P(S)$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{probabilidad del complemento}$$

- **Teoremas derivados de axiomas**

-Ley de adición de probabilidades

Sean $A \subset S$ y $B \subset S$ y $A \cap B \neq \emptyset$; es decir A y B son eventos no mutuamente excluyentes.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Ley de adición para dos eventos no mutuamente excluyentes**

U: o ambos o por lo menos uno de ellos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si A y A' son eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = S$$

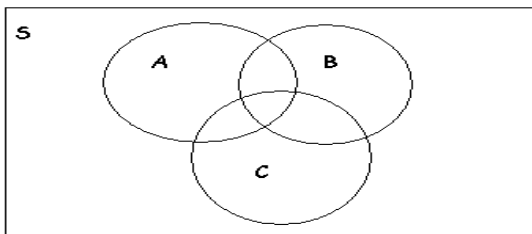
Entonces

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(S) = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- **Ley de adición para dos eventos mutuamente excluyentes**

Ahora sean $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ y $C \cap S = S$ y $A \cap B \cap C = \emptyset$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- **Ley de adición de probabilidades para 3 eventos no mutuamente excluyentes**

Ejemplo:

Se lanza un dado una vez

Determinar:

1. la cara superior muestre 3 puntos $3/6=1/3$
2. la cara superior muestre al menos 5 puntos $1/6$

Ejemplo:

Una caja contiene 12 transistores buenos y 3 defectuosos, se sacan 3 transistores de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

$$P(1b) = 12/15$$

$$P(2b) = 11/14$$

$$P(3b) = 10/13$$

$$P(b) = 12/15 \times 11/14 \times 10/13 = 44/91 \approx 0.4835$$

Ejemplo:

Un par de dados es lanzado. Sea A el evento “la suma de los puntos mostrados es 7”, B el evento “la suma de los puntos mostrados es 10” y sea C el evento “la suma de los puntos mostrados es par”. Determina:

1. son los eventos A y B mutuamente excluyentes
2. son A y C mutuamente excluyentes
3. son B y C mutuamente excluyentes
4. calcular la probabilidad $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$ y $P(B \cup C)$.

$$S \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right.$$

- 1.- si son mutuamente excluyentes
- 2.- si son mutuamente excluyentes
- 3.- no son mutuamente excluyentes
- 4.-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 6/36 + 3/36 = 1/4 \quad P(A \cup C) = 2/3$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 3/36 + 18/36 - 3/36 = 1/2$$

Ejemplo:

Una señora que visita una tienda departamental a veces usa sus tarjetas de crédito 1, 2 ò 3; otras veces paga con cheque y algunas veces en efectivo. Las probabilidades de pagar con estas 5 alternativas son respectivamente 0.25, 0.29, 0.23, 0.19 y 0.04. ¿Cuál es la probabilidad de que en la próxima visita?:

1. no pague en efectivo
2. no use ninguna de sus tarjetas
3. use su tarjeta 1, ò pague con cheque ò pague en efectivo
4. que no pague en efectivo ni con cheque

1.-

$$P(T1) = 0.25 \quad \text{no pague}$$

$$P(T2) = 0.29 \quad \underline{P(EF)^n = 1 - 0.04 = 0.92}$$

$$P(T3) = 0.23$$

$$P(CH) = 0.19$$

$$P(EF) = 0.04$$

$$\Sigma = 1.00$$

2.-

$$\underline{P(T1 \cup T2 \cup T3)^n = P(CH) + P(EF) = 0.19 + 0.04 = 0.23}$$

3.-

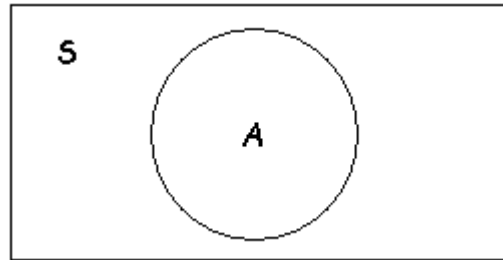
$$\underline{P(T1 \cup CH \cup EF) = P(T1) + P(CH) + P(EF) = 0.48}$$

4.-

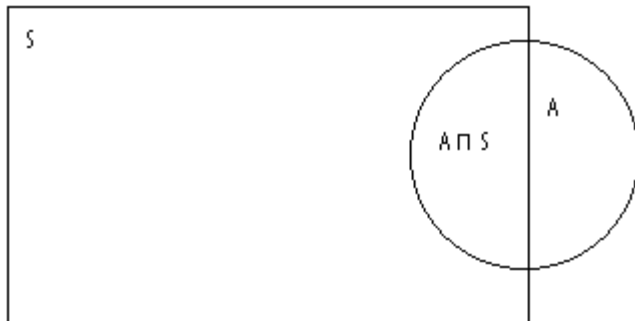
$$\underline{P(EF \cup CH)^n = 1 - [P(EF) + P(CH)] = 1 - 0.23 = 0.77}$$

Probabilidad condicional

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = P(A/S)$$



Dada la ocurrencia de S



$$P(A/S) = \frac{n(A \cap S)}{n(S)}$$

así

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donde;

$P(A/B)$: probabilidad condicional

$P(A \cap B)$: probabilidad conjunta

$P(B)$: probabilidad marginal

Dependencia e independencia de eventos

De la expresión para la probabilidad condicional

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Queda:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

ley de multiplicación de probabilidades

Para dos eventos dependientes.

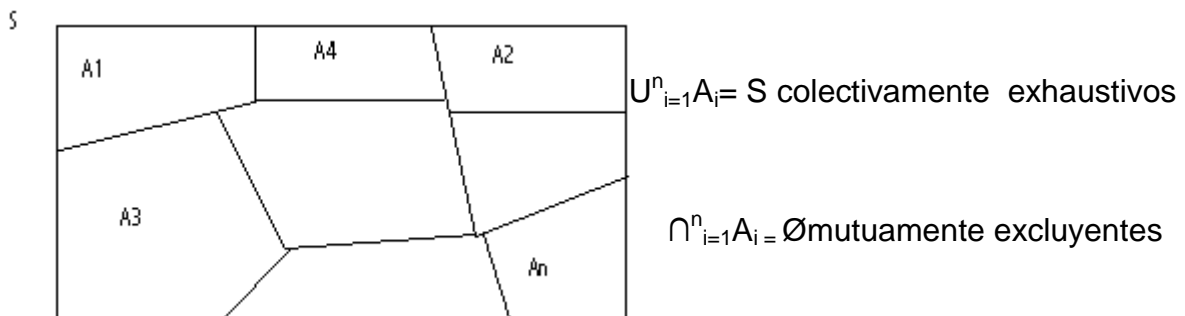
Y a su vez:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ley de multiplicación de probabilidades

Para dos eventos independientes.

- **Probabilidad total. Teorema de Bayes.**

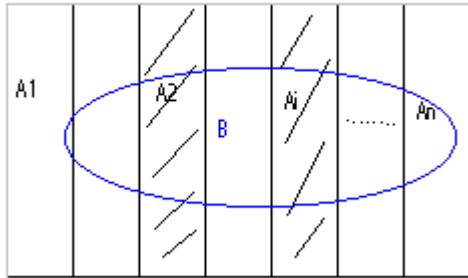


$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

$P(A_i)$ $i= 1, 2$); son conocidas

Sea la partición:

5



De la expresión para la probabilidad condicional.

$$P(A_i \cap B)$$

$$P(B/A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$$

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

probabilidad previa	probabilidad condicional
P(A1)	P(B/A1)
P(A2)	P(B/A2)
P(A3)	P(B/A3)

$$= P(A1) \cdot P(B/A1) = P(A1 \cap B)$$

$$= P(A2) \cdot P(B/A2) = P(A2 \cap B)$$

$$= P(A3) \cdot P(B/A3) = P(A3 \cap B)$$

$$\Sigma = P(B) \quad \text{Probabilidad total}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Teorema de Bayes.

Ejemplo:

Una muestra aleatoria de 200 adultos se clasifica por sexo y su nivel de educación como se muestra en la tabla. Si se escoge una persona al azar de este grupo encuentre la probabilidad de que:

1. la persona sea hombre, dado que la persona tiene educación secundaria.
2. la persona no tiene grado universitario, dado que la persona es mujer.

EDUCACION	SEXO		TOTALES
	HOMBRE	MUJER	
PRIMARIA	38	45	83
SECUNDARIA	28	50	78
FACULTAD	22	17	39
TOTALES	88	112	200

EDUCACION	SEXO		TOTALES
	HOMBRE	MUJER	
PRIMARIA	$P(H \cap P)=0.19$	$P(M \cap P)=0.225$	$P(P)=0.415$
SECUNDARIA	$P(H \cap S)=0.14$	$P(M \cap S)=0.25$	$P(S)=0.39$
FACULTAD	$P(H \cap F)=0.11$	$P(M \cap F)=0.085$	$P(F)=0.195$
TOTALES	$P(H)=0.44$	$P(M)=0.56$	1

1.- $P(H \cap S) = 0.14$

$$P(H/S) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{0.14}{0.39} = 0.3590 \qquad \frac{0.225+0.25}{0.39} = 0.475$$

2.- $P(\text{no grado universitario} \cap M) = 0.475$

$$P(\text{no grado universitario}/M) = \frac{0.475}{P(M)} = \frac{0.475}{0.56} = 0.8482$$

Ejemplo:

En un experimento para estudiar la relación de la hipertensión arterial y los hábitos de fumar, se reúnen los siguientes datos para 180 individuos.

	no fumadores	fumadores moderados	fumadores empedernidos	totales
con hipertension	21	36	30	87
sin hipertension	48	26	19	93
totales	69	62	49	180

Si se seleccionan uno de estos individuos al azar. Encuentre la probabilidad de que la persona:

1. sufre hipertensión, dado que la persona es un fumador empedernido
2. sea un no fumador, dado que la persona no sufre de hipertensión

	no fumadores	fumadores moderados	fumadores empedernidos	totales
con hipertension	$P(NF \cap CH) = 0.1166$	$P(FM \cap CH) = 0.2$	$P(FE \cap CH) = 0.1666$	$P(CH) = 0.4832$
sin hipertension	$P(NF \cap SH) = 0.2666$	$P(FM \cap SH) = 0.1444$	$P(FE \cap SH) = 0.1055$	$P(SH) = 0.5165$
totales	$P(NF) = 0.3832$	$P(FM) = 0.3444$	$P(FE) = 0.2721$	1

1.-

$$P(CH/FE) = 0.1666/0.2721 = 0.6122$$

$$P(NF/SH) = 0.2666/0.5165 = 0.5161$$

Ejemplo:

Si R es el evento de que un convicto cometiera un robo a mano armada y D es el evento de que el convicto promoviera el consumo de drogas, exprese en palabras lo que en notación de probabilidades se indica:

1. $P(R/D)$
2. $P(CD/R)$
3. $P(NR/CD)$

R: robo a mano armada

D: promueve el consumo de drogas

MR. : no robo a mano armada

CD: no promovió el consumo de drogas

1.- probabilidad de que robo a mano armada dado que promueve el consumo de drogas.

2.- probabilidad de que no promueve el consumo de drogas dado que robo a mano armada.

3.- probabilidad de que no robo a mano armada dado que no promueve el consumo de drogas.