Problema. En un sistema masa-resorte-amortiguador, obtener las "curvas de resonancia" para k=4, m=1, Fo=2, (k en $\frac{lb}{pie}$ o $\frac{N}{m}$) (m en slug o Kg) (Fo en $\frac{lb}{slug}$ o $\frac{N}{Kg}$) para el caso de oscilaciones subamortiguadas, en donde la ecuación diferencial es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f_o\, sen\gamma t$$

que dividiendo entre m resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f_o}{m}\, sen\gamma t$$

que suele escribirse:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = Fo\, sen\,\gamma t \ \rightarrow \boldsymbol{Ec.I}$$

Donde ω es la rapidez angular natural y γ es la rapidez angular de excitación.

Solución:

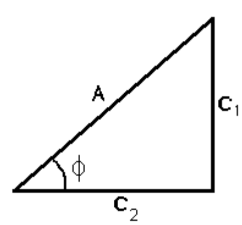
$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$$

$$m_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\ ,\ \ \lambda^2 - \omega^2 < 0 \text{ es subamortiguado}$$

$$m_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i$$

$$X_c = e^{-\lambda t}\left[C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t\right]$$

haciendo:



$$A = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2},\ \ sen\phi = \frac{C_1}{A},\ \ cos\phi = \frac{C_2}{A}, \text{se puede escribir:}$$

$$X_c = Ae^{-\lambda t} sen\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi\right)$$

proponiendo:

$$X_p = k_1 sen\,\gamma t + k_2 cos\gamma t$$

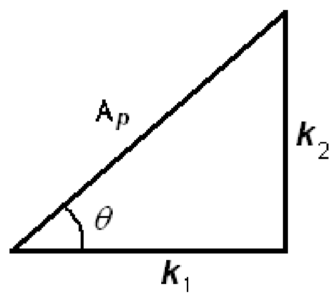
Sustituyendo en ecuación **I** obtenemos:

$$k_1 = \frac{F_o\,(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}; \qquad k_2 = -\frac{F_o\,(2\lambda\gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}$$

con lo que:

$$X_p = F_o\left[\frac{\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}\,sen\,\gamma t + \frac{-\,2\lambda\gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}\,cos\gamma t\right]$$

haciendo:



$$A_p = \sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}$$

Se puede escribir:

$$X_p = \frac{F_o}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}\ sen(\gamma t + \theta)$$

finalmente podemos escribir la solución general:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\lambda t} sen\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\ t + \phi\right)}_{X_c(t) transistorio} + \underbrace{\frac{F_o}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}\ sen(\gamma t + \theta)}_{X_p(t) estacionario}$$

si t es grande $X_c(t)$ es despreciable

$$x(t) \approx X_p(t) = g(\gamma) sen(\gamma t + \theta)$$

donde se define:

$$g(\gamma)=\frac{F_o}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}=\frac{F_o}{\sqrt{(\frac{k}{m}-\gamma^2)^2+\frac{\beta^2}{m^2}\gamma^2}}$$

Por el hecho de que:

$$2\lambda=\frac{\beta}{m}$$

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

haciendo $g'(\gamma)=0$

Se obtiene $\gamma_{critico}=\gamma_1=\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}$

con $g_{máx}(\gamma_1)=\frac{\mathrm{F_o}}{2\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}=\frac{2\mathrm{F_o}\mathrm{m}^2}{\beta\sqrt{4\mathrm{mk}-\beta^2}}$

Sustituyendo valores en:

$$\gamma_1=\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}=\sqrt{\frac{k}{m}-2\left(\frac{\beta^2}{4m^2}\right)}=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\beta^2}{2m^2}\right)}$$

ya que:

$$2\lambda=\frac{\beta}{m}$$

$$4\lambda^2=\frac{\beta^2}{m^2}$$

$$\lambda^2=\frac{\beta^2}{4m^2}$$

resulta:

$$\gamma_1=\sqrt{4-\frac{\beta^2}{2}}$$

además:

$$g(\gamma_1)=\frac{2\mathrm{F_o}m^2}{\beta\sqrt{4mk-\beta^2}}=\frac{2(2)}{\beta[4(4)-\beta^2]^{1/2}}=\frac{4}{\beta[16-\beta^2]^{1/2}}$$

Se puede obtener la siguiente tabla de los valores máximos del acotamiento de amplitud $g(\gamma_1)\ de\ X_p$

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma_1 = \sqrt{4 - \frac{\beta^2}{2}}}$	$\boldsymbol{g(\gamma_1) = \frac{4}{\beta[16 - \beta^2]^{1/2}}}$
2	1.414	0.577
1	1.871	1.033
0.75	1.928	1.357
0.50	1.969	2.016
0.25	1.992	4.007

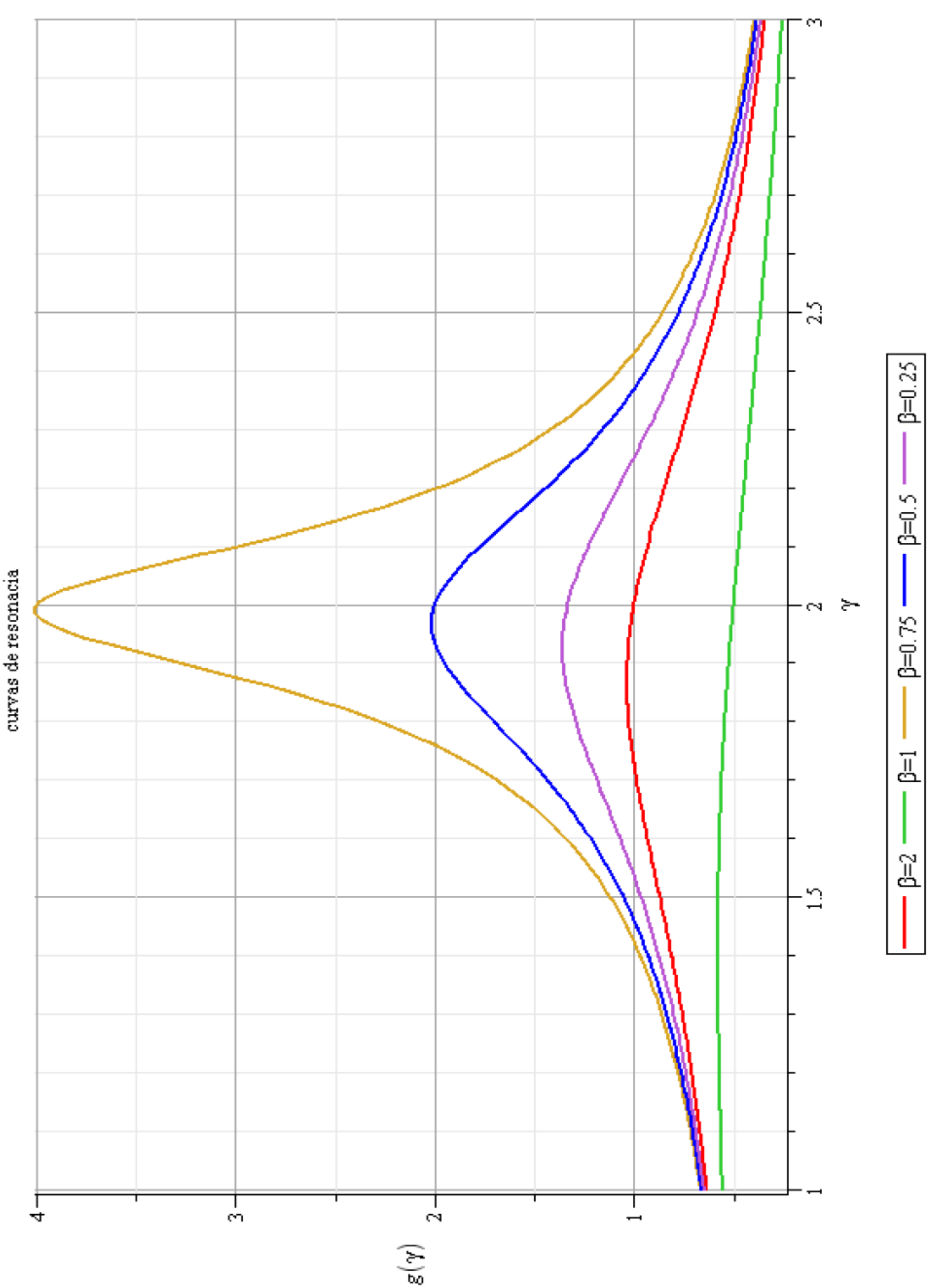
También se puede obtener la siguiente tabla con:

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{4}{1} - \gamma^2)^2 + \frac{\beta^2}{1^2}\gamma^2}} = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + \beta^2\gamma^2}} \rightarrow \boldsymbol{Ec.II}$$

$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\beta = 2}$	$\boldsymbol{\beta = 1}$	$\boldsymbol{\beta = 0.75}$	$\boldsymbol{\beta = 0.50}$	$\boldsymbol{\beta = 0.25}$
1	0.555	0.632	0.647	0.658	0.664
1.5	0.576	0.868	0.961	1.050	1.117
1.414	0.577				
1.871		1.033			
1.928			1.357		
1.969				2.016	
1.992					4.007
2	0.5	1.0	1.33	2.0	4
2.5	0.365	0.595	0.683	0.777	0.856
3	0.256	0.343	0.365	0.383	0.396

Valores máximos

Graficando los datos de la tabla anterior nos queda:


curvas de resonacia
$g(\gamma)$
4
3
2
1
1
1.5
2
2.5
3
γ
β=2
β=1
β=0.75
β=0.5
β=0.25

La figura muestra la gráfica de II para diferentes valores de coeficientes de amortiguación "β". La familia de las curvas se llama "curvas de resonancia" del sistema. Observe el comportamiento de las amplitudes de $g(\gamma)$ cuando $\beta \to 0$, esto es, cuando el sistema se acerca a la resonancia pura.

Observe que esto sucede cuando $\gamma = 2$ o sea cuando $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4}{1} = 4$, $\omega = 2$ o sea cuando $\gamma \doteq \omega = 2$ y la frecuencia natural $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$ es igual o muy próxima a la frecuencia de la excitación $\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$, que es cuando en estructuras es destructiva.