pág 221 Se verifica fácilmente que la diferencia entre los valores de $t_k^*$ sucesivos es tambien $\frac{\pi}{2}$ *. La gráfica de $x(t)$ se presenta en la figura 5.14.

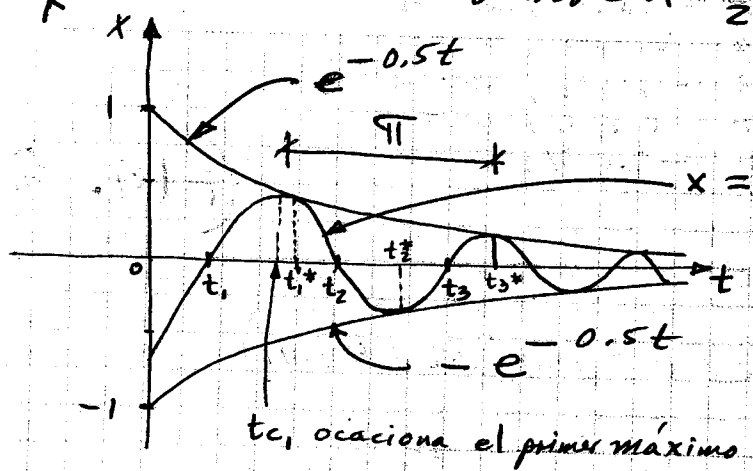



fig. 5.14

Ver Folder Dinámica Juan Carlos Villareal

Ver págs 321, 322 y 323 de Mecánica Técnica

## EJEMPLO 4.

pág 222 Usando (15), se puede escribir la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0,\ x(0) = -2,\ x'(0) = 0,$$

(12) del ejemplo (3) en la forma $x(t) = Ae^{-t}\,\text{sen}(3t+\phi)$ ($\sqrt{\omega^2-\lambda^2}$)

Recordatorios

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\,\text{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t + \phi\right)$$

(14) (15)

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,3t\right)$$

($c_1$, $c_2$)

$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{5}{\frac{1}{2}}$

$\omega^2 = 10$

$2\lambda = \frac{\beta}{m} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$2\lambda = 2$

$\lambda = 1$

$\sqrt{\omega^2-\lambda^2} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$

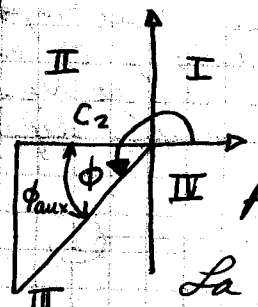
A partir de (14) tenemos que:

$c_1 = -2$, $c_2 = -2/3$ de modo que

$$\sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = A = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{40} = \frac{1}{3}\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 5} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

| | |
|---|---|
| 40 | 2 |
| 20 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$40 = 2^3\cdot 5 = 2\cdot 2^2\cdot 5$




$$\phi_{aux} = \text{ang tan}\left|\frac{c_1}{c_2}\right| = \text{ang tan}\left|\frac{-2}{-2/3}\right| = \text{ang tan}\ 3 = 1.249\ \text{rad.}$$

$$\phi = \pi + \phi_{aux} = \pi + 1.249 = 4.391\ \text{radianes}$$

Por lo tanto

$$x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{10}\,e^{-t}\,\text{sen}(3t + 4.391)$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 5.15. Los valores de $t_k$ y de $t_k^*$ dados en la tabla adjunta son las intersecciones con el eje t y los puntos donde la gráfica de $x(t)$ toca las gráficas de $\pm(2/3)\sqrt{10}\,e^{-t}$, respectivamente. En este ejemplo el cuasiperiodo es $\frac{2\pi}{3}$ segundos ($\sqrt{\omega^2-\lambda^2}$) y por lo tanto la diferencia entre los $t_k$ sucesivos (y los $t_k^*$ sucesivos) es $\pi/3$ unidades.

$3t_k + 4.391 = k\pi$

$t_k = \frac{k\pi - 4.391}{3}$, $k = 2$

$t_k^* = \frac{(2k-1)\pi/2 - \phi}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}} = \frac{(2k-1)\pi/2 - 4.391}{3}$, $k = 2$

$t_2^* = 0.1071$, $t_3^* = 0.1071 + \pi/3 = 1.154$; $t_4^* = 1.154 + \pi/3 = 2.202$ ($\Sigma\pi/3$) $t_5^* = 3.249$, $t_6^* = 4.296$

$t_1 = -0.4165$ $t_2 = 0.6307$, $t_3 = 0.6307 + \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.678$, $t_4 = 1.678 + \frac{\pi}{3} = 2.225$, $t_5 = 2.225 + \pi/3 = 3.772$ ✓ OK.

$t_1^* = -0.9401$

* Nota importante: Los valores de t, para los cuales la gráfica de $x(t)$ toca a las gráficas exponenciales, "no" son los valores para los que la función alcanza sus extremos relativos.

pág 222, 225, 226

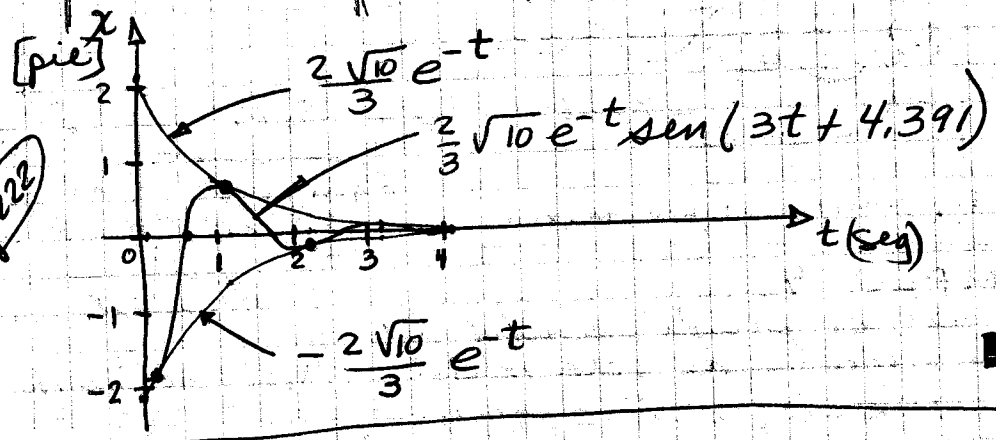
# CAP. 5 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

a)

| K | $t_K$ | K | $t_K^*$ | $x(t_K^*) = \frac{2}{3}\sqrt{10}\,e^{-t}\,\text{sen}(3t + 4.391)$ |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | −0.9401 ← es irrelevante. | |
| 1 | −0.4165 | 2 | 0.1071 | −1.894 ; sen = −1 |
| 2 | 0.6307 | 3 | 1.154 | 0.6649 ; sen = +1 |
| 3 | 1.678 | 4 | 2.202 | −0.2331 ; sen = −1 |
| 4 | 2.725 | 5 | 3.249 | 0.0818 ; sen = +1 |
| 5 | 3.772 | 6 | 4.296 | −0.0287 ; sen = −1 |

(FIG. 5.15)

b) pág 222




pág 222 pendientes bloque ejercicios 5.2

## 5.3 MOVIMIENTO FORZADO.

pág 225

pág 226

"Con Amortiguación"

Supóngase que ahora consideramos además una fuerza exterior $f(t)$ que actúa sobre una masa oscilante sujeta a un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza impulsora que causa un movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte. Véase la figura 5.20. al incluir $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton se obtiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento forzado:

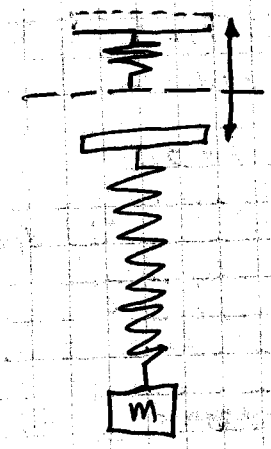



figura 5.20

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t) \quad \text{——— (1)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = +\frac{f(t)}{m} \quad \text{——— (2)}$$

o bien: $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \quad \text{——— (3)}$$

donde $F(t) = \frac{f(t)}{m}$,

como en la sección anterior: $2\lambda = \beta/m$

$\omega^2 = k/m$

Para resolver ésta última ecuación no homogénea se puede usar indistintamente el método de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros.

pág. 226

## EJEMPLO 1.

Interpretar y resolver el problema de valor inicial

$$(4) \quad \overset{m}{\frac{1}{5}}\frac{d^2x}{dt^2} + \overset{\beta}{1.2}\frac{dx}{dt} + \overset{k}{2}x = 5\cos 4t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$$

Solución: Podemos interpretar el problema como una representación de un sistema oscilatorio que consiste de una masa ($m = \frac{1}{5}$ slug o kg) sujeta a un resorte ($k = 2$ lb/pie o N/m). La masa se suelta, a partir del reposo, desde un punto que está ½ unidades (pie o m) por debajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está impulsado por una fuerza periódica externa ($T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 4$) ($T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ seg) a partir del instante $t = 0$. Intuitivamente, se espera que aún con amortiguación el sistema se mantenga en movimiento hasta el momento en que la función forzante "desaparezca", en cuyo caso las amplitudes disminuirán gradualmente. Sin embargo, por la forma en que el problema está dado, $f(t) = 5\cos 4t$ permanecerá "activa" indefinidamente.

Primero se multiplica (4) por 5 y resolvemos la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$m^2 + 6m + 10 = 0$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2}$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = \boxed{-3 \pm i = m_{1,2}}$$

$$x_h(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$$

Utilizando el método de coeficientes indeterminados, supóngase una solución particular de la forma

pág. 227

$x_p(t) = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$. ahora

$x'_p(t) = -4A\operatorname{sen} 4t + 4B\cos 4t$

$x''_p(t) = -16A\cos 4t - 16B\operatorname{sen} 4t$, de modo que

$$\begin{aligned} x''_p + 6x'_p + 10x_p &= -16A\cos 4t - 16B\operatorname{sen} 4t \\ &\quad + 24B\cos 4t - 24A\operatorname{sen} 4t \\ &\quad + 10A\cos 4t + 10B\operatorname{sen} 4t = 25\cos 4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): &\ -6A + 24B = 25 \\ (2): &\ -24A - 6B = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)(-4): &\ 24A - 96B = -100 \\ (2): &\ -24A - 6B = 0 \\ \hline &\ -102B = -100 \end{aligned}$$

$B = \frac{-100}{-102}$, $\boxed{B = \frac{50}{51}}$

$A = -\frac{1}{24}6B = -\frac{1}{24}6\left(\frac{50}{51}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{50}{51}\right) = -\frac{25}{102}$, $\boxed{A = -\frac{25}{102}}$

(10') pág 227

Entonces:

$$\boxed{X(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t.}$$

(5)

si en la ecuación anterior se hace $t=0$, obtenemos que:

$$X(0) = \frac{1}{2} = e^0(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) - \frac{25}{102}\cdot 1 + \frac{50}{51}\cdot 0$$

$$\frac{1}{2} = c_1 - \frac{25}{102}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{25}{102} = \frac{51+25}{102} = \frac{76}{102} = \frac{38}{51}$$

$\boxed{c_1 = \frac{38}{51}}$. Derivando la expresión y haciendo $t=0$ se encuentra además que,

$$X'(t) = e^{-3t}\left(-\frac{38}{51}\operatorname{sen} t + c_2 \cos t\right) - 3e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t + c_2 \operatorname{sen} t\right)$$

$$+ \frac{100}{102}\operatorname{sen} 4t + \frac{200}{51}\cos 4t$$

$$X'(0) = 0 = c_2 - 3\left(\frac{38}{51}\right) + \frac{200}{51}$$

$$\begin{array}{r} -200 \\ +114 \\ \hline -86 \end{array}$$

$$c_2 = \frac{114}{51} - \frac{200}{51} = -\frac{86}{51}$$

$\boxed{c_2 = -\frac{86}{51}}$. Por lo tanto la ecuación de movimiento es:

$$\boxed{X(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t}$$

OK (6)

## TÉRMINOS TRANSITORIO Y DE ESTADO ESTACIONARIO

Nótese que la función complementaria

$$X_h(t) = X_c(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right)$$

en el ejemplo 1 tiene la propiedad de que:

$$\lim_{t\to\infty} X_c(t) = 0 \quad \underline{OK}$$

Puesto que $X_c(t)$ se hace insignificante, (es decir, [illegible] cero) cuando $t \to \infty$, se dice que es un término transitorio.

* transitorio o una solución transitoria

Así, para valores grandes de tiempo, los desplazamientos del peso en el problema anterior se aproximan grandemente por la solución particular $x_p(t)$. Esta última función se llama solución de estado estacionario. Cuando F es una función periódica, tal como

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

o $F(t) = F_0 \cos \gamma t$, la solución general de (3) consiste en:

$$x(t) = \text{respuesta transitoria} + \text{respuesta permanente}$$

---

EJEMPLO 2.

La solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=3$$

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$X_h = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$$

$$X_p = A\cos t + B\operatorname{sen} t$$

$$X_p' = -A\operatorname{sen} t + B\cos t$$

$$X_p'' = -A\cos t - B\operatorname{sen} t$$

$$X_p'' + 2X_p' + 2X_p = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t$$

$$\left\{\begin{array}{l} -A\cos t + -B\operatorname{sen} t \\ +2B\cos t - 2A\operatorname{sen} t \\ +2A\cos t + 2B\operatorname{sen} t \end{array}\right\} = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t$$

$$\begin{array}{l} ①: \{2B + A = 4\} \\ ②: \{+B - 2A = 2\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ①: \quad 2B - A = 4 \\ ②(2): \quad -2B + 4A = -4 \\ \hline \quad +3A = 0 \end{array}$$

$$\boxed{A=0}$$

$$B = +2 + 2A = +2 + 2(0)$$

$$\boxed{B=2}$$

$$X_p = 2\operatorname{sen} t$$

Sol. gral:

$$X = X_h + X_p$$

$$X = e^{-t}(c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + 2\operatorname{sen} t$$

$$x(0) = 0 = c_1 + 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$x = e^{-t} c_2 \operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} t$$

$$x' = c_2(e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t) + 2\cos t$$

$$x'(0) = 3 = c_2(1 - 0) + 2$$

$$c_2 = 1$$

$$\boxed{X = \underbrace{e^{-t}\operatorname{sen} t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\operatorname{sen} t}_{\text{permanente}}}$$

$$\cancel{X_p = -\frac{8}{5}\operatorname{sen} t + \frac{6}{5}\operatorname{sen} t}$$

$$\cancel{\text{Sol. Gral} \quad X = X_h + X_p}$$

$$\cancel{X = e^{-t}(c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{8}{5}\cos t + \frac{6}{5}\operatorname{sen} t}$$

$$\cancel{x(0) = 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 - \frac{8}{5}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{8}{5}}}$$

$$\cancel{X = e^{-t}\left(\frac{8}{5}\cos t + c_2 \operatorname{sen} t\right) - \frac{8}{5}\cos t + \frac{6}{5}\operatorname{sen} t}$$

$$\cancel{X' = e^{-t}\left(-\frac{8}{5}\operatorname{sen} t + c_2\cos t\right) + \frac{8}{5}\operatorname{sen} t + \frac{6}{5}\cos(t)}$$

$$\cancel{x'(0) = 3 = c_2 \cdot 1 + \frac{6}{5}}$$

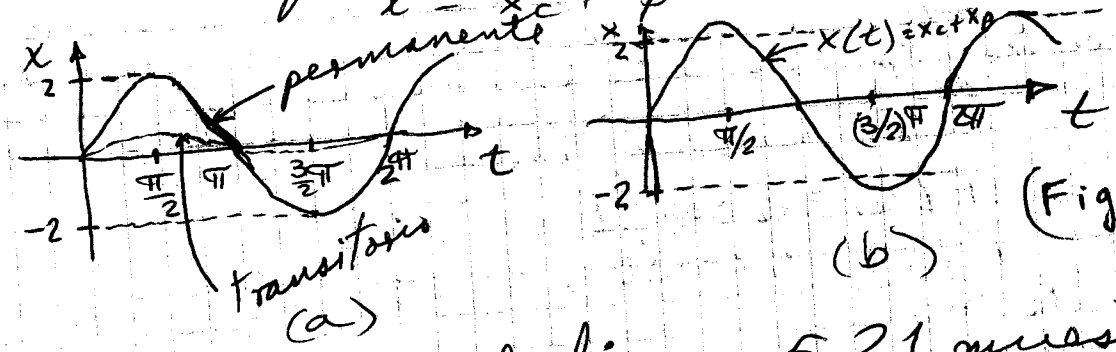
$$\cancel{c_2 = -\frac{6}{5} + 3 = -\frac{6}{5} + \frac{15}{5} = \frac{9}{5}}$$

$$\cancel{\boxed{c_2 = \frac{9}{5}}}$$

$$\cancel{\boxed{X = e^{-t}\left(\frac{8}{5}\cos t + \frac{9}{5}\operatorname{sen} t\right) - \frac{8}{5}\cos t + \frac{6}{5}\operatorname{sen} t}}$$

Se puede ver fácilmente que es

$$x = x_c + x_p = e^{-t}\operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} t$$




(Fig. 5.21)

Un exámen de la figura 5.21 muestra que, en este caso, el efecto del término transitorio en la solución es insignificante alrededor de $t > 2\pi$.

## SIN AMORTIGUACIÓN.

En ausencia de una fuerza de amortiguación, no habrá término transitorio en la solución de un problema. Además, veremos que la aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana, o igual, a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un problema serio en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

## EJEMPLO 3.

Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}\gamma t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$$

donde $F_0$ es una constante.

Solución: La función complementaria

$$m^2 + \omega^2 = 0$$
$$m^2 = -\omega^2$$
$$m = \pm \omega i$$

$x_c(t) = x_h(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t$. Para obtener una solución particular supóngase $x_p(t) = A\cos\gamma t + B\operatorname{sen}\gamma t$, de modo que:

$$x_p' = -A\gamma \operatorname{sen}\gamma t + B\gamma\cos\gamma t$$
$$x_p'' = -A\gamma^2\cos\gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen}\gamma t$$

pág 228

$$x''_p + \omega^2 x_p = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

$$-A\gamma^2 \cos\gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen}\gamma t + \omega^2(A\cos\gamma t + B\operatorname{sen}\gamma t) = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

$$(A\omega^2 - A\gamma^2)\cos\gamma t + (B\omega^2 - B\gamma^2)\operatorname{sen}\gamma t = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

$$A(\omega^2-\gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2-\gamma^2)\operatorname{sen}\gamma t = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

de donde se deduce que

$$A(\omega^2-\gamma^2) = 0 \;, \quad B(\omega^2-\gamma^2) = F_0 \;, \text{ así:}$$

$$\boxed{A = 0} \;, \quad B = \frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2} \;; \; (\gamma \neq \omega)$$

pág 229

Por lo tanto

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t$$

aplicando las condiciones iniciales dadas a la solución general

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t + \frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t$$

se llega a

$$x(0) = 0 = c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0 + 0 \quad \therefore \boxed{c_1 = 0}$$

$$x'(t) = -c_1\omega\operatorname{sen}\omega t + c_2\omega\cos\omega t + \frac{F_0\gamma}{\omega^2-\gamma^2}\cos\gamma t$$

$$x'(0) = 0 = -c_1\cdot 0 + c_2\omega\cdot 1 + \frac{F_0\gamma}{\omega^2-\gamma^2}\cdot 1$$

$$0 = c_2\omega + \frac{F_0\gamma}{\omega^2-\gamma^2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\omega}\left(-\frac{F_0\gamma}{\omega^2-\gamma^2}\right)$$

$$\boxed{c_2 = -\frac{F_0\gamma}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}}$$ . así, la solución es

$$x(t) = \frac{-F_0\gamma}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}\operatorname{sen}\omega t + \frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}\left(-\gamma\operatorname{sen}\omega t + \omega\operatorname{sen}\gamma t\right), \; \gamma \neq \omega} \quad (8)$$

## RESONANCIA PURA.

Aunque la ecuación (8) no está definida para $\gamma = \omega$, es interesante observar que el valor del límite cuando $\gamma \to \omega$ se puede obtener utilizando la regla de L'Hôpital. Este proceso al límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza impulsora ($\gamma/2\pi$) con la frecuencia de las oscilaciones libres ($\omega/2\pi$).

(12) pág. 229, 230 **CAP. 5** APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

pág 229 De manera intuitiva, se espera que después de un tiempo debe poderse aumentar sustancialmente las amplitudes de oscilación*. La solución para $\gamma = \omega$ se define como

$$x(t) = \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen}\omega t + \omega \operatorname{sen}\gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}$$

$$= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}(-\gamma \operatorname{sen}\omega t + \omega \operatorname{sen}\gamma t)}{\frac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega\gamma^2)}$$

$$= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{-\operatorname{sen}\omega t + \omega t \cos\gamma t}{-2\omega\gamma}$$

$$= F_0 \frac{-\operatorname{sen}\omega t + \omega t \cos\omega t}{-2\omega^2}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos\omega t} \quad \text{Resonancia Pura.} \quad (9)$$

tal como pensabamos, cuando $t \to \infty$ los desplazamientos se hacen grandes; de hecho

$$|x(t_n)| \to \infty, \text{ cuando } t_n = \frac{n\pi}{\omega}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

El fenómeno se conoce como resonancia pura. La gráfica de la figura 5.22 muestra un movimiento típico correspondiente a este caso.

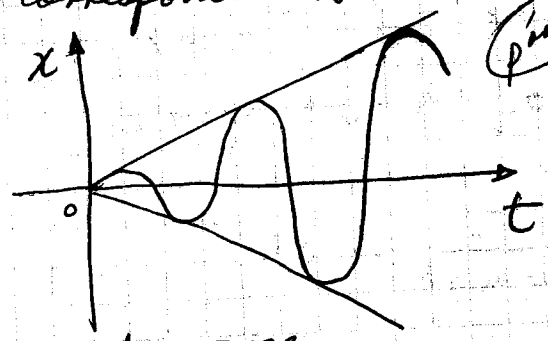



fig. 5.22

pág 230 Para concluir, debe notarse que en realidad no es necesario usar un proceso al límite en (8) para obtener la solución correspondiente a $\gamma = \omega$. La ecuación (9) se deduce también resolviendo el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}\omega t, \; x(0) = 0, \; x'(0) = 0$$

directamente por los métodos convencionales.

$x_h = c_1 \operatorname{sen}\omega t + c_2 \cos\omega t$

$x_p = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$

$x'_p = -A\omega \operatorname{sen}\omega t + B\omega\cos\omega t$

$x''_p = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$

$x''_p + \omega^2 x_p = F_0 \operatorname{sen}\omega t$

$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2 \operatorname{sen}\omega t + \omega^2(A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t) = F_0 \operatorname{sen}\omega t$

$A\omega^2(\cos\omega t - \cos\omega t) + B\omega^2(-\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\omega t) = F_0 \operatorname{sen}\omega t$ no

$x_p = At\cos\omega t + Bt\operatorname{sen}\omega t$

* Ejemplo autobús sin amortiguadores, baches espaciados a igual distancia, pasajeros brincando sincronizadamente (no hay techo) el autobús

* se volcará

$$\boxed{X_p = At\cos\omega t + Bt\,\text{sen}\,\omega t}$$

$$X'_p = A\left[t(-\omega\,\text{sen}\,\omega t) + \cos\omega t\right] + B\left[t(\omega\cos\omega t) + \text{sen}\,\omega t\right]$$

$$X'_p = A\left[-\omega t\,\text{sen}\,\omega t + \cos\omega t\right] + B\left[\omega t\cos\omega t + \text{sen}\,\omega t\right]$$

$$\boxed{X'_p = -A\omega t\,\text{sen}\,\omega t + A\cos\omega t + B\omega t\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t}$$

$$X''_p = -A\omega\left[t\omega\cos\omega t + \text{sen}\,\omega t\right] - A\omega\,\text{sen}\,\omega t$$
$$+ B\omega\left[t(-\omega\,\text{sen}\,\omega t) + \cos\omega t\right] + B\omega\cos\omega t$$

$$X''_p = -A\omega^2 t\cos\omega t - A\omega\,\text{sen}\,\omega t - A\omega\,\text{sen}\,\omega t$$
$$- B\omega^2 t\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$X''_p = -A\omega^2 t\cos\omega t - 2A\omega\,\text{sen}\,\omega t - B\omega^2 t\,\text{sen}\,\omega t + 2B\omega\cos\omega t$$

$$X''_p = \omega^2 t(-A\cos\omega t - B\,\text{sen}\,\omega t) + 2\omega(-A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t)$$

$$X''_p + \omega^2 X_p = F_0\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\omega^2 t(-A\cos\omega t - B\,\text{sen}\,\omega t) + 2\omega(-A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t) + \omega^2 t(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t) = F_0\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\begin{pmatrix} -A\omega^2 t\cos\omega t - B\omega^2 t\,\text{sen}\,\omega t \\ +2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\,\text{sen}\,\omega t \\ +A\omega^2 t\cos\omega t + B\omega^2 t\,\text{sen}\,\omega t \end{pmatrix} = F_0\,\text{sen}\,\omega t$$

$$(\cancel{-A\omega^2 t} + 2B\omega + \cancel{A\omega^2 t})\cos\omega t + (\cancel{-B\omega^2 t} - 2A\omega + \cancel{B\omega^2 t})\,\text{sen}\,\omega t = F_0\,\text{sen}\,\omega t$$

$$2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\,\text{sen}\,\omega t = F_0\,\text{sen}\,\omega t$$

$$2B\omega = 0 \quad \boxed{B = 0} \qquad \Big| \qquad -2A\omega = F_0 \quad \boxed{A = -\frac{F_0}{2\omega}}$$

$$X_p = -\frac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t$$

Gral: $X = X_h + X_p$

$$\boxed{X = c_1\,\text{sen}\,\omega t + c_2\cos\omega t - \frac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t}$$

$$x(0) = 0 = c_1\cdot 0 + c_2\cdot 1 - 0 \quad \therefore \boxed{c_2 = 0}$$

$$X = c_1\,\text{sen}\,\omega t - \frac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t$$

$$X' = c_1\omega\cos\omega t - \frac{F_0}{2\omega}\left[-\omega t\,\text{sen}\,\omega t + \cos\omega t\right]$$

$$X'(0) = 0 = c_1\omega\cdot 1 - \frac{F_0}{2\omega}(1)$$

$$c_1\omega = \frac{F_0}{2\omega}\ ;\ c_1 = \frac{F_0}{2\omega^2}$$

$\therefore$

$$\boxed{X(t) = \frac{F_0}{2\omega^2}\,\text{sen}\,\omega t - \frac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t}$$

✓ OK. 9

por los métodos convencionales.

Resonancia pura ✓ OK.

(225/226)

13' pág. 230

CAP. 5 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

CURVA DE RESONANCIA.

En el caso de oscilaciones subamortiguadas, la solución general de la ecuación diferencial

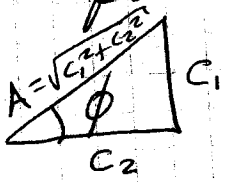
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}\gamma t \quad (10)$$

puede mostrarse que es:

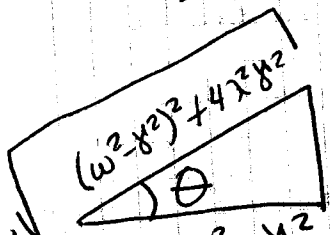
$$X(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}\operatorname{sen}(\gamma t+\theta) \quad (11)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$ y los ángulos de fase $\phi$ y $\theta$ están definidos, respectivamente, por

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A}$$




$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \cos\theta = \frac{\omega^2-\gamma^2}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$




$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$$

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2-4(1)\omega^2}}{2(1)} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-\omega^2}$$

$\lambda^2-\omega^2 < 0$ es subamortiguado

$$m = -\lambda \pm \sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,i$$

$$X_h = e^{-\lambda t}\left(c_1\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right)$$

$$A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$$

$$X_h = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t + \phi\right), \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A}$$

$$X_p = K_1\operatorname{sen}\gamma t + K_2\cos\gamma t \quad *$$

$$X_p' = K_1\gamma\cos\gamma t - K_2\gamma\operatorname{sen}\gamma t$$

$$* \; X_p = K_1\gamma\cos\gamma t - K_2\gamma\operatorname{sen}\gamma t$$

$$X_p'' = -K_1\gamma^2\operatorname{sen}\gamma t - K_2\gamma^2\cos\gamma t$$

$$x_p'' + 2\lambda x_p' + \omega^2 x_p = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

$$\left[\begin{array}{l} -K_1\gamma^2 \operatorname{sen}\gamma t - K_2\gamma^2\cos\gamma t \\ +2\lambda(K_1\gamma\cos\gamma t - K_2\gamma\operatorname{sen}\gamma t) \\ +\omega^2(K_1\operatorname{sen}\gamma t + K_2\cos\gamma t)\end{array}\right] = F_0\operatorname{sen}\gamma t$$

$$\left[\begin{array}{ll} -K_1\gamma^2\operatorname{sen}\gamma t & -K_2\gamma^2\cos\gamma t \\ -2K_2\lambda\gamma\operatorname{sen}\gamma t & +2K_1\lambda\gamma\cos\gamma t \\ +K_1\omega^2\operatorname{sen}\gamma t & +K_2\omega^2\cos\gamma t\end{array}\right] = F_0\operatorname{sen}\gamma t$$

$$(-K_1\gamma^2 - 2K_2\lambda\gamma + K_1\omega^2)\operatorname{sen}\gamma t + (-K_2\gamma^2 + 2K_1\lambda\gamma + K_2\omega^2)\cos\gamma t = F_0\operatorname{sen}\gamma t$$

$$-K_1\gamma^2 - 2K_2\lambda\gamma + K_1\omega^2 = F_0 \quad ; \quad -K_2\gamma^2 + 2K_1\lambda\gamma + K_2\omega^2 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\omega^2-\gamma^2)K_1 - 2K_2\lambda\gamma = F_0 \\ (2\lambda\gamma)K_1 + (\omega^2-\gamma^2)K_2 = 0\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{ll}(\omega^2-\gamma^2)K_1 - (2\lambda\gamma)K_2 = F_0 & :① \\ (2\lambda\gamma)K_1 + (\omega^2-\gamma^2)K_2 = 0 & :②\end{array}\right.$$

$$① (2\lambda\gamma): \quad \cancel{(\omega^2-\gamma^2)(2\lambda\gamma)K_1} - (2\lambda\gamma)^2K_2 = F_0(2\lambda\gamma)$$

$$② [-(\omega^2-\gamma^2)]: \quad \cancel{-(\omega^2-\gamma^2)(2\lambda\gamma)K_1} - (\omega^2-\gamma^2)^2K_2 = 0$$

$$-(2\lambda\gamma)^2K_2 - (\omega^2-\gamma^2)^2K_2 = F_0(2\lambda\gamma)$$

$$K_2\{-[(2\lambda\gamma)^2 + (\omega^2-\gamma^2)^2]\} = F_0(2\lambda\gamma)$$

$$K_2 = -\frac{F_0(2\lambda\gamma)}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}$$

$$① (\omega^2-\gamma^2): \quad (\omega^2-\gamma^2)^2K_1 - \cancel{(\omega^2-\gamma^2)(2\lambda\gamma)} = F_0(\omega^2-\gamma^2)$$

$$② (2\lambda\gamma): \quad (2\lambda\gamma)^2K_1 + \cancel{(\omega^2-\gamma^2)(2\lambda\gamma)} = 0$$

$$[(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]K_1 = F_0(\omega^2-\gamma^2)$$

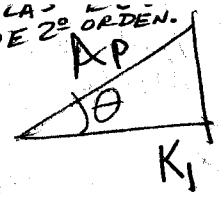
$$K_1 = \frac{F_0(\omega^2-\gamma^2)}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}$$

$$x_p = \frac{(\omega^2-\gamma^2)}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}F_0\operatorname{sen}\gamma t + \frac{-2\lambda\gamma}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}F_0\cos\gamma t$$

$$x_p = F_0\left[\frac{\omega^2-\gamma^2}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}\operatorname{sen}\gamma t + \frac{-2\lambda\gamma}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}\cos\gamma t\right]$$

14' pág 230

$$A_p = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$




$K_2$

si $K_2$ quedó vertical fué por que

$X_p = K_1 \operatorname{sen} \gamma t + K_2 \cos \gamma t$

si hubiera puesto $X_p = K_1 \cos \gamma t + K_2 \operatorname{sen} \gamma t$ el triangulo $\triangle$ θ $K_1$ $K_2$ pero no problem

$$\sqrt{\left(\frac{\omega^2-\gamma^2}{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda\gamma}{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}\right)^2}$$

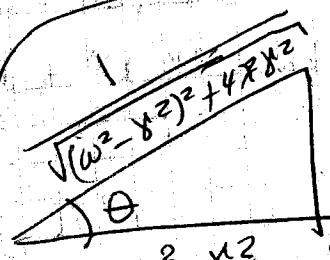
$$= \sqrt{\frac{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}{\left[(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2\right]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$

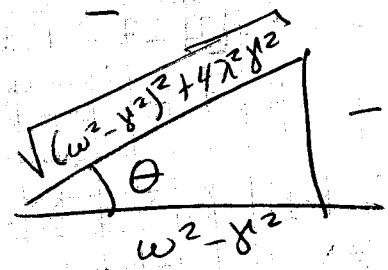
$$X_p = F_0 A_p \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)$$

$$X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)$$




, mult por el denom. $(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2$

=




$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\omega^2-\gamma^2}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$

finalmente

$$\boxed{X(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+\phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}\operatorname{sen}(\gamma t+\theta)}$$

OK

todo bien

OK

# EJEMPLO 4

La inspección de (11)

$$\boxed{x(t) = \underbrace{Ae^{-\lambda t}\,\text{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+\phi\right)}_{\substack{x_c(t)\\ \text{Transitorio}}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}\,\text{sen}(\gamma t+\theta)}_{\substack{x_p(t)\\ \text{estacionario.}}}} \quad (11)$$

muestra que $x_c(t)$ es transitorio cuando se presenta amortiguación, y por lo tanto para valores grandes de tiempo la solución se aproxima muy cercanamente por la solución de estado estacionario

$$x_p(t) = g(\gamma)\,\text{sen}(\gamma t+\theta), \text{ donde se define}$$

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}} \quad (12)$$

Aunque la amplitud de $x_p$ está acotada a medida que $t\to\infty$, se puede demostrar con facilidad que las oscilaciones máximas se presentarán en el valor

$$\gamma_1 = \sqrt{\omega^2-2\lambda^2} \qquad \text{(Véase problema 11)}$$

demostración:

$$g(\gamma) = F_0\left[(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2\right]^{-1/2}$$

$$g'(\gamma) = F_0\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2\right]^{-3/2}\left\{2(\omega^2-\gamma^2)(-2\gamma) + 8\lambda^2\gamma\right\} = 0$$

$$-\frac{F_0}{2}\,\frac{\left\{2(\omega^2-\gamma^2)(-2\gamma)+8\lambda^2\gamma\right\}}{\left[(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2\right]^{3/2}} = 0$$

$$2(\omega^2-\gamma^2)(-2\gamma)+8\lambda^2\gamma = 0$$

$$8\lambda^2\gamma = 4\gamma(\omega^2-\gamma^2)$$

$$2\lambda^2 = (\omega^2-\gamma^2)$$

$$\gamma^2 = \omega^2-2\lambda^2$$

$$\boxed{\gamma_1 = \sqrt{\omega^2-2\lambda^2}}$$

OK

Probl. 11) a) Demuestre que $g(\gamma)$ dada en (13) del ejemplo 4 tiene un (debe ser (12)) valor máximo en $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2-2\lambda^2}$

[Sugerencia: Derive con respecto a $\gamma$]

b) ¿Cuál es el máximo valor de $g(\gamma)$ en resonancia?

Así, cuando la frecuencia de la fuerza externa es $\frac{\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}}{2\pi}$, se dice que el sistema se encuentra en "resonancia".

OK

15'

pág 230

CAP. 5 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

b) $g(\gamma)_{máx} = ?$ $\quad \gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \quad (12)$$

en términos de $\omega, \lambda, \gamma$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \left(\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}\right)^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma_1^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - (\omega^2-2\lambda^2)\right)^2 + 4\lambda^2\gamma_1^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\sqrt{(\cancel{\omega^2} - \cancel{\omega^2} + 2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\gamma_1^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\sqrt{(2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\gamma_1^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2\gamma_1^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^2(\lambda^2+\gamma_1^2)}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\lambda^2+\gamma_1^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\lambda^2+(\sqrt{\omega^2-2\lambda^2})^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\lambda^2+\omega^2-2\lambda^2}} = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}$$

en términos de $\lambda, \omega$

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}$$

$$4\lambda^2 = \frac{\beta^2}{m^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{\beta^2}{4m^2}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

en términos de $\beta, k$ y $m$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{4mk-\beta^2}{4m^2}}}$$

$$g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\frac{\beta}{m}\,\frac{1}{2m}\sqrt{4mk-\beta^2}}$$

$$\boxed{g(\gamma_1) = \frac{2F_0 m^2}{\beta\sqrt{4mk-\beta^2}}}$$

si $F_0 = 2$, $K = 4$, $m = 1$

$$g(\gamma_1) = \frac{2(2)(1)^2}{0.25\sqrt{4(1)(4) - 0.25^2}}$$

$= 4.007$ OK ✓

$$g(\gamma_1) = \frac{4}{\beta\sqrt{16-\beta^2}}$$

OK

$\boxed{g(\gamma_1) = \frac{F_0}{\quad}}$ en términos de $\lambda, \omega$ → ✓ OK con libro pág 591

en general en términos de $\gamma, \beta, k$ y $m$ ⇨ (12):

pág. 230

$$\boxed{g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \gamma^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\gamma^2}}}$$

En el caso específico en que $k=4$, $m=1$, $F_0=2$, $g(\gamma)$ se convierte en:

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{4}{1} - \gamma^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{(1)^2}\gamma^2}}$$

$$\boxed{g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2 + \beta^2\gamma^2}}} \quad (13)$$

pág. 231

| $\beta$ | $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{\beta^2}{4m^2}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}} = \sqrt{4 - \frac{\beta^2}{2}}$ |
|---|---|
| 2 | 1.414 |
| 1 | 1.871 |
| 0.75 | 1.928 |
| 0.50 | 1.969 |
| 0.25 | 1.992 |

✓ OK

Son los máximos

| $\sqrt{16-\beta^2}$ = ↓ $g(\gamma_1)$ |
|---|
| 0.577 |
| 1.033 |
| 1.357 |
| 2.016 |
| 4.007 |

← b) →

| $\gamma$ | $\beta=2$: $g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+4\gamma^2}}$ | $\beta=1$: $g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+\gamma^2}}$ | $\beta=0.75$: $g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+0.75^2\gamma^2}}$ | $\beta=0.50$: $g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+0.5^2\gamma^2}}$ | $\beta=0.25$: $g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+0.25^2\gamma^2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.555 | 0.632 | 0.647 | 0.658 | 0.664 |
| 1.5 | 0.576 | 0.868 | 0.961 | 1.050 | 1.117 |
| 1.414 | 0.577 | $\gamma=1.871$ 1.033 | $\gamma=1.928$ 1.357 | $\gamma=1.969$ 2.016 | $\gamma=1.992$ 4.007 |
| 2.5 | 0.365 | 0.595 | 0.683 | 0.777 | 0.856 |
| 3 | 0.256 | 0.343 | 0.365 | 0.383 | 0.396 |

← b) →

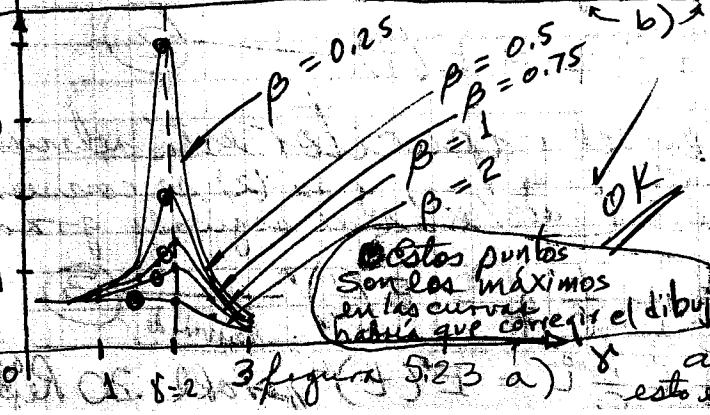



figura 5.23 a)

La figura 5.23 a) muestra la gráfica de (13) para diferentes valores de coeficientes de amortiguación "$\beta$". La familia de curvas se llama "curvas de resonancia" del sistema. Observe el comportamiento de las amplitudes de $g(\gamma)$ cuando $\beta \to 0$, esto es, cuando el sistema se acerca a la resonancia pura.

Resumen bloque de preguntas Nº 5.3 pág 233

(16') pág. 235, 236 CAP. 5 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN.

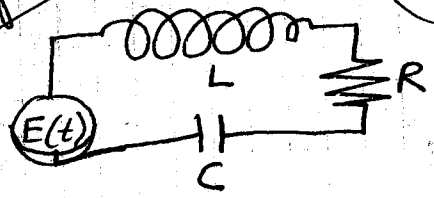
# 5.4. CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y OTROS SISTEMAS ANÁLOGOS.

pág 235 "CIRCUITOS R-L-C CONECTADOS EN SERIE".

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, gran cantidad de sistemas físicos pueden describirse por medio de una ecuación diferencial lineal de segundo orden similar a la ecuación diferencial del movimiento forzado con amortiguación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=f(t). \quad (1)$$

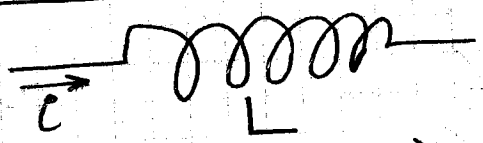
pág 236




a)

Inductor
Inductancia L: henrys (h)
caída de voltaje:
$L\frac{di}{dt}$

Resistor
Resistencia R: ohms ($\Omega$)
caída de voltaje:
$iR$



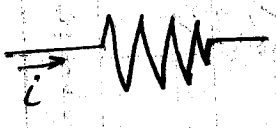
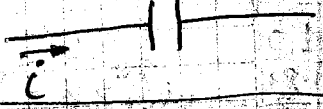




Figura 5.28

b)

Capacitor
Capacitancia C: farads (f)
caída de voltaje:
$\frac{1}{C}q$




Si $i(t)$ representa la corriente en el "circuito eléctrico R-L-C en serie" mostrado en la figura 5.28 a), entonces la caída de voltaje a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia se muestra en la figura 5.28 (b). Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, la suma de esos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ suministrado al circuito, esto es,

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t) \quad (2)$$

Pero la carga $q(t)$ en el capacitor está relacionada con la corriente $i(t)$ mediante $i=\frac{dq}{dt}$, y así (2) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo grado

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t) \quad (3)$$

también: $L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=E'(t)$ derivada de prob. 20 Repaso