Mecánica

29 de abril 2020

Cinemática de la partícula. Movimiento rectilíneo.

Si bien, el movimiento re una partícula en el espacio se puede representar por medio del vector canónico:

$$P(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

En algunas ocasiones es posible reducir el análisis del movimiento, por ejemplo, cuando se trata de un movimiento rectilíneo. Analizando en un movimiento rectilíneo que coincide solamente con el eje x la posición quedará, considerando que en dirección i es positivo:

$$P(t) = x(t)$$

Se puede observar que solamente se analiza la componente en dirección i, mientras que las otras dos componentes no se representan.

De esta forma, al derivar la posición se obtiene a la velocidad.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Y al derivar a la velocidad se obtiene a la aceleración.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ejercicio 1

Determine las ecuaciones de movimiento de una partícula se mueve de acuerdo con la expresión

$$x = 16.1t^2 + 25t + 6$$

Donde x está en ft y t está en segundos.

Solución

$$x = 16.1t^2 + 25t + 6\ [ft]$$

$$v = 32.2t + 25\ \left[\frac{ft}{s}\right]$$

$$a = 32.2\ \left[\frac{ft}{s^2}\right]$$

(*Existen las derivadas de orden superior

$$\frac{d^3x}{dt^3} = j = jerk\ o\ sobreaceleración$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = Sanp$$

$$\frac{d^5x}{dt^5} = pop$$

$$\frac{d^6x}{dt^6} = crack$$

Pero su uso en la mecánica clásica no resulta útil

*)

Ejercicio 2

Para la partícula del movimiento anterior determine cuándo (t) llega a las siguientes posiciones
a) 50 ft b) 0 ft

La pregunta cuando nos aclara que lo que buscamos es el tiempo cuando se presentan las condiciones descritas.

Si

$$x = 16.1t^2 + 25t + 6\ [ft]$$

a)

Considerando que la posición sean 50 ft

$$50 = 16.1t^2 + 25t + 6$$

$$16.1t^2 + 25t - 44 = 0$$

$$t1 = 1.051\ [s]$$

$$t2 = -2.61$$

b)

Considerando que la posición sean 0 ft

$$16.1t^2 + 25t + 6 = 0$$

$$t1 = -0.29$$

$$t2 = -1.256$$

En ambos casos se encuentran dos posibles soluciones. Habrá que evaluar cuál de las soluciones es físicamente posible. Por ejemplo, si se considerará que el cuerpo llegara a una posición de 50 ft por detrás del origen

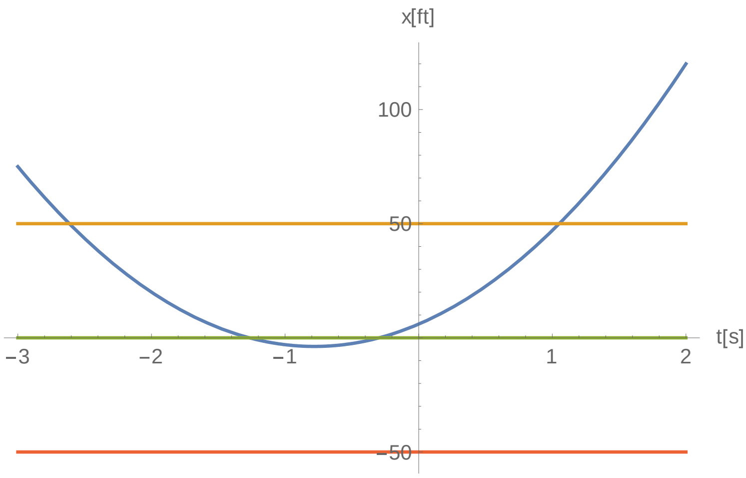
c) el tiempo en que la posición es de -50 ft

$$16.1t^2 + 25t + 6 = -50$$

$$16.1t^2 + 25t + 56 = 0$$

$$t1 = -0.7763 + 1.6957i$$

$$t2 = -0.7763 - 1.6957i$$



La solución encontrada no podría ser, pues la partícula nunca pasa por ese punto. También se tiene que considerar cuándo es que inicia el movimiento, pues no podría ser que el movimiento exista antes de empezar. De esta forma, si el movimiento inició cuando el cronómetro se encendió, los tiempos negativos no tendrían sentido. Siempre revise que la solución matemática corresponda con la realidad física.

Ejercicio 3

Determine, para la partícula del ejercicio anterior cuál será la posición dónde la partícula llegue a una velocidad de 100 ft/s en sentido positivo del eje x.

Ante la pregunta dónde, esto quiere decir que se esta buscando la posición en la que se representan las condiciones descritas.

Solución:

Considerando ahora a la ecuación de velocidad:

$$100 = 32.2\, t3 + 25 \left[\frac{ft}{s}\right]$$

Entonces, la ecuación de posición se debe cumplir para ese instante.

$$x = 16.1\, t3^2 + 25\, t3 + 6\, [ft]$$

Al despejar y resolver tanto el tiempo como la posición

$$t3 = \frac{100 - 25}{32.2} = 2.3291[s]$$

Sustituyendo en la ecuación de posición

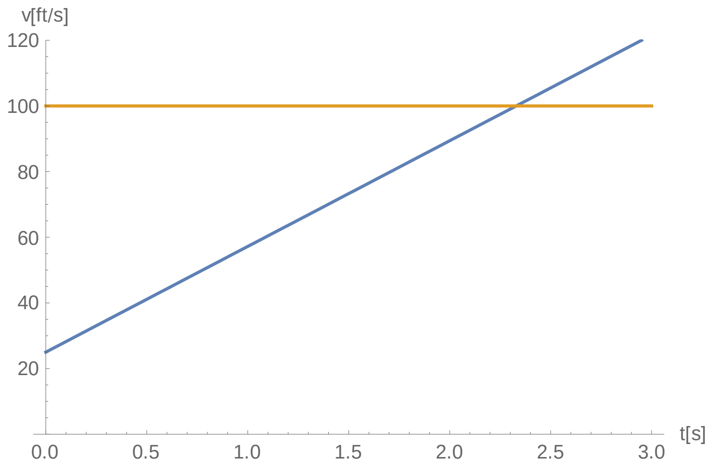
$$x = 16.1\,(2.3291)^2 + 25\,(2.3291) + 6$$

$$x = 151.5745\, [ft]$$

Resultados

$$t3 = 2.33[s]$$

$$x = 151.6\, [ft]$$



Desplazamiento y Distancia total recorrida

Aún estando en cuarentena sin permiso para salir de la casa, un alumno toma el vehículo familiar y se va Cuernavaca y regresa. Para que no se den cuenta en su casa de la salida, llena nuevamente el tanque de gasolina y lava muy bien el coche. En la tarde le llaman la atención, y le preguntan qué fue a hacer a Cuernavaca. ¿cómo se dieron cuenta?

Al iniciar el viaje se encontraba en la misma posición que la final del recorrido, con lo que su velocidad promedio fue nula. Para saber la distancia total recorrida es necesario saber cuál es la posición inicial, cuál es la posición final y saber si se detiene dentro del intervalo del recorrido. Cada que se detiene, se delimita un intervalo para calcular el desplazamiento.

Ejercicio 4

Un automóvil va sobre una trayectoria rectilínea de acuerdo con la ecuación

$$x = -0.2t^{2} + 30t$$

Donde x está en metros y t en segundos. Determine el desplazamiento en el intervalo de [0, 150] segundos.

Cuando nos preguntan el desplazamiento, basta con conseguir la posición inicial y la posición final.

$$xi = -0.2(0)^2 + 30(0) = 0$$

$$xf = -0.2(150)^2 + 30(150) = 0$$

$$\Delta x = xf - xi = 0$$

Determine el desplazamiento para el intervalo de [0,100] segundos

$$xi = -0.2(0)^2 + 30(0) = 0$$

$$xf = -0.2(100)^2 + 30(100) = 1000\ [m]$$

$$\Delta x = xf - xi = 1000 - 0 = 1000[m]$$

Para la distancia total recorrida se propone el intervalo (ej [0,150]) y dentro del intervalo se buscan los tiempos en los que el cuerpo se detiene. Encontrando la ecuación de velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.4t + 30\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Si la velocidad es nula, el cuerpo se detiene

$$0 = -0.4t + 30$$

Despejando

$$t1 = \frac{-30}{-0.4} = 75[s]$$

Con esto se definen dos nuevos intervalos, del tiempo inicial hasta que se detiene, y así sucesivamente hasta terminar el intervalo de observación. Para este caso se dividió en dos intervalos: [0,75] y [75,150]

Calculando cada uno de los desplazamientos

$$x(0) = 0\ [m]$$

$$x(75) = = -0.2(75)^2 + 30(75) = 1125\ [m]$$

Al calcular el primer desplazamiento

$$\Delta x1 = x(75) - x(0) = 1125 - 0 = 1125[m]$$

Para el otro desplazamiento

$$x(75) = = -0.2(75)^2 + 30(75) = 1125\ [m]$$

$$x(150) = 0[m]$$

$$\Delta x2 = x(150) - x(75) = 0 - 1125 = -1125\ [m]$$

Para el desplazamiento total se suman los desplazamientos parciales

$$\Sigma\Delta x = \Delta x1 + \Delta x2 = 0$$

Entonces, el desplazamiento total fue nulo, pues el automóvil se encontró en la misma posición inicial que final. Pero esto no representa cuanto fue la distancia total recorrida

Para obtener la distancia total recorrida, se ocupa el valor absoluto de los desplazamientos parciales

$$Distancia_{Tot} = \Sigma|\Delta x| = |\Delta x1| + |\Delta x2| = 2250\ [m]$$

¿Cómo se relacionan las variables de posición, velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo?

Para llegar de la posición a la velocidad se necesito conocer cómo era el cambio instantáneo al tiempo, y la operación que nos dio esta relación fue la derivada. De la misma forma, para llegar a la aceleración es necesario derivar a la velocidad. Para poder realizar el camino inverso, se requiere de una operación inversa a la derivada, y esto corresponde a la integración

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[d, bend right=60, "\frac{d}{dt}"'] \\
v(t) \arrow[u, bend right=60, "\int v(t)dt"'] \arrow[d, bend right=60, "\frac{d}{dt}"'] \\
a(t) \arrow[u, bend right=60, "\int a(t)dt"'] \arrow[d, bend right=60, "\frac{d}{dt}"'] \\
j(t) \arrow[u, bend right=60, "\int j(t)dt"']
\end{tikzcd}$$

Utilizando la aproximación de segregación de variables que se utiliza en las ecuaciones diferenciales

Si se tiene una aceleración función del tiempo

$$\frac{d\,v}{dt} = a(t)$$

Separando variables

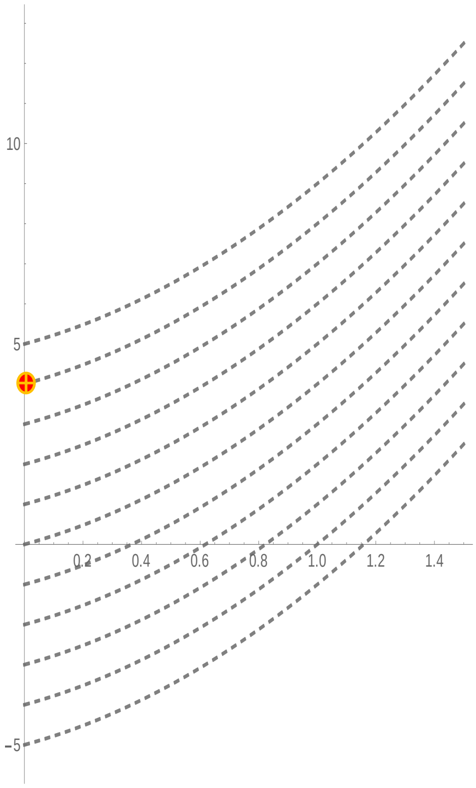
$$d\,v = a(t)dt$$

E integrando

$$\int d\,v = \int a(t)dt$$

$$v = \int a(t)dt + C$$

Se encuentra la solución general o la familia de soluciones. La solución general se refiere a que esta solución, con cualquier constante, puede resolver la ecuación diferencial. Por familia de soluciones entenderemos a todas las diferentes curvas que pueden trazarse con la constante libre. De todas las posibles soluciones buscamos una en particular, aquella que cumpla con un punto de sincronización entre la velocidad y el tiempo



Para encontrar la solución particular se necesita un punto de sincronización entre la velocidad y el tiempo. Estos datos se sustituyen en la solución general, para encontrar cual es el valor de la constante.

Otra forma de resolver este ejercicio es por medio de una integral definida, pero que el limite de integración superior sea variable. En el limite inferior se colocará la información del valor de frontera conocido, mientras que en limite superior se dejara a la variable libre de tomar cualquier valor.

Si se tiene una aceleración función del tiempo

$$\frac{d\,v}{dt} = a(t)$$

Separando variables

$$d\,v = a(t)dt$$

E integrando definidamente

$$\int_{vi}^{v} d\,v = \int_{ti}^{t} a(t)dt$$

$$v - vi = \int_{ti}^{t} a(t)dt$$

Despejando

$$v = \int_{ti}^{t} a(t)dt + vi$$

Donde queda la velocidad en función del tiempo

Para la posición, de manera análoga se tiene:

Si se conoce la función de velocidad en función del tiempo

$$\frac{d\,x}{dt} = v(t)$$

Separando variables

$$d\,x = v(t)dt$$

E integrando

$$\int d\,x = \int v(t)dt$$

$$x = \int v(t)dt + C2$$

Cuidado, se trata de otra constante de integración que depende de las condiciones de frontera del problema, tanto posición como tiempo sincronizados.