UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Á L G E B R A

FUNDAMENTOS DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

GUSTAVO BALMORI NEGRETE

Giuseppe Peano

Este científico matemático nació en Cuneo Italia, el 27 de agosto de 1858.

Cursó sus estudios en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Turín, donde más tarde ocupó el puesto de profesor de Cálculo.

Investigó en diferentes áreas de la Ciencias Exactas y de la Lógica Matemática.

Es conocido por sus trabajos:

- Formulario de Lógica Matemática.
- Principios de Lógica Matemática.
- El Concepto de Número.
- Principios de Aritmética.
- Teoría de Conjuntos. Espacios Vectoriales.

Murió en Turín Italia, el 20 de abril de 1932.

PROBLEMA 01

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

P(1): $1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 \equiv 1$ Sólo es un sumando

P(k): $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ *H I M*

P(k+1): $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ *tesis*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{k} + (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall\, n\geq 1$$

P(1): $1^2=\dfrac{1(2)(3)}{6}$ *sólo es un sumando* $\Rightarrow\ 1\equiv 1$

P(k): $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ H I M

Por demostrar (tesis) P(k+1):

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Demostración a partir de la HIM

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+\boldsymbol{(k+1)^2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\boldsymbol{(k+1)^2}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\ \left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\ \left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\ \left(2k^2+7k+6\right)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall\, n\geq 1$$

P(1): $$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$$ Sólo es un sumando $\Rightarrow$ $1\equiv 1$

P(k): $$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ H I M

Por demostrar (tesis) P(k+1):

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Demostración a partir de la HIM

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(\boldsymbol{k+1})^{\boldsymbol{3}}=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(\boldsymbol{k+1})^{\boldsymbol{3}}$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{k^{2}\left(k+1\right)^{2} + 4\left(k+1\right)^{3}}{4}$$

$$= \frac{\left(k+1\right)^{2}\left(k^{2} + 4\left(k+1\right)\right)}{4}$$

$$= \frac{\left(k+1\right)^{2}\left(k^{2} + 4k + 4\right)}{4}$$

$$1^{3}+2^{3}+3^{3}+\ldots+k^{3}+\left(k+1\right)^{3} = \frac{\left(k+1\right)^{2}\left(k+2\right)^{2}}{4}$$

$$2^{n} > 100$$

P(1): $2^1 > 100$ Falso

P(2): $2^2 > 100$ Falso

P(3): $2^3 > 100$ Falso

P(4): $2^4 > 100$ Falso

P(5): $2^5 > 100$ Falso

P(6): $2^6 > 100$ Falso

P(7): $2^7 > 100$ Verdad

$128 > 100$

$n \geq 7$

P(k): $2^k > 100$ HIM

Por demostrar, tesis P(k+1):

$2^{k+1} > 100$

A partir de la HIM

$\boldsymbol{(2)}\, 2^{k} > \boldsymbol{(2)}\, 100$

$2^{k+1} > 200$

$2 > 1$

$200 > 100$

$2^{k+1} > 200 > 100$

$2^{k+1} > 100$

Se verifica para todo $n \geq 7$

3 es factor de $n^3 - n + 3$

$n \geq 1$

P(1): $1^3 - 1 + 3 = 3$ verdadero

P(k): $k^3 - k + 3$ tiene al 3 como factor. HIM

Por demostrar P(k+1): tesis

3 es factor de $(k + 1)^3 - (k + 1) + 3$

Demostración a partir de la tesis:

$(\underline{k^3} + 3k^2 + 3k + 1) - (\underline{k} + 1) + \underline{3}$

$\underline{K^3 - k + 3} + 3k^2 + 3k$

$\underline{(k^3 - k + 3)} + 3(k^2 + k)$; (HIM) + factor de 3

9 es factor de $10^{n+1} + 3(10^{n}) + 5$ $\quad \forall\, n \geq 1$

PROBLEMA 06

$P(1)$: $10^{1+1} + 3(10^{1}) + 5 = 135$; $\quad 135 = 15 \times 9$

$P(k)$: $10^{k+1} + 3(10^{k}) + 5$ tiene al 9 como factor. H I M

Por demostrar, tesis: $P(k+1)$:

9 es factor de $10^{k+2} + 3(10^{k+1}) + 5$

Demostración a partir de la tesis:

$$10(10^{k+1}) + 10(3)(10^{k}) + 5$$

$$(\underline{1} + 9)(10^{k+1}) + (\underline{1} + 9)(3)(10^{k}) + \underline{5}$$

$$\underline{10^{k+1} + 3(10^{k}) + 5} + 9(10^{k+1}) + 9(3)10^{k}$$

$$\underline{(10^{k+1} + 3(10^{k}) + 5)} + 9(10^{k+1} + (3)10^{k})\text{; (HIM) + factor de}$$

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\dots+(-1)^n=\frac{(-1)^n-1}{2}$$

$$P(1):\quad sólo\, es\, un\, sumando\quad (-1)^1=\frac{(-1)^1-1}{2}$$

$$-1\equiv-1$$

$$P(k):\ (-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\dots+(-1)^k=\frac{(-1)^k-1}{2}\quad HIM$$

$$Por\ demostrar\quad (tesis)\ P\left(k+1\right):$$

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\dots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}-1}{2}$$

Demostración a partir de H I M

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\dots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^k-1}{2}+(-1)^{k+1}$$

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^k-1}{2}+\frac{2(-1)^{k+1}}{2}$$

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^k-1+2(-1)^{k+1}}{2}$$

$$=\frac{(-1)^k(1)+2(-1)^{k+1}-1}{2}$$

$$=\frac{(-1)^k(1+2(-1))-1}{2}$$

$$=\frac{(-1)^k(-1)-1}{2}$$

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}-1}{2}$$

$$1+\frac{1}{7^{1}}+\frac{1}{7^{2}}+\frac{1}{7^{3}}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{n}}\right)$$

P(1): $1=\frac{7}{6}\left(\frac{6}{7}\right)$ *sólo es un sumando* $\Rightarrow$ $1\equiv 1$

P(k): $$1+\frac{1}{7^{1}}+\frac{1}{7^{2}}+\frac{1}{7^{3}}+\ldots+\frac{1}{7^{k-1}}=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{k}}\right)$$ HIM

Por demostrar, tesis, P(k+1):

$$1+\frac{1}{7^{1}}+\frac{1}{7^{2}}+\frac{1}{7^{3}}+\ldots+\frac{1}{7^{k-1}}+\frac{1}{7^{k}}=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{k+1}}\right)$$

Demostración a partir de la HIM:

$$1+\frac{1}{7^{1}}+\frac{1}{7^{2}}+\frac{1}{7^{3}}+\ldots+\frac{1}{7^{k-1}}+\boldsymbol{\frac{1}{7^{k}}}=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{k}}\right)+\boldsymbol{\frac{1}{7^{k}}}$$

$$=\frac{7}{6}\left(\frac{7^{k}-1}{7^{k}}\right)+\frac{6}{6}\left(\frac{1}{7^{k}}\right)$$

$$=\frac{7^{k+1}-7+6}{6\left(7^{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{7^{k+1}-1}{7^{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{7^{k+1} - 1}{7^{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{7^{k+1}}{7^{k}} - \frac{1}{7^{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(7 - \frac{1}{7^{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(7 - \left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{7}}\right)\frac{1}{7^{k}}\right)$$

$$1 + \frac{1}{7^{1}} + \frac{1}{7^{2}} + \frac{1}{7^{3}} + \ldots + \frac{1}{7^{k-1}} + \frac{1}{7^{k}} = \frac{7}{6}\left(1 - \frac{1}{7^{k+1}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \qquad \forall \geq 2$$

P(2): $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ *sólo son dos sumandos* HIM

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}+1>2$$

$$\sqrt{2}>1$$ Elevando al cuadrado

$$2>1$$ Se verifica la H I M

Continua PROBLEMA 09

P(k): $$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$ ① HIM

P(k+1): $$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$ ② Tesis

Demostración:

Proposición ② - ①

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$1 > \sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

$$1 > (k+1) - \sqrt{k(k+1)}$$

$$0 > k-\sqrt{k^2+k}$$

$$\sqrt{k^2+k} > k$$ Elevando al cuadrado

$$k^2+k > k^2$$

$$k > 0$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n} \qquad n\geq 2$$

$$P(2):\ \left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ \ \text{sólo es un factor}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\equiv\frac{1}{2}$$

$$P(k):\ \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k} \quad HIM$$

Por demostrar: P(k+1). Tesis

$$P(k+1):\ \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$$

Tesis

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$$

Demostración a partir de la HIM

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$$