

Termodinámica II: difusión térmica.

Versión 2.1

Héctor Cruz Ramírez¹
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
¹hector.cruz@ciencias.unam.mx

septiembre 2017

Índice

1. Introducción y objetivos de la práctica	1
2. Teoría	2
3. Experimento	3
4. Pormenores de la práctica	4
5. Agradecimientos	4
A. Diferenciación numérica	4
A.1. Discretización de una función	5
A.2. Derivada discreta	6
A.3. La segunda derivada discreta	6
A.4. Resolviendo la ecuación diferencial	7
B. Automatización con <i>ARDUINO</i>	7
C. Automatización con tarjeta de adquisición de datos	7

1. Introducción y objetivos de la práctica

Un sistema cuando no tiene una temperatura homogénea existe un flujo de calor desde la zona con temperatura elevada a la zona con menor temperatura. Existen tres mecanismos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación[1].

En los sólidos no se produce transferencia de calor por convección y es despreciable la contribución mediante radiación; por lo cual, la transferencia de calor por conducción es la que sólo contribuye[1].

La ley que describe el flujo de calor por conducción es la *Ley de Fourier*. A partir de la ley de Fourier se obtiene la *ecuación de difusión del calor*, con la cual podemos obtener la *distribución de temperaturas*, $T = T(x, y, z, t)$, en el sistema de estudio[1]. El objetivo de la práctica (**Primer objetivo**) es medir la distribución de temperaturas (caso de una dimensión y estado estacionario, $T = T(x)$) para un sistema con dos diferentes condiciones de frontera. El sistema lo formara una barra de cobre (o aluminio), ver Figura (1). La primera condición de frontera es que un extremo de la barra se mantiene a la temperatura ambiente, T_A , y el otro extremo a una temperatura mayor, T_H (con $T_H > T_A$), ver Figura (1). Con esta condición la distribución de temperaturas en el estado estacionario es lineal[1, 2]. La segunda condición de frontera es mantener un extremo a temperatura ambiente, T_A , y el otro extremo a una temperatura oscilante en el tiempo alrededor de una cierta temperatura T_0 , ver figura (1). En este caso la distribución de temperaturas en cada punto de la barra oscilara en el tiempo, pero la amplitud disminuirá conforme nos acerquemos al otro extremo (la que se encuentra a T_A)[2].

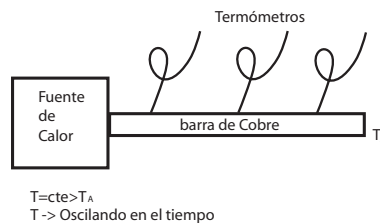


Figura 1: Arreglo experimental para determinar la distribución de temperaturas en una barra de cobre bajo las dos condiciones de frontera.

También, como objetivo de la práctica (**Segundo objetivo**), el alumno realizará un simulación numérica con la ayuda del profesor. Se recomienda utilizar el programa de MatLab. En el Apéndice A se da la herramientas matemáticas necesarias para realizar dichas simulaciones.

2. Teoría

Para determinar la **ecuación de difusión del calor** se necesitan los siguientes conceptos. El Primer paso es entender **la primera ley de la termodinámica** (PLT). Si etiquetamos como σ el sistema de estudio y τ a sus alrededores, tenemos que la PLT establece que los cambios de la **energía interna** (U_σ) son determinados por las transferencias de **energía mecánica** ($W_{\sigma \rightarrow \tau}$) y de **energía térmica** (esta última forma de transferir energía se llama **calor**, $Q_{\sigma \rightarrow \tau}$) [3]. Esto es

$$\frac{d}{dt}U_\sigma = \frac{d}{dt}W_{\sigma \rightarrow \tau} + \frac{d}{dt}Q_{\sigma \rightarrow \tau}, \quad (1)$$

donde hemos supuesto que U_σ , $W_{\sigma \rightarrow \tau}$ y $Q_{\sigma \rightarrow \tau}$ son funciones de la posición y del tiempo (**hipótesis de localidad**).

El segundo elemento importante se toma de la termodinámica clásica ($dQ = dU = mcdT$), que establece (no considerando $W_{\sigma \rightarrow \tau}$)[1, 3]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q_{\sigma \rightarrow \tau} &= \frac{d}{dt}U_\sigma \\ &= \int_V dV \rho c \frac{\partial}{\partial t}T_\sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

donde ρ es la densidad σ y c su capacidad calorífica.

La ley que modela el **flujo de calor** por conducción es la **ley de Fourier**:

flujo \propto gradiente de temperatura,

$$\begin{aligned} \vec{q} &= -k\nabla T_\sigma \quad (3D), \\ q &= -k \frac{\partial}{\partial x} T_\sigma \quad (1D) \end{aligned} \quad (3)$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica, el cual puede depender de la temperatura.

El concepto de flujo es análogo al flujo hidrodinámico. Esto es si consideramos nuestro sistema como un río y nos fijamos en una porción de él, entonces el cambio de la cantidad de agua es determinada por la cantidad de agua que sale o entra (flujo negativo y flujo positivo respectivamente) más lo que salga de una fuente y se consuma en un sumidero. Un análisis similar se hace con el cambio en el tiempo del calor. Si consideramos que no hay fuentes o sumideros y no consideramos el trabajo mecánico, tenemos que la **ecuación de difusión** de calor es (en 1D)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_\sigma = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}T_\sigma, \quad (4)$$

donde $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ es la difusividad térmica del material.

3. Experimento

El primer paso será proponer una barra de algún material. La barra tendrá que cumplir, de forma aproximada las condiciones impuestas en la teoría; además, deberá alcanzar el estado estacionario rápidamente (el alumno deberá proponer una prueba rápida para comprobar esta condición.) El segundo paso será la

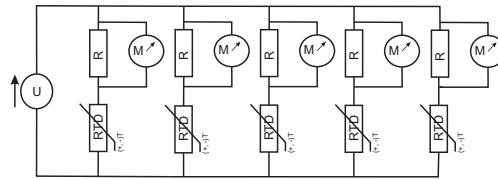


Figura 2: Circuito propuesto para conectar 5 termistores con una sola fuente de alimentación, U . RTD es el termistor; R la resistencia auxiliar; M son los multímetros o las entradas de la tarjeta de adquisición de datos o las entradas analógicas del *ARDUINO*.

implementación varios termómetros con termistores, lo cual consiste en diseñar un circuito para medir la temperatura a través de la diferencia de potencial. Si tenemos N termistores, tendremos N canales donde se debe medir la diferencia de potencial (y por lo tanto, la temperatura). Esos canales deben ser medidos con una tarjeta de adquisición de datos o un *ARDUINO*. En la Figura (2) se muestra el diagrama del circuito para conectar 5 termistores. El tercer paso será automatizar el experimento con LabVIEW. Para el caso de que se use un *ARDUINO* ver Apéndice B, y para el caso que se use una tarjeta de adquisición de datos ver Apéndice C. El cuarto y último paso será realizar el experimento desde un tiempo inicial hasta que la barra alcance el estado estacionario. El alumno deberá colocar los termistores a lo largo de la barra y equidistantes, ver Figura (1).

Paralelamente el alumno deberá realizar simulaciones numéricas. Utilizando la teoría en el Apéndice A para resolver la Ecuación 4.

4. Pormenores de la práctica

Cantidad de sesiones en el laboratorio: 3 sesiones.

5. Agradecimientos

Estas notas fueron realizadas con el apoyo de los proyectos PAPIME PE106415 (version 1) y PAPIME PE105917 (version 2). Agradecemos a los estudiante Jorge Arturo Monroy Ruz y Francisco Javier Morelos Medina por su colaboración en la elaboración de estas notas.

A. Diferenciación numérica

Supongamos que tenemos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con la regla de correspondencia $x \mapsto f(x)$. Experimentalmente y numéricamente los valores que toma la función son discretos (no continuos); entonces debemos discretizar la función f .

A.1. Discretización de una función

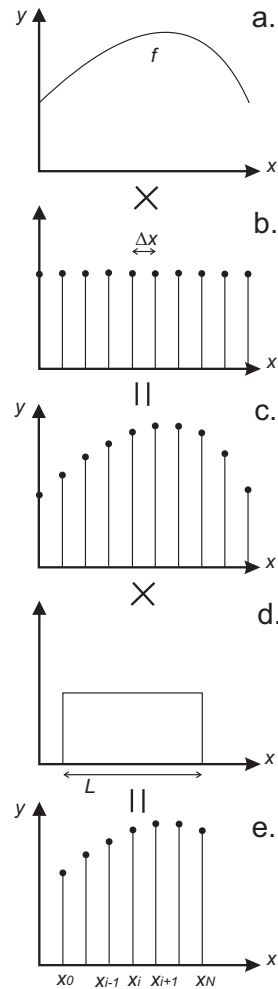


Figura 3: Discretización de una función y la derivada discreta de la misma.

Como primer paso, debemos multiplicar a f por una función *peine*. La función peine es una serie de deltas de Dirac separadas por Δx y representa la serie de mediciones que podemos hacer. En la Figura (3 a) se muestra la gráfica de la función f y en la Figura (3 b) se muestra la función *peine*. El producto de la función f por la función *peine* se muestra en la Figura (3 c). El resultado es una serie de puntos a lo largo de la función f . Como la serie en principio es infinita, entonces debemos multiplicarla por una función *rectángulo*, la cual se muestra en la Figura (3 d). La función *rectángulo* representa el hecho de que sólo podemos hacer una medición finita y el ancho de esta función es L . El resultado

se muestra en la Figura (3 e), el cual es un cantidad finita de puntos ($N + 1$ puntos) a lo largo de la función f , esto es

$$\{(x_i, f_i) | i = 0, 1, \dots, N\}, \quad (5)$$

con esto hemos discretizado la función f .

A.2. Derivada discreta

Para obtener la derivada de la representación discreta de f , Ecuación (5), en el punto (x_i, f_i) , podemos proceder de tres formas distintas [4]. La primera de ellas es utilizar el punto siguiente (x_{i+1}, f_{i+1}) , con lo cual obtenemos *la derivada hacia adelante* y esta dada por

$$\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}. \quad (6)$$

Claramente en el punto (x_N, f_N) no podremos obtener la derivada. La segunda forma es utilizar el punto anterior (x_{i-1}, f_{i-1}) , con lo cual obtenemos *la derivada hacia atrás* y esta dada por

$$\nabla f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}, \quad (7)$$

y de forma similar en el punto (x_0, f_0) no podremos obtener la derivada. La tercera forma es *la derivada central* y que no describiremos aquí.

A.3. La segunda derivada discreta

Procederemos obtener la segunda derivada. Primero obtenemos la primera derivada mediante la Ecuación (9). De esta forma obtenemos *la derivada hacia adelante* de los puntos $\{(x_i, f_i) | i = 0, 1, \dots, N - 1\}$ y la cual es

$$\{(x_i, \Delta f_i) | i = 0, 1, \dots, N\}. \quad (8)$$

Luego, aplicando *la derivada hacia atrás* a los puntos dados en la Ecuación (8), tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \Delta f_i &= \frac{\Delta f_i - \Delta f_{i-1}}{\Delta x} \\ &= \frac{(f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1})}{\Delta x^2} \\ &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Realizando esta combinación quedan excluidos los puntos (x_0, f_0) y (x_N, f_N) , y la razón se verá mas adelante cuando apliquemos las condiciones en la frontera.

A.4. Resolviendo la ecuación diferencial

Lo siguiente es resolver la Ecuación (4). Primero haremos: $T_\sigma = T(x, t)$, para simplificar la notación. De forma análoga discretizamos esta función, lo cual obtenemos

$$\{(x_i, t_j, f_i^j) | i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}, \quad (10)$$

donde el subíndice es para la coordenada espacial y el superíndice para la coordenada temporal. La condición en la frontera sería

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_H \quad \text{y} \\ T(L, t) &= T_A \quad \text{para todo } t, \end{aligned} \quad (11)$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} T_0^j &= T_H \quad \text{y} \\ T_N^j &= T_A \quad \text{para todo } j. \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, aplicando lo anterior tendremos

$$\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t}. \quad (13)$$

La programación es iniciando una arreglo en el tiempo $t = 0$, el cual es

$$\{(x_0, 0, T_H) \quad \text{y} \quad (x_i, 0, T_A) | i = 1, \dots, N\}, \quad (14)$$

y después se calcula para tiempos posteriores utilizando la Ecuación (13).

B. Automatización con *ARDUINO*

Para el caso de que se use un *ARDUINO* en la Figura (4) se muestra el panel de control, y en las Figuras (5) y (6) los diagramas de bloques que muestran la programación correspondiente.

C. Automatización con tarjeta de adquisición de datos

Para el caso de que se use una tarjeta de adquisición de datos en la Figura (7) se muestra el panel de control, y en las Figuras (8) y (9) los diagramas de bloques que muestran la programación correspondiente.

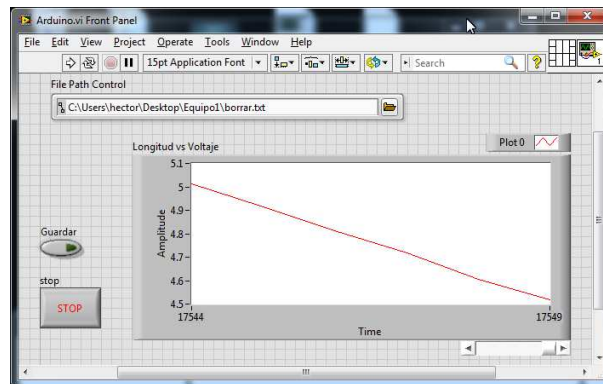


Figura 4: Panel de control para automatizar 5 termistores con un *ARDUINO*.

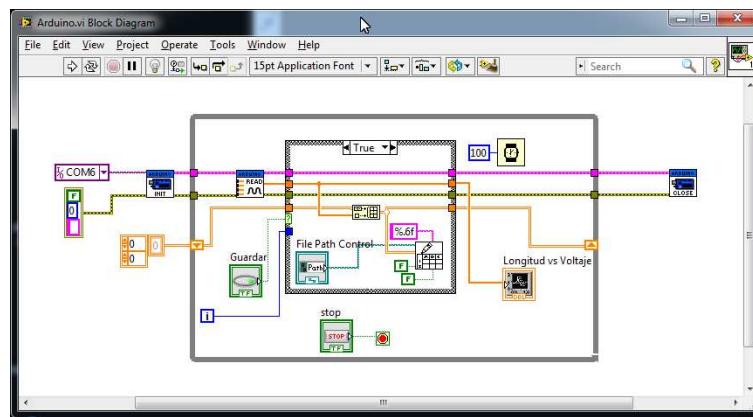


Figura 5: Diagrama de bloques (caso verdadero) para automatizar 5 termistores con un *ARDUINO*.

Para configurar la tarjeta de adquisición de datos ((DAQ) por sus siglas en inglés de *Data Acquisition*) se usará el *DAQ assistant* mediante los siguientes instrucciones, ver Figura (10):

1. Debe estar instalados los *drivers* de la *DAQ*. Insertar el *DAQ assistant* que se encuentra en `\functions \Measurement I/O \DAQ mx - Data Acquisitions` en el diagram de bloques. El icono de *DAQ assistant* esta etiquetado con la letra A en la Figura (10); y el icono que se visualiza en el diagrama de bloques se indica con la B.
2. Cuando se inserta el *DAQ assistant* en el diagrama de bloques se abre una nueva ventana. En esta se escoge el tipo de medición de se va a realizar. En este caso se debe elegir `\Acquire Signals \Analog Input \Voltage` ver etiqueta C en la Figura (10).

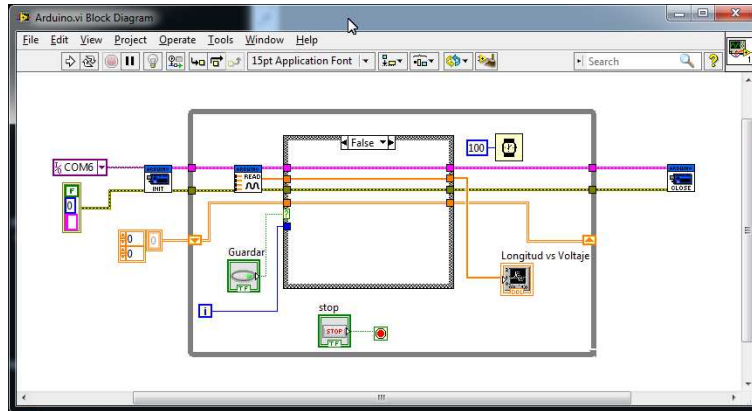


Figura 6: Diagrama de bloques (caso falso) para automatizar 5 termistores con un *ARDUINO*.

3. Cuando se selecciona el tipo de medición, apretando el botón *NEXT* se abre una nueva ventana. En esta ventana se debe elegir el canal compatible con la medición. En este ejemplo se puede elegir *ai0*. Ver recuadro D en la Figura (10).
4. Seleccionado el canal se abre una tercera ventana donde se configura el modo de adquisición de datos. En menú indicado con E de la Figura (10) se puede agregar más canales con la opción +. En este caso se agregaron 4 canales. En el menú indicado con F se selecciona el modo de adquisición de datos, y para este ejemplo se selecciona *1 sample (On Demand)*. Las opciones G se indica que tipo de entrada se espera. En este caso Volts en un rango de -10 V a 10 V. Los menús indicados con H se dejan los valores por default.
5. Seleccionando el menú indicado con I se abre una ventana donde se ven las instrucciones de conexión de cada canal.

Referencias

- [1] J. H. Lienhard IV y J. H. Lienhard V, "A heat transfer textbook," Phlogiston press, 2008.
- [2] A. Bodas, V. Gandía y E. López-Baeza, "An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves," *Am. J. Phys.* **66** (1998).
- [3] L. García-Colín, "Introducción a la termodinámica clásica," Trillas, 1995.
- [4] Shoichiro Nakarumra, "Métodos Numéricos Aplicados con Software," Prentice Hall, 1992.

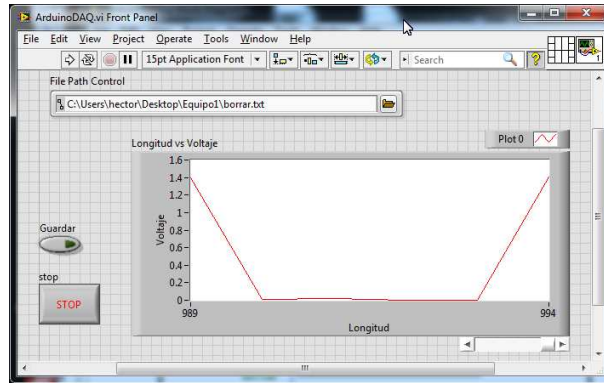


Figura 7: Panel de control para automatizar 5 termistores con una tarjeta de adquisición de datos.

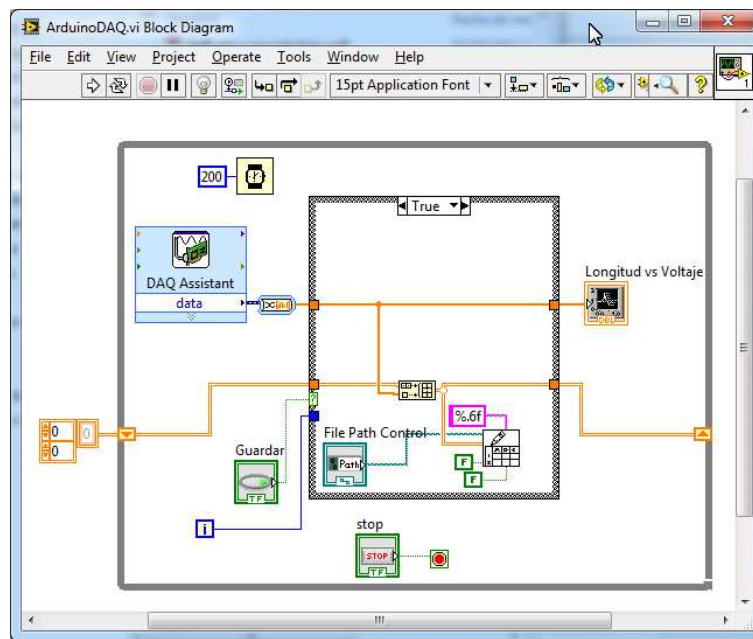


Figura 8: Diagrama de bloques (caso verdadero) para automatizar 5 termistores con una tarjeta de adquisición de datos.

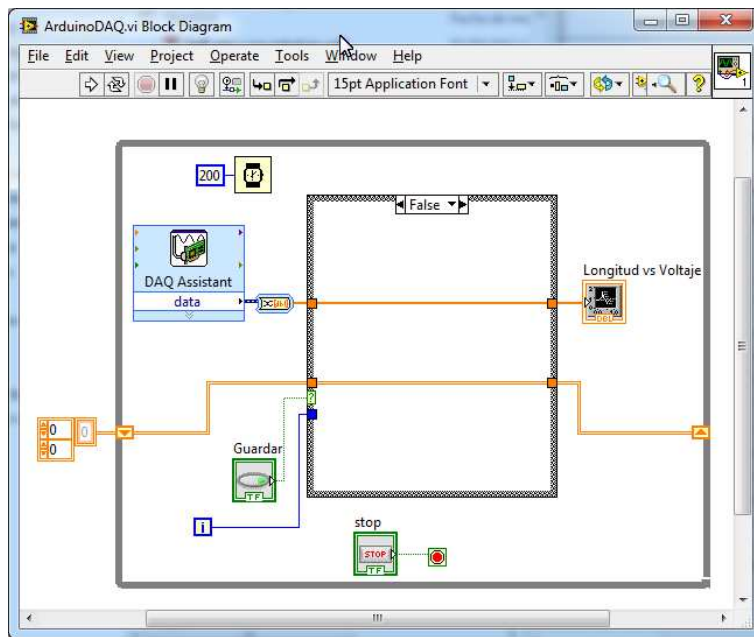


Figura 9: Diagrama de bloques (caso falso) para automatizar 5 termistores con una tarjeta de adquisición de datos.

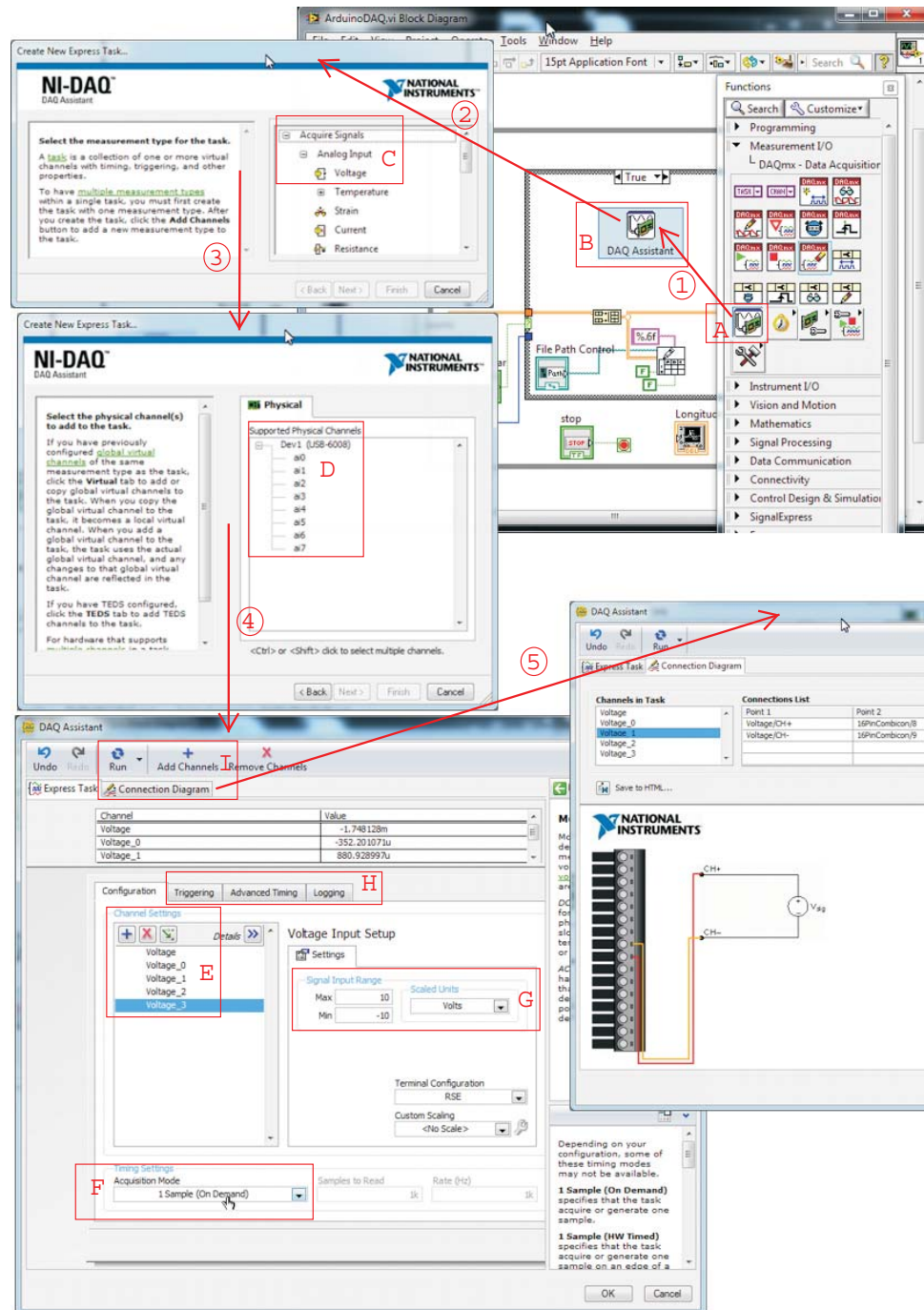


Figura 10: Pasos para configurar la tarjeta de adquisición de datos.