

Óptica de Fourier I: transformada de Fourier.

Versión 2.0

Héctor Cruz Ramírez¹
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
¹hector.cruz@ciencias.unam.mx

septiembre 2017

Índice

1. Objetivos	1
2. Teoría	2
2.1. Propagación libre	2
2.2. Propagación en elementos ópticos	3
2.3. Arreglo $f - f$	4
3. Experimento	4
4. Simulación numérica	5
5. Pormenores de la práctica	6
6. Agradecimientos	6

1. Objetivos

Los objetivos de la práctica son los siguientes:

1. Implementar un arreglo $f - f$ y obtener la transformada de Fourier de una amplitud compleja de ceros y unos (una mascarilla cuadra, triangular o circular, etc.). Sea A_0 la amplitud compleja inicial, entonces A_1 será la amplitud compleja obtenida por el arreglo $f - f$, de tal forma que $A_1 = \mathcal{F}\{A_0\}$, donde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ es la transformada de Fourier.
2. El segundo paso será implementar un segundo arreglo $f - f$ de tal forma que obtengamos la transformada de Fourier de A_1 . Por lo cual, la amplitud compleja resultante es $A_3 = \mathcal{F}\{A_1\} \approx A_0$.

3. En el plano donde se obtuvo A_1 insertar una iris (diafragma) y observar el cambio de la segunda transformada de Fourier, A_3 , conforme el diámetro de la iris va cambiando. Como $A_3 \approx A_0$, entonces la A_0 va cambiando.
4. Obtener el patrón de difracción a diferentes distancias de propagación desde la mascarilla (A_0). El patrón de difracción *cerca* de la mascarilla debe ser el patrón de difracción de Fresnel (campo cercano) y conforme se obtenga este patrón de difracción *más* alejado de la mascarilla se obtendrá el patrón de difracción de Fraunhofer (campo lejano).

2. Teoría

Para simplificar la explicación consideraremos luz monocromática de longitud de onda λ . Uno de los objetivos de **la óptica de Fourier** es calcular *la forma* de la luz conforme *se propaga* en el espacio libre y a través de elementos ópticos (lentes, prismas, etc.). Cuando decimos “*la forma*” nos estamos refiriendo la **amplitud compleja**, A_λ , asociada a la luz. El **patrón de difracción**, I_λ , es definido como

$$I_\lambda \approx |A_\lambda|^2. \quad (1)$$

Para entender que representa la amplitud compleja, consideremos que la luz se propaga a lo largo del eje z ($\vec{k} \parallel \hat{z}$). La luz, ψ , tiene una **representación analítica** dada por[1]

$$\psi = \psi_0 e^{i\phi}, \quad (2)$$

donde A es la amplitud y ϕ es la fase. La luz en general es representada por sus **frentes de onda**, las cuales son las curvas donde la fase es constante $\phi = \text{cte}$. En la Figura (1) se muestran los frentes de onda (línea curva continua). Si la onda se propaga a lo largo del eje z entonces un plano perpendicular a este eje (línea puntada) intercepta diferentes frentes de onda; la amplitud compleja A_λ será los valores complejos en estos puntos de intercepción, esto es

$$A_\lambda = \psi|_{\text{plano } x-y}. \quad (3)$$

2.1. Propagación libre

Supongamos que conocemos la amplitud compleja inicial, A_0 , de la luz; y sea A_1 la amplitud compleja de la luz después de una propagación z en el espacio libre. En la **aproximación de Fresnel** tenemos que[2]

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx'+yy')} \times \\ &\times \left\{ A_0(x', y') e^{i\frac{k}{2z}((x')^2+(y')^2)} \right\} \\ &\approx \mathcal{F} \left\{ A_0(x', y') e^{i\frac{k}{2z}((x')^2+(y')^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

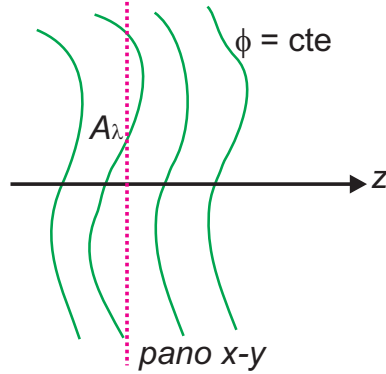


Figura 1: Frentes de onda y la amplitud compleja de la luz conforme se propaga a lo largo del eje z .

en donde las **frecuencias espaciales** se definen como

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{x}{\lambda z} \\ f_y &= \frac{y}{\lambda z}. \end{aligned} \quad (5)$$

En la **aproximación de Fraunhofer** tenemos[2]

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{-i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx' + yy')} \times \\ &\quad \times \{A_0(x', y')\} \\ &\approx \mathcal{F}\{A_0(x', y')\}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde esta aproximación es valida si se cumple[2].

$$z \gg \frac{k((x')^2 + (y')^2)_{\max}}{2}. \quad (7)$$

2.2. Propagación en elementos ópticos

Consideraremos la propagación en la aproximación de Fraunhofer. Un elemento óptico tiene asociada una **función de transferencia**, t_A , de tal forma que si A_0 es la amplitud compleja de la luz inmediatamente antes del elemento óptico y A_1 es la amplitud compleja inmediatamente después del elemento óptico, tenemos

$$A_1 = t_A A_0. \quad (8)$$

2.3. Arreglo $f - f$

Una lente de espesor Δ_0 y de distancia focal f , tiene una función de transferencia

$$t_l = e^{i(k n \Delta_0)} e^{-i \frac{k}{2f}(x^2+y^2)}, \quad (9)$$

donde n es el índice de refracción a la longitud de onda λ del material del cual esta fabricada la lente. Supongamos que conocemos la amplitud compleja, A_0 , de la luz en un punto $z = 0$. Si la luz se propaga una distancia $z = a$, entonces la amplitud compleja A_1 estará dada por

$$A_1 = \mathcal{F}\{A_0\}|_{z=a}. \quad (10)$$

Si en ese punto colocamos una lente de distancia focal f y función de transferencia t_l , tendremos que la amplitud compleja inmediatamente antes de la lente es A_1 y si A_2 es la amplitud compleja inmediatamente después de la lente, entonces

$$A_2 = t_l A_1 = t_l \mathcal{F}\{A_0\}|_{z=a}. \quad (11)$$

Después, si la luz se sigue propagando una distancia $z = b$ tendremos que la amplitud compleja, A_3 , estará dada por

$$\begin{aligned} A_3 &= \mathcal{F}\{A_2\}|_{z=b} \\ &= \mathcal{F}\{t_l \mathcal{F}\{A_0\}|_{z=a}\}|_{z=b}, \end{aligned} \quad (12)$$

finalmente, si condicionamos que $a = b = f$ tendremos[1]

$$A_3 = \mathcal{F}\{A_0\}|_{z=f}. \quad (13)$$

3. Experimento

El esquema del arreglo experimental se muestra en la Figura (2). La luz de un láser se hace incidir sobre una mascarilla de zeros y unos. La mascarilla se encuentra en el plano $x_0 - y_0$. Se coloca la lente L1, de distancia focal f_1 , en la configuración $f_1 - f_1$ de tal forma que el plano $x_1 - y_1$ se obtiene el patrón de difracción de la amplitud compleja A_0 del plano $x_0 - y_0$. Colocando una segunda lente, L2, de distancia focal f_2 en la configuración $f_2 - f_2$ de tal forma que el plano $x_2 - y_2$ se encuentra la transformada de Fourier de A_1 (amplitud compleja en el plano $x_1 - y_1$). Con lo anterior, se pueden obtener los objetivos 1 y 2. En los planos $x_1 - y_1$ y $x_2 - y_2$ deben obtenerse las imágenes correspondiente. Cada equipo podrá elegir libremente la mascarilla que usará.

Con el mismo arreglo de la Figura (2) se usará para obtener el tercer objetivo. La modificación que debe hacerse es insertar una iris o diafragma en el plano $x_1 - y_1$.

Para obtener el patrón de difracción conforme la luz se va propagando después de haber pasado por la mascarilla en el plano $x_0 - y_0$, ver Figura (3), solamente se toma la imagen del patrón de difracción en diferentes planos $x_1 - y_1$ medidos a partir del primer plano.

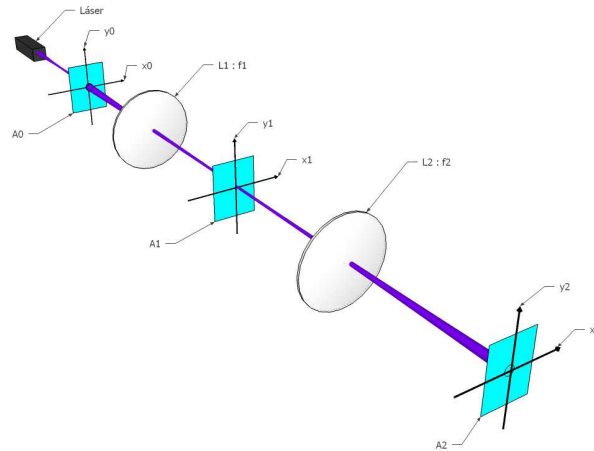


Figura 2: Arreglo experimental para obtener la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa.

4. Simulación numérica

En la Figura (4) se muestran la propagación de la luz en las dos aproximaciones: Fraunhofer y Fresnel. La amplitud compleja inicial es la amplitud compleja de un haz gaussiano (en el cinturón) multiplicada por una rejilla cuadrada de $200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m}$. La propagación se realizó con las Ecuaciones (4) y (6), y usando el algoritmo de la **Transformada de Fourier Rápida** (FFT por sus siglas en inglés). La longitud de onda de la luz es de 633nm . El cálculo se realizó para $z = 1\text{cm}$, 4cm , 8cm y 16cm . Hay que notar dos cosas:

1. El espacio donde se gráfica es de frecuencias, por lo cual, no cambia conforme se propaga. Para determinar las dimensiones en el espacio $x - y$ debemos usar la relaciones dadas en la Ecuación (5).
2. Los patrones de difracción de las dos aproximaciones son similares en 18cm .

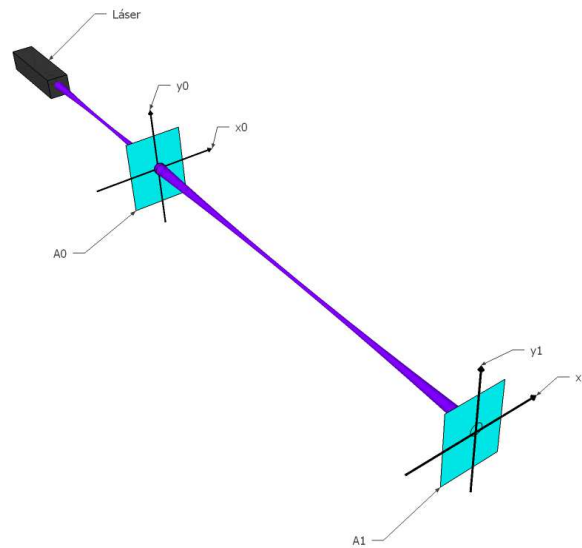


Figura 3: Patrón de difracción de la luz después de cruz una mascarilla.

5. Pormenores de la práctica

La práctica es de dos sesiones de laboratorio.

6. Agradecimientos

Estas notas fueron realizadas con el apoyo de los proyectos PAPIME PE106415 (version 1) y PE105917 (version 2). Agradecemos a los estudiantes Samuel Corona Aquino, Javier Alejandro López, Alfaro Jorge Arturo Monroy Ruz y Francisco Javier Morelos Medina por su contribución a la elaboración de estas notas.

Referencias

- [1] Bahaa E. A Saleh y Malvin Carl Teich, "Fundamentals of photonics 2nd ed;" John Wiley & Sons, 2007.
- [2] Joseph W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics, 3rd ed.;" Roberts & Company Publishers, 2005.

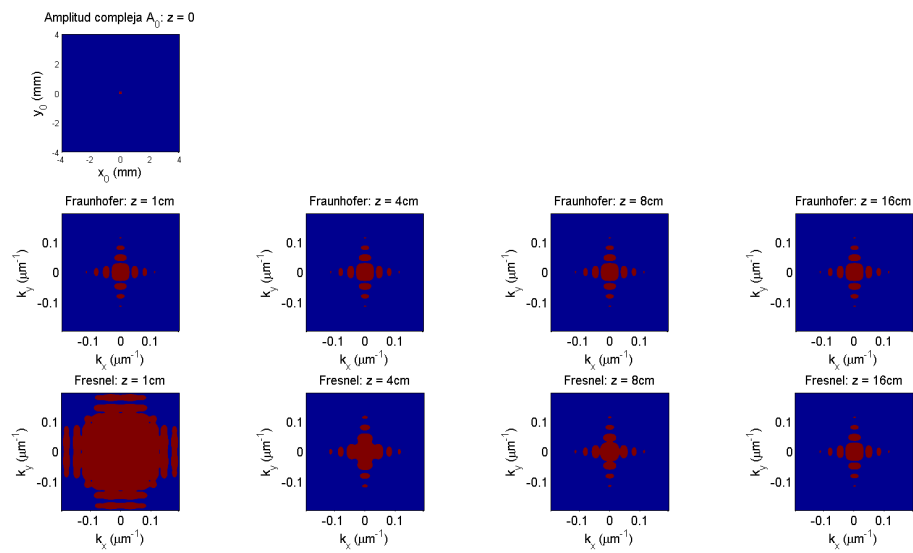


Figura 4: Propagación de la luz usando las aproximaciones de Fraunhofer y de Fresnel, usando el programa MatLab. Los límites en el eje z esta entre 0 y $0.01 \times$ valor máximo, de tal forma que se simula la saturación de una cámara digital.