Laboratorio II:
Mediciones y estadística.
version 3.0

Héctor Cruz Ramírez[1]
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
[1]hector.cruz@ciencias.unam.mx

agosto 2018

Índice

1. Resumen

Los objetivos de la práctica son realizar dos mediciones:

1. medir la masa de un grano de arroz con la miníma incertidumbre,

2. determinar la incertidumbre en la medición de la temperatura cuando se elige al azar un termómetro de N termómetros (Laboratorio de Fenómenos Colectivos),

3. determinar la incertidumbre en la medición de la resistencia eléctrica cuando se elige al azar una resistencia de N resistencias (Laboratorio de Electromagnetismo).

2. Introducción

El alumno realizará mediciones de masa y temperatura. El alumno deberá hacer la estimación de la incertidumbre.

3. Teoría

El alumno deberá recopilar información sobre los conceptos: medición, incertidumbre, presición. De igual forma deberá poder determinar: el valor que se debe reportar $\pm$ su incertidumbre asociada. También, deberá determinar el error relativo y poder realizar propagación de incertidumbres. Finalmente, debe estudiar como puede obtener el promedio y la desviación estándar.

Los conceptos podrán ser encontrados en los cuatro primeros capítulos del libro de Taylor[1]; además, un excelente resumen podrá ser encontrado en el capítulo 4 de libro de Leo[2].

El alumno deberá hacer un pequeño resumen en su bitácora (formulas importantes) y deberá incluir una explicación en el reporte.

3.1. Modelo

Supongamos que conocemos un modelo matemático de un fenómeno físico, representado por la ecuación, entre dos magnitudes físicas X y Y

$$Y = f(X). \tag{1}$$

En un experimento elegimos cierto intervalo de valores de X, supongamos P valores. Entonces, tenemos P datos experimentales (**mediciones**)

$$\{(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i), i = 1, 2 \ldots P\}, \tag{2}$$

donde x_i, y_i son las mejores **estimaciones** de los valores de la **magnitud de entrada**, X, y el **mensurando**, Y, y $\delta x_i, \delta y_i$ son las **estimaciones** de sus **incertidumbres**[1, 3].

3.2. Estimaciones del mensurando y su incertidumbre

Consideremos que fijamos la magnitud de entrada X en el valor estimado x_i. La idea es medir Y y obtener su mejor valor estimado y_i y la mejor estimación de su incertidumbre. Para lo cual, debemos que considerar que existen dos tipos de evaluación de incertidumbres: **evaluación tipo A** y **evaluación tipo B**[3].

Desde el punto de vista de la metrología, para determinar las incertidumbres es importante conocer **el principio de medición**, **el método de medición** y **el procedimiento de medición**[3].

3.2.1. Estimación de las incertidumbres tipo A

En este caso se realizan Q experimentos independientes (con x_i fijo). Entonces, tenemos Q datos experimentales: q_j con $j = 1, 2 \ldots Q$. La mejor estimación de Y con X fijo, es la media aritmética[3, 4]

$$y_i = \bar{q} = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{Q} q_j. \tag{3}$$

También, se puede calcular la dispersión de los datos q_j respecto al valor promedio $\bar{q}$ mediante la **desviación estándar experimental** dada por la raíz cuadrada de la **varianza experimental**[3]

$$s^2(q_j) = \frac{1}{Q-1} \sum_{j=1}^{Q} (q_j - \bar{q})^2, \tag{4}$$

pero la mejor estimación de la incertidumbre es igual a la **desviación estándar experimental media** (representada por la letra u) que se obtiene de la mejor estimación de la varianza de la media, $s^2(\bar{q})$, esto es[3]

$$\begin{aligned} \delta y_i &= u(q_j) \\ &= \sqrt{s^2(\bar{q})} = \sqrt{\frac{s^2(q_j)}{Q}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{j=1}^{Q} (q_j - \bar{q})^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Nota importante: hemos supuesto que los datos experimentales y_i siguen una distribución normal. Podría darse el caso que los datos sigan otro tipo de distribuciones.

3.2.2. Estimación de las incertidumbres tipo B

El punto importante, respecto a estas notas, es que este tipo de incertidumbres se usa cuando no se pueden realizar Q mediciones independientes. Por ejemplo, cuando se usa un multímetro digital y sólo se puede realizar una medición. Para otros casos, consultar la Referencia [3]. Por lo tanto, la mejor estimación de y_i y δy_i dependerá, por ejemplo, de la experiencia previa, mediciones previas y especificaciones previas[3].

Como un ejemplo supongamos que tenemos un detector digital. Realizamos una sola medición, obteniendo el valor q. En este punto, por experiencia, suponemos que los datos siguen una *distribución uniforme* (recuerda que sólo hemos realizado una medición), por lo cual, la mejor estimación de Y (con X fijo) sería el punto medio de la distribución[3, 4]

$$\begin{aligned} y_i &= q \\ &= \frac{q_+ + q_-}{2}, \end{aligned} \tag{6}$$

claramente, debemos determinar los extremos, q_+ y q_- de esta distribución. Se podría utilizar la regla de la mitad de la minima escala para determinar estos extremos. Entonces, la mejor estimación de la incertidumbre sería la raíz de la varianza de la distribución, dada por[3, 4]

$$\begin{aligned} \delta y_i &= u(q_i) \\ &= \sqrt{\frac{(q_+ - q_-)^2}{12}} \end{aligned} \tag{7}$$

4. Experimento

En los siguientes experimentos el alumno debe decidir como obtener el valor a reportar (*best estimate*, ver pag. 13 de [1]) y su incertidumbre. La justificación de cada decisión debe estar contenida en el reporte. Nota importante: no siempre es adecuado tomar como incertidumbre la mitad de la mínima escala; si el alumno utiliza ese criterio debe justificarlo. Por otra parte, si es posible tomar varias mediciones, entonces el criterio adecuado es reportar el valor promedio y la desviación estándar.

4.1. Medición de la masa de un grano de arroz

El objetivo es medir la masa promedio de un grano de arroz. Si se tiene un conjunto de N granos de arroz, entonces cada grano tendrá una masa diferente, por lo cual, el objetivo es obtener el promedio y su incertidumbre asociada. Un método experimental para realizar tal medición sería medir la masa de cada grano (m_i con $i = 1, 2 \ldots, N$) y hacer la estadística correspondiente (obtener $\bar{m}$ y $\sigma_m = \delta\bar{m}$). Otro método sería medir la masa de N granos de arroz M veces, esto es, si η_i es la $i-$ésima medición dada por

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{N} m_j^{(i)} \quad \text{con} \quad i = 1, 2 \ldots, M, \tag{8}$$

donde $m_j^{(i)}$ es la masa de un arroz que es diferente en cada medición. Por lo cual, se deberá medir la masa de N granos de arroz, y realizar este proceso M veces con diferentes N granos.

El procedimiento experimental consiste en usar una balanza analítica (BA) o una balanza de tiple brazo (BTB) para medir la masa. Primero se enciende y calibra la BA o se **ajusta** solamente la BTB. Segundo, se hace la *medición* de la masa de cada grano de arroz o de N granos. Se debe reportar el valor promedio $\pm$ la incertidumbre.

4.2. ´Medición de la temperatura de N termómetros

Supongamos que hay N grupos de trabajo y cada grupo mide la temperatura, T_τ, de un mismo sistema termodinámico, τ. Para fijar ideas, supongamos que τ es agua (como masa m_{H_2O}) contenida un en vaso de precipitados. Entonces, tenemos N termómetros (del mismo tipo) y se realiza la medición de la temperatura del sistema τ en un estado donde conocemos, por la teoría termodinámica, la temperatura $T_{\tau\,0}$ que debe tener (ejemplos serían la temperatura ambiente o del punto de ebullición del agua). La idea es determinar la incertidumbre que debemos asociar a un termómetro si elegimos al azar uno de varios disponibles.

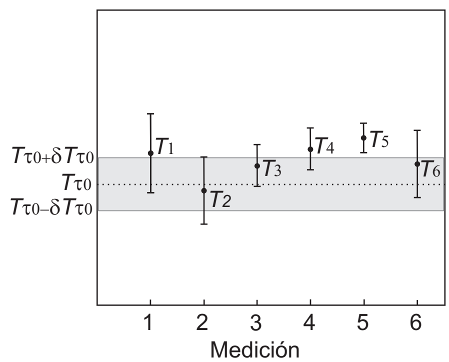

Figura 1: Calibración de un termómetro.

El procedimiento experimental es el siguiente y en la Figura (1) se muestra a manera de ejemplo seis mediciones con seis termómetros diferentes. Se adquieren N termómtros de las mismas características. Estos pueden ser termómetros de alcohol, de mercurio o termopares (en este caso se necesita un multímetro). Implementamos en el sistema τ un estado partícular: agua a la temperatura ambiente o en el punto de ebullición. Se investiga que temperatura, $T_{\tau\,0}$, que se supone τ debe tener; la cual, se obtiene por teoría o por un valor reportado y aceptado. Luego debemos asociar una incertidumbre a este valor, $\delta T_{\tau\,0}$, que podría ser la asociada a todo termómetro (valor nominal dado por el fabricante). Suponiendo que los termómetros se fabricaron en el mismo lote; se procede medir la temperatura del sistema τ con los N termómetros. Habrá N mediciones: T_i con sus respectivas incertidumbres δT_i, con $i = 1, \ldots N$. Las mediciones T_i pueden estar dentro o fuera del intervalo $\Delta_0 = (T_{\tau 0} - \delta T_{\tau 0}, T_{\tau 0} + \delta T_{\tau 0})$. Entonces, primero se calcula el promedio de estas mediciones, y después la **dispersión** de estas mediciones respecto al promedio. En este punto, con la información obtenida se puede calcular la incertidumbre real asociada al termómetro mediante teoría estadística [4], en donde se calcula cual debe ser la incertidumbre para exista una probabilidad *alta* de que el intervalo Δ_0 este contenida en está.

4.3. Medición de la resistencia eléctrica de N resistores

La idea es la misma que la sección anterior. Supongamos que tenemos un lote de N resistores (con el mismo valor nominal) y cada uno tiene una resistencia eléctrica, R_i con $i = 1, \ldots, N$. Cada grupo debe medir la resistencia eléctrica de N resistores mediante la conexión mostrada en la Figura (2). La idea es determinar la incertidumbre que debemos asociar a una resistencia eléctrica si elegimos al azar uno de varios disponibles.

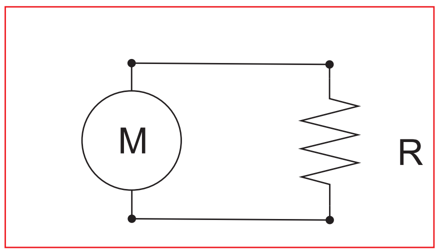

Figura 2: Medición de la resistencia eléctrica R con un multimetro M.

De igual forma que en la sección anterior, primero se calcula el promedio de estas mediciones, y después la **dispersión** de estas mediciones respecto al promedio. Entonces se debe calcular la mejor estimación de la resistencia eléctrica de N resistores y la mejor estimación de su incertidumbre.

4.4. Medición de la distancia focal de una lente positiva y una negativa

En base a un resultado de la óptica geométrica en donde un haz de rayos de luz paralelos cuando inciden en una lente positiva entonces estos rayos convergen en un punto y cuando inciden en una lente negativa estos a la salida divergen de un punto, ver Figura (3) [5]. Este punto es llamado punto focal y la distancia entre la lente y este punto es llamada distancia focal f. Para lentes positivas tenemos $f > 0$ y para lentes negativas $f < 0$.

El procedimiento para estimar la mejor medida de la distancia focal de una lente positiva es el siguiente. Primero se coloca una fuente incoherente (por ejemplo una lámpara de tungsteno) a una distancia de D de la lente (L), ver Figura (4), después se busca el lóbulo más pequeño (que indica el punto de convergencia) y se mide la distancia a la L. Este última medición sería la distancia focal f. Repetir este procedimiento N veces con diferentes distancias D.

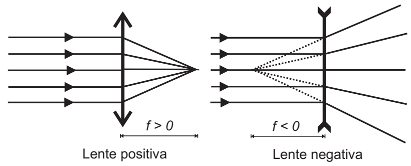

Figura 3: Diagrama de rayos de una lente positiva y una lente negativa.

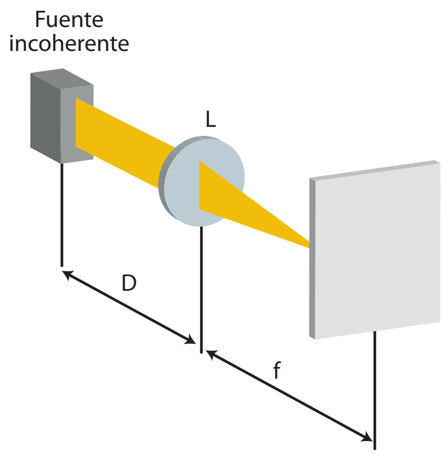

Figura 4: Procedimiento experimental.

Para medir la distancia focal de una lente negativa es técnicamente más difícil ya que es un número negativo. Para realizar utilizamos un sistema óptico de dos lentes. Una lente positiva (L_1) la cual conocemos su distancia focal f_1 y una lente negativa (L_2) cuya distancia focal queremos estimar, f_2. Supongamos que tenemos la luz se propaga de tal forma que incide sobre L_1 y después L_2 entonces los rayos convergen o divergen a una distancia dada por [5]

$$\text{b.f.l} = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}, \tag{9}$$

y en sentido contrario

$$\text{f.f.l} = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)}. \tag{10}$$

El procedimiento es colocar a distancia D de la lente L_1, después variar la distancia entre las lentes hasta que se forme un lóbulo pequeño (el más pequeño) entonces se mide la distancia de este lóbulo hasta la lente L_2. Por lo cual esta distancia es b.f.l. y entonces se puede deducir f_2. Repetir este procedimiento N veces variando la distancia D.

Una consideración importante es que el alumno debe elegir la forma de medir estas distancias. Existen al menos dos formas: la primera es ellas es a través de las distancia de trabajo o,la segunda, a partir de un punto de referencia en la montura donde es montado el elemento óptico. Por último, el alumno debe decir en las conclusiones la mejor forma de estimar estas distancias focales con una sola medición.

5. Pormenores de la práctica

Cantidad de sesiones en el laboratorio: 1 sesión.

6. Agradecimientos

Estas notas fueron realizadas con el apoyo de los proyectos PAPIME PE106415 (version 1), PAPIME PE105917 (version 2) y PAPIME PE107618 (versión 3). Agradecemos a los estudiantes Samuel Corona Aquino, Javier Alejandro López Alfaro y Jorge Arturo Monroy Ruz en la elaboración de estas notas.

Referencias

[1] J. R. Taylor, “An Introduction to Error Analysis,” University Science Books, 1997.

[2] W. R. Leo,“Techniques for nuclear and particle physics experiments,” Springer-Verlag, 1994.

[3] W. A. Schmid y R. J. Lazos-Martínez,“Guía para estimar la incertidumbre de la medición,” CENAM, 2004.

[4] A. Papoulis y S. U. Pillai,“Probability, random variables and stochastic processes,” 4th ed. McGraw-Hill Education, 2014.

[5] B.E.A Saleh y M.C. Teich,“Fundamentals of photonics,” Wiley-Interscience; 2 edition (2007).