



FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
PROGRAMA DE POSGRADO EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA Y ÁBOLES DE EXPANSIÓN MINIMO
(MTS)

DRA. PATRICIA E. BALDERAS CAÑAS
correo-e: empatbal@servidor.unam.mx

1 Grafos y árboles

Definition 1 *Una gráfica G es una terna ordenada*

$$(V(G), E(G), \psi_G)$$

que consiste de un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices, un conjunto $E(G)$, ajeno a $V(G)$, de aristas o lados, y una función de incidencia ψ_G , que asocia a cada lado de G , un par vértices, de G , no ordenado y no necesariamente distintos.

Si e es una arista, u y v dos vértices tales que

$$\psi_G(e) = uv$$

entonces se dice que e une a u y v , en este caso los vértices u y v se llaman extremos de e .

Definition 2 El grado de un vértice $\deg(v)$, es el número de aristas de las cuales es un extremo, o que inciden en él.

Example 3 Sea $(V(G), E(G), \psi_G)$, donde

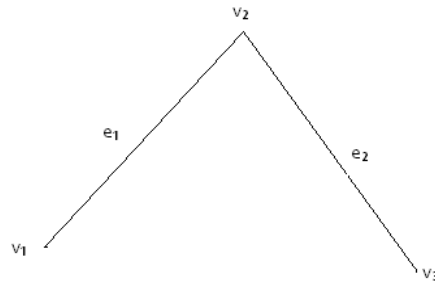
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2\}$$

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2$$

$$\psi_G(e_2) = v_2v_3$$

la gráfica (el grafo) correspondiente es



Example 4 Sea $(V(H), E(H), \psi_H)$, donde

$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2$$

$$\psi_G(e_2) = v_2v_3$$

$$\psi_G(e_3) = v_3v_3$$

$$\psi_G(e_4) = v_3v_4$$

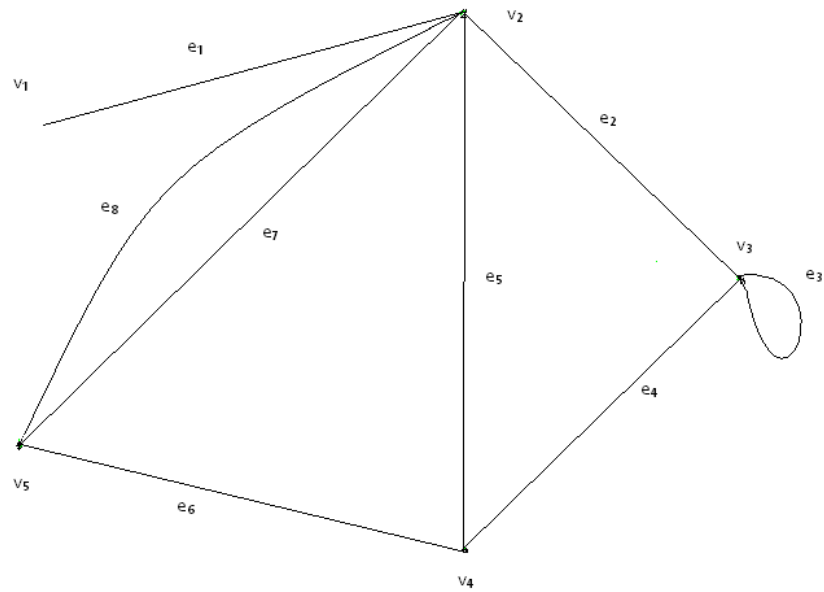
$$\psi_G(e_5) = v_2v_4$$

$$\psi_G(e_6) = v_4v_5$$

$$\psi_G(e_7) = v_2v_5$$

$$\psi_G(e_8) = v_2v_5$$

la gráfica (el grafo) correspondiente es



Example 5 Sea $H = (V(HG), E(H), \psi_H)$, donde

$$V(H) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$\psi_H(a) = uv$$

$$\psi_H(b) = uu$$

$$\psi_H(c) = vw$$

$$\psi_H(d) = wx$$

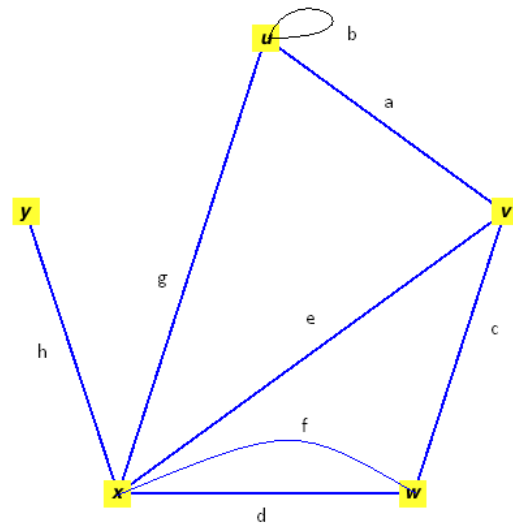
$$\psi_H(e) = vx$$

$$\psi_H(f) = wx$$

$$\psi_H(g) = ux$$

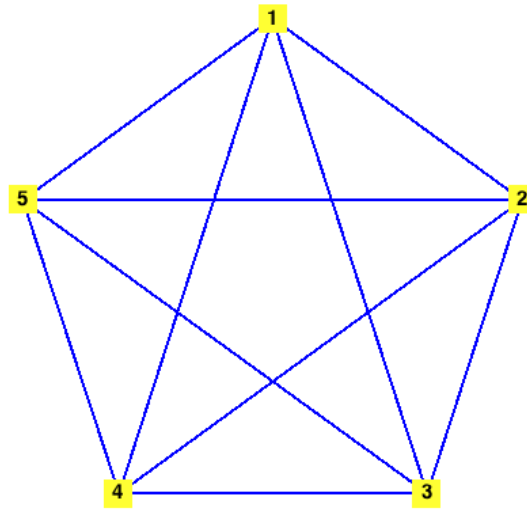
$$\psi_H(h) = xy$$

la gráfica (el grafo) correspondiente es



La gráfica muestra la relación de incidencia. No es única la forma de mostrar el grafo. La posición relativa de los vértices no tiene significado. Las gráficas cuyas aristas sólo se intersectan en los vértices se llaman planas, por representarse en un plano de manera simple.

Example 6 *Gráfica completa con cinco vértices: K_5*



Definition 7 *Una gráfica vacía es una sin aristas.*

Definition 8 *Una gráfica bipartita es una cuyo conjunto de vértices se puede partir en dos subconjuntos X y Y , de modo que, cada arista tiene un extremo en X y un extremo en Y .*

Notation 9 *La partición se denota por (X, Y) .*

Definition 10 *Una gráfica bipartita completa es una gráfica simple bipartita con partición (X, Y) , en la cual cada vértice de X está unido con un vértice de Y .*

Notation 11 *Si $\nu(X) = m$ y $\nu(Y) = n$, la gráfica bipartita completa se denota por $K_{m,n}$.*

2 Matrices de incidencia y adyacencia

Definition 12 *Para toda gráfica G , con $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$ y $E(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$, hay una matriz de dimensión $m \times n$, denominada matriz de incidencia, definida por*

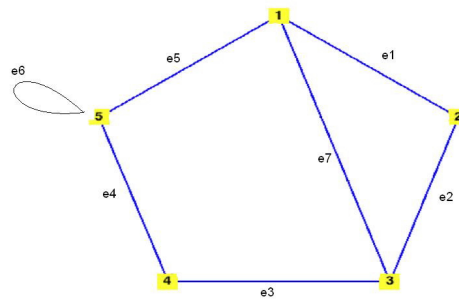
$$M(G) = [m_{ij}]$$

donde m_{ij} es el número de veces que el vértice v_i y la arista e_j , son incidentes.

Nótese que $m_{ij} = 0, 1, 2$.

Example 13 *Gráfica y matriz de incidencia*

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



Definition 14 *La matriz de adyacencia es una matriz de dimensión $m \times n$, $A(G) = [a_{ij}]$, donde a_{ij} es el número de aristas que unen a los vértices v_i , v_j .*

Example 15 *Gráfica y matriz de adyacencia*

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Propiedades. Sean M y A las matrices de incidencia y adyacencia de la gráfica G , respectivamente.

1. La suma de todas las celdas de una columna de M es 2

2. La suma de todas las celdas de una columna de A es el grado del vértice, esto es, el número de aristas que lo tienen por extremo.

Definition 16 *Sobre subgráficas*

1. Una gráfica H es una subgráfica de G , $H \subseteq G$, si

$$V(H) \subseteq V(G)$$

$$E(H) \subseteq E(G)$$

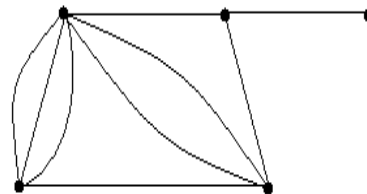
ψ_H es la restricción de ψ_G a $E(H)$

En este caso, también se dice que G es una supergráfica de H .

2. Cuando $H \subseteq G$, pero $H \neq G$ se dice que H es una subgráfica propia de G .

3. Una expansión H (subgráfica o supergráfica) de G , se da cuando $V(H) = V(G)$.

4. Quitando los lazos y dejando sólo una arista, de las que halla en cada par de vértices adyacentes, se tiene una subgráfica expansión simple de G denominada la gráfica simple subyacente de G .



5. Un subgrafo de recubrimiento H de G , es un subgrafo tal que

$$V(H) = V(G)$$

Definition 17 *En el caso de gráficas ajenas, la unión se suele representar por $G_1 + G_2$.*

Definition 18 *La intersección $G_1 \cap G_2$, se define análogamente, solo se pide que, al menos, tengan un vértice en común, para que la intersección sea no vacía.*

De la relación entre la suma de los grados y el número de aristas, en una gráfica, se tiene el siguiente:

Corollary 19 *En cualquier gráfica, el número de vértices de grado impar es par.*

Definition 20 *Una gráfica G es k -regular si*

$$d(v) = k$$

para todo $v \in V(G)$.

3 Caminos, trayectorias y rutas

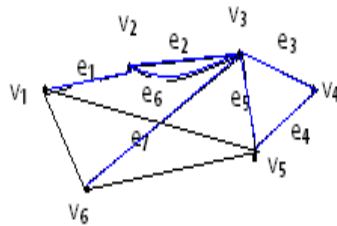
Definition 21 *Un camino (walk) en una gráfica G es una sucesión finita, no nula, de vértices y aristas, alternadas. El camino de v_0 a v_k , denotado por (v_0, v_k) , es un camino con $k + 1$ vértices y k aristas:*

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$$

cuyos términos son sucesivamente, vértices y aristas, tal que, los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i , con $1 \leq i \leq k$. El origen es v_0 , el final es v_k , y los vértices internos son $v_1 \dots v_{k-1}$. La longitud del camino es k .

Example 22 *En la gráfica se resalta el camino*

$$W = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_5 e_5 v_3 e_6 v_2 e_2 v_3 e_7 v_6$$



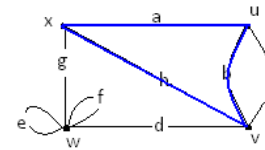
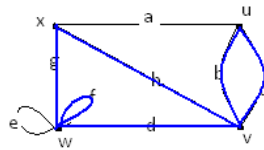
Definition 23 *Un camino cerrado tiene longitud positiva y su origen y fin son el mismo vértice.*

Definition 24 *Un paseo (trail) es un camino donde las aristas son diferentes.*

Definition 25 *Un trayecto o ruta (path) es un paseo donde todos los vértices son distintos.*

Definition 26 *Un trayecto cerrado con origen y vértices internos, distintos es un ciclo.*

Example 27 *Se ilustra un trayecto cerrado y un ciclo:*



Trayecto cerrado: $ucvbxgwfdvbu$ Ciclo: $xaubvbx$

Definition 28 *Un grafo es conexo si, para cualquier par de sus vértices u y v , existe una (u, v) -trayectoria en el grafo.*

Definition 29 *Una subgráfica H es maximal con respecto a una propiedad, si H cumple la propiedad y no es subgráfica propia de otro grafo que cumpla la propiedad.*

Definition 30 *Un subgrafo H es minimal con respecto a una propiedad, si H cumple la propiedad y no existe un subgrafo propio de H que cumpla la propiedad.*

Definition 31 *Una componente de una gráfica es un subgrafo conexo maximal.*

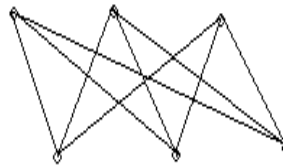
Corollary 32 *Una gráfica es conexa si tiene exactamente una componente.*

Definition 33 *Una gráfica con más de una componente se denomina disconexo.*

Definition 34 *Una gráfica es bipartita si el conjunto de sus vértices se puede partir en dos subconjuntos tales que cada arista tiene un extremo en cada uno de esos subconjuntos.*

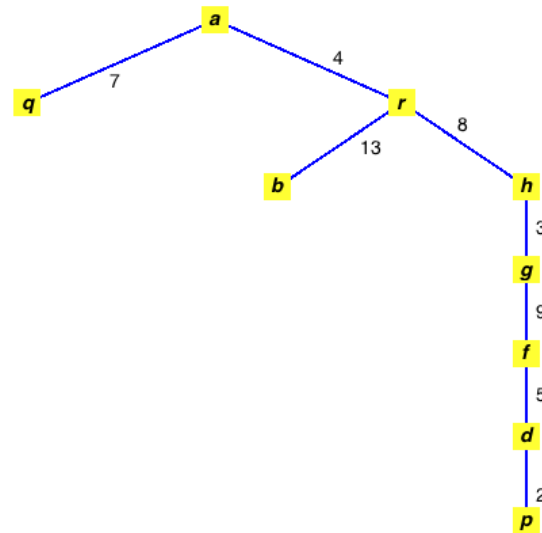
Theorem 35 *Una gráfica es bipartita si y sólo si contiene ciclos no impares.*

Example 36



Definition 37 *Un árbol es un grafo acíclico conexo.*

Example 38



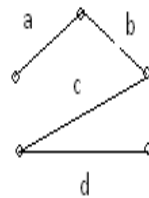
Proposition 39 *Si T es un árbol entonces para cualquier par, u y v , de sus vértices, existe una única trayectoria (u, v) .*

Proposition 40 *Si T es un árbol no trivial, entonces existen al menos dos vértices distintos de grado uno.*

Proposition 41 Si T es un árbol con n vértices, entonces el número de aristas es $n - 1$.

Definition 42 Un puente en un grafo es una arista e tal que el número de componentes de $G - e$ es mayor que el número de componentes de G . En particular, si G es conexo entonces e es un puente de G si y solo si $G - e$ es desconexo.

Example 43 La arista c es un puente, de la gráfica siguiente.



4 Árboles de expansión mínima y programación lineal

Hay una conexión interesante entre los árboles de expansión mínima y la programación lineal, esto es, hay un problema de programación lineal para el cual cada árbol de expansión mínima proporciona una solución óptima. Considere el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar: $c^T x$

Sujeta a:

$$x(\gamma(S)) \leq |S| - 1 \quad \text{para todo } S \quad \emptyset \neq S \subset V$$

$$x(E) = |V| - 1$$

$$x_e \geq 0 \quad \text{para todo } e \in E$$

donde $\gamma(S)$ es el conjunto de aristas de E , con ambos extremos en S .

Theorem 44 Sea x^0 el vector característico de un MST con respecto a los costos c_e . Entonces x^0 es una solución óptima del problema anterior.

Proof. Se reformula el problema para tener un manejo más fácil, como sigue

Minimizar: $c^T x$

Sujeta a:

$$x(A) \leq |V| - \kappa(A) \quad \text{para todo } A \subset E$$

$$x(E) = |V| - 1$$

$$x_e \geq 0 \quad \text{para todo } e \in E$$

La afirmación es que ambos problemas tienen las mismas soluciones factibles, y de ahí que las mismas soluciones óptimas. Cada restricción de la forma

$$x(\gamma(S)) \leq |S| - 1$$

es consecuencia de

$$x(A) \leq |V| - \kappa(A)$$

tomado $A = \gamma(S)$. Nótese que

$$\kappa(\gamma(S)) \geq |V \setminus S| + 1$$

Recíprocamente, cada restricción

$$x(A) \leq |V| - \kappa(A)$$

es consecuencia de una combinación de las restricciones

$$\begin{aligned} x(\gamma(S)) &\leq |S| - 1 \quad \text{para todo } S \neq \emptyset \subset V \\ x(E) &= |V| - 1 \end{aligned}$$

Sea $A \subset E$ y S_1, \dots, S_k los conjuntos de nodos de las componentes de la subgráfica (V, A) . Entonces

$$x(A) \leq \sum_{i=1}^k x(\gamma(S_i)) \leq \sum_{i=1}^k (|S_i| - 1) = |V| - k$$

Es suficiente probar que x^0 es óptima para el problema reformulado, es más, que es suficiente probar que esto es cierto cuando x^0 es el vector característico

del árbol de expansión T generado por el algoritmo Kruskal. La optimalidad del vector característico se prueba mostrando que dicho algoritmo puede usarse para calcular una solución factible del problema dual que satisface la holgura complementaria con x^0 . Para facilitar la construcción del problema dual, reemplazamos el objetivo de minimizar $c^T x$, por maximizar $-c^T x$. De ahí que el problema dual es

$$\text{Minimizar: } \sum_{A \subseteq E} (|V| - \kappa(A)) y_A$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \sum (y_A : e \in A) &\geq -c_e && \text{para todo } e \in E \\ y_A &\geq 0 && \text{para todo } A \subseteq E \end{aligned}$$

Nótese que no se requiere que y_E sea no-negativo. Sea e_1, \dots, e_m el orden en el cual el algoritmo Kruskal considera los arcos. Sea

$$R_i = \{e_1, \dots, e_i\}$$

para $1 \leq i \leq m - 1$ y

$$y_{R_i}^0 = c_{e_{i+1}} - c_{e_i}$$

para $1 \leq i \leq m - 1$ y

$$y_{R_m}^0 = -c_{e_m}$$

Se sigue del orden en los arcos que

$$y_A^0 \geq 0$$

para $A \neq E$. De la primera restricción del problema dual, con $e = e_i$ se tiene

$$\sum (y_A^0 : e \in A) = \sum_{j=i}^m y_{R_j}^0 = \sum_{j=i}^m (c_{e_{i+1}} - c_{e_i}) - c_{e_m} = -c_{e_i} = c_e$$

En otras palabras, todas las restricciones se cumplen con igualdad. Falta mostrar que y^0 es una solución factible del problema dual, y que por holgura complementaria, la condición

$$x_e^0 > 0$$

implica que la igualdad en la respectiva restricción dual, se satisface. Finalmente, falta verificar que

$$y_A^0 > 0$$

implica que x^0 satisface la primera restricción, con igualdad. Para ello, se sabe que

$$A = R_i$$

para alguna i . Si la restricción no se cumple con igualdad, entonces hay una arista en R_i , cuya adición a

$$T \cap R_i$$

reduce el número de componentes de

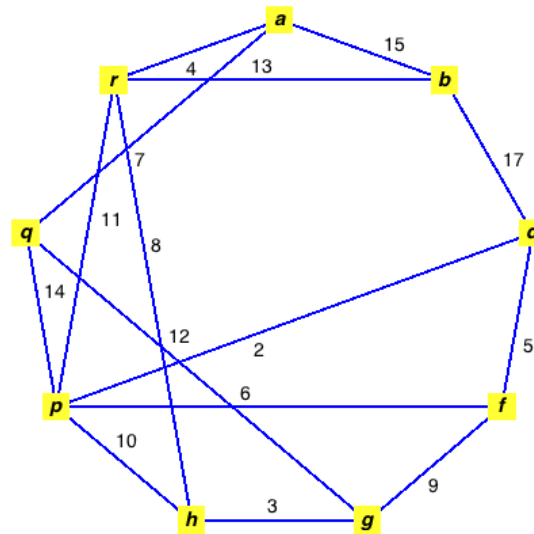
$$(V, T \cap R_i)$$

Pero una arista de ese tipo tendría sus extremos en dos componentes distintas de $(V, T \cap R_i)$, de ahí que se habría agregado a T , debido al algoritmo Kruskal.

Por lo tanto, x^0 y y^0 satisfacen las condiciones de holgura complementaria. De donde se tiene que x^0 es una solución óptima del problema reformulado y el problema original. ■

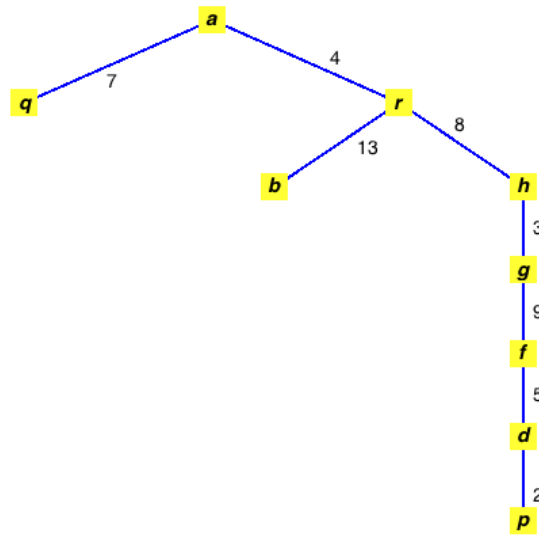
Remark 45 *Dado que cualquier árbol de expansión que proporciona una solución óptima del problema de programación lineal debe ser un MST, y debido a que la demostración anterior solo utiliza el hecho de que T fue generado por el algoritmo Kruskal, esa prueba es una prueba de que dicho algoritmo calcula un MST.*

Example 46 *Encontrar el MST por el algoritmo Kruskal, para el grafo**



*Tomado de Cook, W. et.al. (1997) Combinatorial Optimization, p. 17

Solution 47 *A continuación se muestra el MST, cuya longitud es 51.*



5 Problema de árbol de expansión mínima (MST)

DINERO EN MOVIMIENTO[†] Jake Nguyen pasa nerviosamente una mano a través de su pelo, alguna vez peinado finamente, se afloja al mismo tiempo su corbata de seda perfectamente anudada y se frota sus manos sudadas en sus, alguna vez pantalones impecablemente planchados. Hoy no ha sido ciertamente un buen día.

Durante los últimos meses, Jake había oído rumores que circulaban en Wall Street - rumores de los labios de banqueros inversionistas y corredores de la bolsa conocidos por su franqueza. Hacían murmuraciones acerca de un próximo colapso de la economía japonesa - las murmuraciones eran porque pensaban que haciendo públicos sus temores acelerarían el derrumbamiento.

Hoy, sus mismos temores se han hecho realidad. Jake y sus colegas se reúnen alrededor de una pequeña televisión dedicada exclusivamente al canal de

[†]Tomado y adaptado de Hillier, F., Hillier, M., Hillier, and Lieberman, G. (2001) Caso 6.2

Bloomberg (canal 315 de Sky). Jake mira fijamente con escepticismo y escucha los horrores que tienen lugar en el mercado japonés. El mercado japonés está arrastrando todos los mercados financieros de los demás países Asiático Orientales en su vertiginosa caída. Jake se queda paralizado. Como gerente de la inversión extranjera Asiática para Grant Hill Associates, una pequeña empresa de inversión de la Costa Oriental que se especializa en la comercialización del dinero. Jake lleva la responsabilidad personal por cualquier impacto negativo de este colapso. Y Grant Hill Associates experimentará impactos negativos. Jake no había hecho caso de las murmuraciones que advertían un derrumbamiento japonés. En cambio, él había aumentado en gran manera el riesgo de Grant Hill Associates de quedar fuera del mercado japonés. Debido a que el mercado japonés se había comportado mejor de lo esperado durante el último año, Jake había aumentado las inversiones en Japón de 2.5 millones de a 15 millones de dólares, hace sólo un mes. En ese momento, la paridad del dólar era de 80 yens.

No más. Jake comprende que la devaluación de hoy del yen significa que un dólar equivaldrá a 125 yens. El podrá liquidar las inversiones sin pérdida en yens. La pérdida de dólares cuando convierta los yens en dólares americanos sería enorme. Jake respira profundamente, cierra los ojos y mentalmente se prepara para reparar los severos daños.

La meditación de Jake es interrumpida por una potente voz que lo llama desde una esquina de su gran oficina. Grant Hill, el presidente de Grant Hill Associates, vocifera “¡Nguyen, esto es un infierno!”

Jake da un brinco y mira renuientemente hacia la esquina de la oficina donde aparece la figura de Grant Hill hecho una furia. Jake entonces se alisa el cabello, se aprieta la corbata, y camina aprisa por la oficina.

Grant Hill le sale al paso a Jake, lo mira fijamente a los ojos y le sigue gritando, “¡No me diga ni una sola palabra, Nguyen! No hay pretextos; ¡simplemente arregle este desastre! ¡Saque todo nuestro dinero de Japón! ¡Mi intestino me dice que éste es sólo el principio! ¡Invierta el dinero en bonos americanos confiables! ¡AHORA! ¡Y no olvide sacar nuestro dinero en efectivo de Indonesia y

Malasia!”

Jake tiene bastante sentido común para no hacer ningún comentario. Él inclina su cabeza, gira sobre los tacones de sus zapatos, y prácticamente sale volando de la oficina.

Seguramente atrás de su escritorio, Jake empieza a formular un plan para sacar sus inversiones de Japón, Indonesia y Malasia. Sus experiencias de invertir en mercados extranjeros le han enseñado que jugar con millones de dólares, así como sacar dinero de un mercado extranjero es casi tan importante como sacar dinero del mercado. Los socios de la banca de Grant Hill Associates cobran diferentes honorarios por la transacción de convertir un tipo de dinero en otro y remitir grandes sumas de dinero alrededor del mundo. Y ahora, las cosas han empeorado, los gobiernos en el Asia Oriental han impuesto límites muy estrictos en la cantidad de dinero que un individuo o compañía puede cambiar del dinero doméstico a una divisa particular y pueda sacarlo del país. El objetivo de esta dramática medida es reducir la salida de inversiones extranjeras de esos

países para prevenir un colapso total de las economías en la región. Debido a las posiciones en efectivo de Grant Hill Associates de 10.5 billones de rupias en Indonesia y 28 millones de ringgits en Malasia, junto con los yenes, no está claro cómo deben convertir esas divisas en dólares.

Jake quiere encontrar el método más efectivo en costos, para convertir estas posiciones en dólares. En el sitio Web de su compañía, él puede encontrar siempre los tipos de cambio, en todo, momento para la mayoría de las monedas

en el mundo, vea la tabla 1.

De \ A	Yen	Rupia	Ringgit	US Dólar	C Dólar	Euro	Libra	Peso
Yen japonés	1	50	0.04	0.008	0.01	0.0064	0.0048	0.0768
Rupia hindú		1	0.0008	0.00016	0.0002	0.000128	0.00096	0.001536
Ringgit malasio			1	0.2	0.25	0.16	0.12	1.92
US Dólar				1	1.25	0.8	0.6	9.6
C Dólar					1	0.64	0.48	7.68
Euro						1	0.75	12
Libra británica							1	16
Peso mexicano								1

Tabla1. Tipos de cambio de divisas

La tabla anterior indica que, por ejemplo, 1 yen japonés equivale a 0.008 dólares americanos. Haciendo unas llamadas telefónicas, conoce los costos de la transacción que su compañía debe pagar por las grandes transacciones de

divisas durante estos tiempos críticos, vea la tabla 2.

De \ A	Yen	Rupia	Ringgit	US Dólar	C Dólar	Euro	Libra	Peso
Yen japonés	–	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.25	0.5
Rupia hindú		–	0.7	0.5	0.3	0.3	0.75	0.75
Ringgit malasio			–	0.72	0.7	0.4	0.45	0.5
US Dólar				–	0.05	0.1	0.1	0.1
C Dólar					–	0.2	0.1	0.1
Euro						–	0.05	0.5
Libra británica							–	0.5
Peso mexicano								–

Tabla 2. Costo por transacción (porcentaje)

Jake nota que al cambiar una moneda por cualquier otra se produce el mismo costo de la transacción que para una conversión inversa. Finalmente, Jake averigua las cantidades máximas de dineros domésticos que su compañía tiene

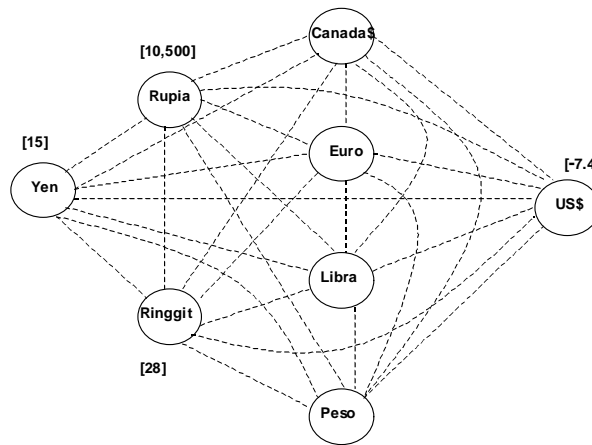
permitido convertir a otros tipos de moneda en Japón, Indonesia y Malasia, vea la tabla 3.

De \ A	Yen	Rupia	Ringgit	US Dólar	C Dólar	Euro	Libra	Peso
Yen japonés	–	5,000	5,000	2,000	2,000	2,000	2,000	4,000
Rupia hindú	5,000	–	2,000	200	200	1,000	500	200
Ringgit malasio	3,000	4,500	–	1,500	1,500	1,500	1,000	1,000

Tabla 3. Límites de transacciones en miles de dólares equivalentes

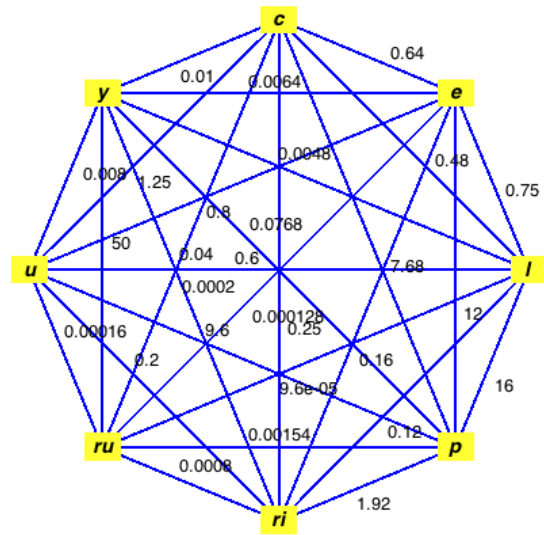
El problema de Jake se formula como un problema de flujo a costo mínimo. La red se muestra a continuación. Hay tres nodos de suministro – Yen, Rupia y

Ringgit. Hay un nodo de demanda – el nodo Dólares Americanos.



Exercise 48 Complete la información faltante en la red anterior y encuentre la ruta de costo mínimo de los tres orígenes (yen, rupia y ringgit) al destino (USD).

Solution 49 *La gráfica queda como sigue*



6 BIBLIOGRAFÍA

Balderas, P. Optimización combinatoria. Notas de clase, sem. 2015-2. Departamento de Ingeniería de Sistemas, DIMEI, Fac. Ingeniería, UNAM.

Balderas, P. y Sánchez, G. (coords., 2011) Ingeniería de Sistemas. Investigación e Intervención. México: Plaza y Valdés- Facultad de Ingeniería, UNAM, 67 – 92

Bondy, J. A. and Murty, U.S.R. (1982) Graph Theory with Applications. N.Y. North-Holland, 5a.

Chartrand, G. (1977) Introductory Graph Theory. New York: Dover Publications, Inc. pp. 294

Cook, W., Cunningham, W. , Pulleyblank, W., and Schrijver, A. (1998) Combinatorial optimization. New York : J. Wiley.

Espinosa Armenta, R. (2010) Matemáticas Discretas. México: _Alfaomega, pp. 467

Harary, F. (1969) Graph Theory. Massachussets: Addison-Wesley, pp. 274

Harary, F. Norman, F. y Cartwright D. (1965, 1978) Structural Models: an Introduction to the Theory of Directed Graph. New York: John Wiley & Sons, pp. 415

Ortega, James M. (1987) Matrix Theory. A second course. The University Series in Mathematics. New York: Plenum Press, pp. 262

Murthy, D., Page, N. & Rodin, E. (1990) Mathematical Modelling. A tool for Problem Solving Engineering, Physical, Biological and Social Sciences. N.Y.: Pergamon Press.

Slomson, Alan (1991) An Introduction to Combinatorics. London: Capman & Hall/CRC