



FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
PROGRAMA DE POSGRADO EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

NOTAS DE CLASE
OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA
SEMESTRE: 2016-2
DRA. PATRICIA E. BALDERAS CAÑAS
correo-e: empatbal@servidor.unam.mx

1. Introducción

La optimización combinatoria es una rama de la optimización en matemáticas aplicadas y en ciencias de la computación, relacionada a la investigación de operaciones, teoría de algoritmos y teoría de la complejidad computacional. También está relacionada con otros campos, como la inteligencia artificial e ingeniería de software. Los algoritmos de optimización combinatoria resuelven instancias de problemas que se creen ser difíciles en general, explorando el espacio de soluciones (usualmente grande) para estas instancias. Los algoritmos de optimización combinatoria logran esto reduciendo el tamaño efectivo del espacio, y explorando el espacio de búsqueda eficientemente.

Los algoritmos de optimización combinatoria a menudo son implementados en lenguajes imperativos como C y C++ entre otros softwares inteligentes en lenguajes de programación lógicos tales como Prolog, o incluso en lenguajes multi-paradigma tales como Oz.

Mediante el estudio de la teoría de la complejidad computacional es posible comprender la importancia de la optimización combinatoria. Los algoritmos de optimización combinatoria se relacionan comúnmente con problemas NP-hard. Dichos problemas en general no son resueltos eficientemente, sin embargo, varias aproximaciones de la teoría de la complejidad sugieren que ciertas instancias (ej. "pequeñas" instancias) de estos problemas pueden ser resueltas eficientemente. Dichas instancias a menudo tienen ramificaciones prácticas muy importantes¹.

2. Grafos y algoritmos

2.1. Grafos y árboles

Definición 1 Una gráfica G es una terna ordenada

$$(V(G), E(G), \psi_G)$$

que consiste de un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices, un conjunto $E(G)$, ajeno a $V(G)$, de aristas o lados, y una función de incidencia ψ_G , que asocia a cada lado de G , un par vértices, de G , no ordenado y

¹ Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_combinatoria
06/04/2016

no necesariamente distintos.

Si e es una arista, u y v dos vértices tales que

$$\psi_G(e) = uv$$

entonces se dice que e une a u y v , en este caso los vértices u y v se llaman extremos de e .

Definición 2 El grado de un vértice $\deg(v)$, es el número de aristas de las cuales es un extremo, o que inciden en él.

Ejemplo 3 Sea $(V(G), E(G), \psi_G)$, donde

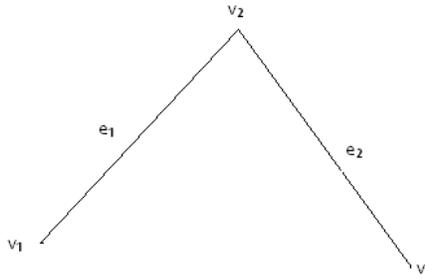
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2\}$$

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2$$

$$\psi_G(e_2) = v_2v_3$$

la gráfica (el grafo) correspondiente es



Ejemplo 4 Sea $(V(H), E(H), \psi_H)$, donde

$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2$$

$$\psi_G(e_2) = v_2v_3$$

$$\psi_G(e_3) = v_3v_4$$

$$\psi_G(e_4) = v_3v_4$$

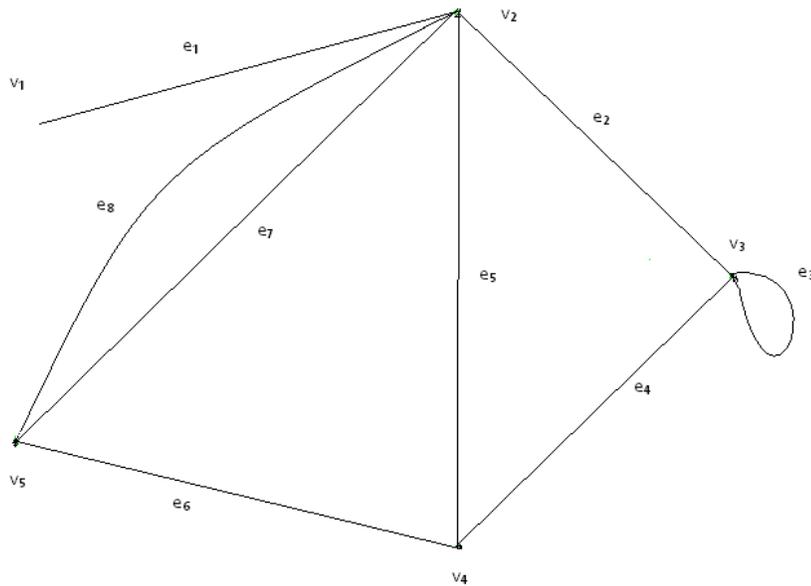
$$\psi_G(e_5) = v_2v_4$$

$$\psi_G(e_6) = v_4v_5$$

$$\psi_G(e_7) = v_2v_5$$

$$\psi_G(e_8) = v_2v_5$$

la gráfica (el grafo) correspondiente es



Ejemplo 5 Sea $H = (V(HG), E(H), \psi_H)$, donde

$$V(H) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$\psi_H(a) = uv$$

$$\psi_H(b) = uu$$

$$\psi_H(c) = vw$$

$$\psi_H(d) = wx$$

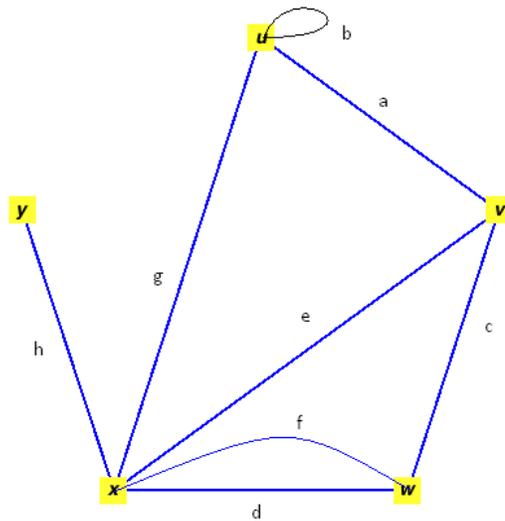
$$\psi_H(e) = vx$$

$$\psi_H(f) = wx$$

$$\psi_H(g) = ux$$

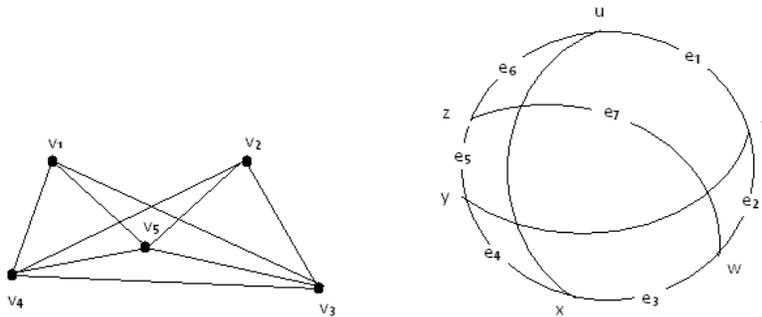
$$\psi_H(h) = xy$$

la gráfica (el grafo) correspondiente es



La gráfica muestra la relación de incidencia. No es única la forma de mostrar el grafo. La posición relativa de los vértices no tiene significado. Las gráficas cuyas aristas sólo se intersectan en los vértices se llaman planas, por representarse en un plano de manera simple.

Ejercicio 6 Dibujar las siguientes gráficas de manera que sean planas.



Definición 7 Dos vértices que son incidentes a un lado común se llaman adyacentes. Así como los lados son adyacentes cuando tienen un vértice en común.

Definición 8 Una arista con extremos idénticos, es decir, el mismo vértice, se llama lazo.

Definición 9 Una arista con extremos distintos se llama vínculo.

Definición 10 Una gráfica es finita si sus dos conjuntos que la definen, V y E son finitos.

Definición 11 Una gráfica con un sólo vértice se denomina trivial y el resto de las gráficas no triviales.

Definición 12 Una gráfica se denomina simple si no tiene lazos y dos vínculos no tienen el mismo par de vértices.

Definición 13 Con la notación $v(G)$ y $\varepsilon(G)$, nos referimos a la cardinalidad de los conjuntos $V(H)$ y $E(H)$, respectivamente.

Definición 14 Dos gráficas son idénticas $G = H$, si

$$V(G) = V(H)$$

$$E(G) = E(H)$$

$$\psi_G = \psi_H$$

Definición 15 Dos gráficas son isomórficas $G \simeq H$ si existen biyecciones, entre los vértices y las aristas,

$$\theta : V(G) \rightarrow V(H)$$

$$\phi : E(G) \rightarrow E(H)$$

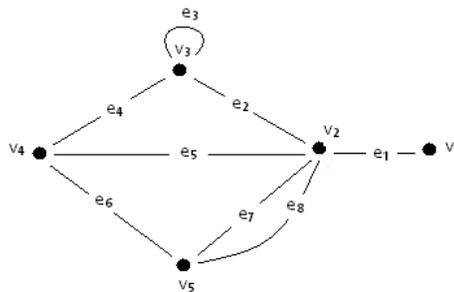
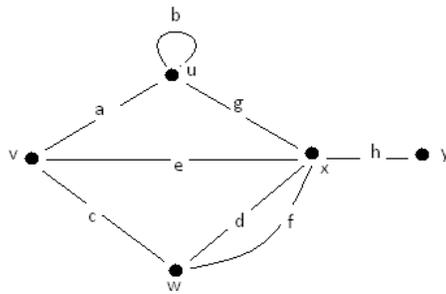
tales que

$$\psi_G(e) = uv \Leftrightarrow \psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

el par de mapeos (θ, ϕ) se llama isomorfismo entre G y H . El isomorfismo puede indicarse mediante los mapeos de incidencia.

Ejemplo 16 Se presentan ambas gráficas de forma que se aprecie rápidamente el isomorfismo.

G	H
$\theta(v_1) = y$	$\phi(e_1) = h$
$\theta(v_2) = x$	$\phi(e_2) = g$
$\theta(v_3) = u$	$\phi(e_3) = b$
$\theta(v_4) = v$	$\phi(e_4) = a$
$\theta(v_5) = w$	$\phi(e_5) = e$
	$\phi(e_6) = c$
	$\phi(e_7) = d$
	$\phi(e_8) = f$

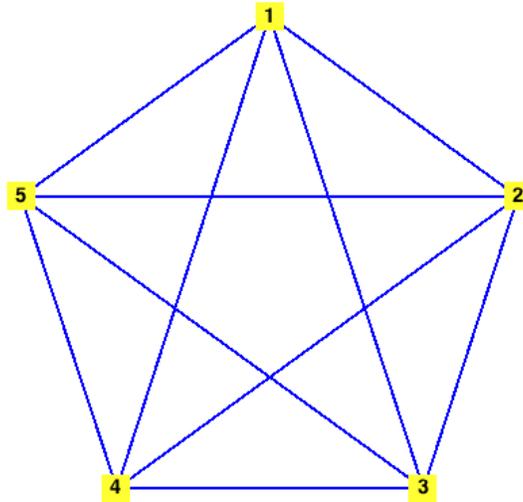


Una gráfica sin etiquetas es la representante de todas las gráficas isomórficas a ella.

Definición 17 Una gráfica se llama completa cuando cada par de vértices distintos está unido por una arista.

Notación 18 Salvo isomorfismo, sólo hay una gráfica completa con n vértices, la cual se representa por K_n .

Ejemplo 19 Gráfica completa con cinco vértices: K_5



Definición 20 Una gráfica vacía es una sin aristas.

Definición 21 Una gráfica bipartita es una cuyo conjunto de vértices se puede partir en dos subconjuntos X y Y , de modo que, cada arista tiene un extremo en X y un extremo en Y .

Notación 22 La partición se denota por (X, Y) .

Definición 23 Una gráfica bipartita completa es una gráfica simple bipartita con partición (X, Y) , en la cual cada vértice de X está unido con un vértice de Y .

Notación 24 Si $v(X) = m$ y $v(Y) = n$, la gráfica bipartita completa se denota por $K_{m,n}$.

2.2. Matrices de incidencia y adyacencia

Definición 25 Para toda gráfica G , con $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$ y $E(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$, hay una matriz de dimensión $m \times n$, denominada matriz de incidencia, definida por

$$M(G) = [m_{ij}]$$

donde m_{ij} es el número de veces que el vértice v_i y la arista e_j , son incidentes. Nótese que $m_{ij} = 0, 1, 2$.

Ejemplo 26 *Gráfica y matriz de incidencia*

$$\begin{array}{c}
 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Definición 27 *La matriz de adyacencia es una matriz de dimensión $m \times n$, $A(G) = [a_{ij}]$, donde a_{ij} es el número de aristas que unen a los vértices v_i, v_j .*

Ejemplo 28 *Gráfica y matriz de adyacencia*

$$\begin{array}{c}
 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 2 & 1 & 1 \\
 2 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Propiedades. Sean M y A las matrices de incidencia y adyacencia de la gráfica G , respectivamente.

1. La suma de todas las celdas de una columna de M es 2
2. La suma de todas las celdas de una columna de A es el grado del vértice, esto es, el número de aristas que lo tienen por extremo.

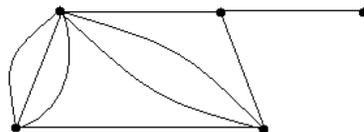
Definición 29 *Sobre subgráficas*

1. Una gráfica H es una subgráfica de G , $H \subseteq G$, si

$$\begin{array}{l}
 V(H) \subseteq V(G) \\
 E(H) \subseteq E(G) \\
 \psi_H \text{ es la restricción de } \psi_G \text{ a } E(H)
 \end{array}$$

En este caso, también se dice que G es una supergráfica de H .

2. Cuando $H \subseteq G$, pero $H \neq G$ se dice que H es una subgráfica propia de G .
3. Una expansión H (subgráfica o supergráfica) de G , se da cuando $V(H) = V(G)$.
4. Quitando los lazos y dejando sólo una arista, de las que halla en cada par de vértices adyacentes, se tiene una subgráfica expansión simple de G denominada la gráfica simple subyacente de G .



5. Un subgrafo de recubrimiento H de G , es un subgrafo tal que

$$V(H) = V(G)$$

Definición 30 Supongamos que $V' \subseteq V$, no vacío. La gráfica de G cuyo conjunto de vértices es V' y el conjunto de aristas es está formado por aquellas de $E(G)$, que tienen sus dos extremos en V' , se llama subgráfica de G inducida por V' y se denota por $G[V']$.

Definición 31 La subgráfica $G[V|V'] = G - V'$, de G es la subgráfica que se obtiene removiendo los vértices de V' junto con las aristas incidentes.

En particular, si $V' = \{v\}$, $G - v$ significa $G - \{v\}$.

Definición 32 Supongamos que E' es un subconjunto no vacío de E . La subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es el conjunto de extremos en E' y cuyo conjunto de aristas es E' , se llama la subgráfica de G inducida por E' , la cual denotamos por $G[E']$, esto es, la subgráfica de G inducida por el conjunto de aristas E' .

Definición 33 La subgráfica expansión de G cuyo conjunto de aristas es $E|E'$, se denota simplemente por $G + E'$, la cual se obtiene de G al remover las aristas en E' .

Definición 34 Similarmente, la gráfica obtenida de G , en la que se agregan las aristas de E' , se denota por $G + E'$.

Definición 35 Dos subgráficas G_1 y G_2 se dicen ajenas, si no tienen vértices en común.

Definición 36 Se dicen ajenas en cuanto a las aristas, si no tienen aristas en común.

Definición 37 La unión $G_1 \cup G_2$, de G_1 y G_2 , es la subgráfica donde el conjunto de vértices es $V(G_1) \cup V(G_2)$ y el conjunto de aristas es $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Definición 38 En el caso de gráficas ajenas, la unión se suele representar por $G_1 + G_2$.

Definición 39 La intersección $G_1 \cap G_2$, se define análogamente, solo se pide que, al menos, tengan un vértice en común, para que la intersección sea no vacía.

De la relación entre la suma de los grados y el número de aristas, en una gráfica, se tiene el siguiente:

Corolario 40 En cualquier gráfica, el número de vértices de grado impar es par.

Definición 41 Una gráfica G es k -regular si

$$d(v) = k$$

para todo $v \in V(G)$.

Ejemplo 42 Las gráficas completas K_n y las gráficas bipartitas completas $K_{m,n}$ son regulares. También los k -cubos. En gráfica se tiene el 3-cubo, con 8 vértices.



2.3. Caminos, trayectorias y rutas

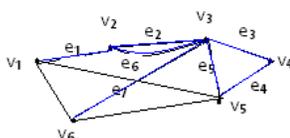
Definición 43 Un camino (walk) en una gráfica G es una sucesión finita, no nula, de vértices y aristas, alternadas. El camino de v_0 a v_k , denotado por (v_0, v_k) , es un camino con $k + 1$ vértices y k aristas:

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$$

cuyos términos son sucesivamente, vértices y aristas, tal que, los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i , con $1 \leq i \leq k$. El origen es v_0 , el final es v_k , y los vértices internos son $v_1 \dots v_{k-1}$. La longitud del camino es k .

Ejemplo 44 En la gráfica se resalta el camino

$$W = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_5 e_5 v_3 e_6 v_2 e_7 v_6$$



Definición 45 Un camino cerrado tiene longitud positiva y su origen y fin son el mismo vértice.

Definición 46 Un paseo (trail) es un camino donde las aristas son diferentes.

Definición 47 Un trayecto o ruta (path) es un paseo donde todos los vértices son distintos.

Definición 48 Un trayecto cerrado con origen y vértices internos, distintos es un ciclo.

Ejemplo 49 Se ilustra un trayecto cerrado y un ciclo:



Trayecto cerrado: $ucvbxgwfwdobu$ Ciclo: $xaubvhx$

Definición 50 Un grafo es conexo si, para cualquier par de sus vértices u y v , existe una (u, v) -trayectoria en el grafo.

Definición 51 Una subgráfica H es maximal con respecto a una propiedad, si H cumple la propiedad y no es subgráfica propia de otro grafo que cumpla la propiedad.

Definición 52 Un subgrafo H es minimal con respecto a una propiedad, si H cumple la propiedad y no existe un subgrafo propio de H que cumpla la propiedad.

Definición 53 Una componente de una gráfica es un subgrafo conexo maximal.

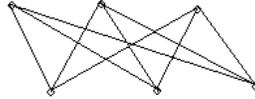
Corolario 54 Una gráfica es conexa si tiene exactamente una componente.

Definición 55 Una gráfica con más de una componente se denomina *disconexo*.

Definición 56 Una gráfica es *bipartita* si el conjunto de sus vértices se puede partir en dos subconjuntos tales que cada arista tiene un extremo en cada uno de esos subconjuntos.

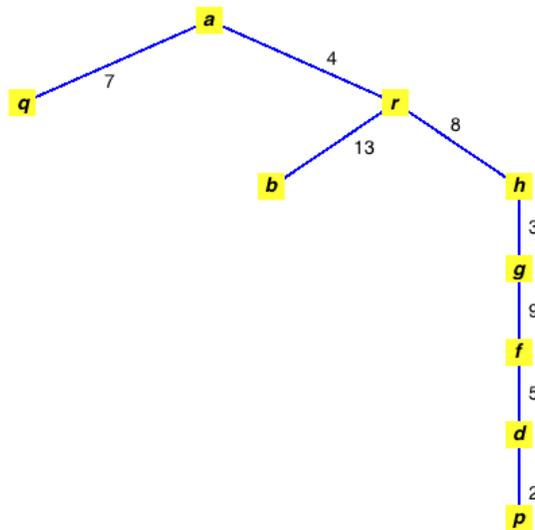
Teorema 57 Una gráfica es bipartita si y sólo si contiene ciclos no impares.

Ejemplo 58



Definición 59 Un árbol es un grafo acíclico conexo.

Ejemplo 60



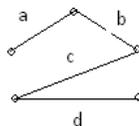
Proposición 61 Si T es un árbol entonces para cualquier par, u y v , de sus vértices, existe una única trayectoria (u, v) .

Proposición 62 Si T es un árbol no trivial, entonces existen al menos dos vértices distintos de grado uno.

Proposición 63 Si T es un árbol con n vértices, entonces el número de aristas es $n - 1$.

Definición 64 Un puente en un grafo es una arista e tal que el número de componentes de $G - e$ es mayor que el número de componentes de G . En particular, si G es conexo entonces e es un puente de G si y solo si $G - e$ es desconexo.

Ejemplo 65 La arista c es un puente, de la gráfica siguiente.



2.4. Problema del conector

Se tienen n ciudades y se quiere diseñar una red de comunicación conectando a todas ellas. Para ciertos pares de ciudades se puede contruir una vía de comunicación directa entre ellas, y se conoce el costo de tal vía. El problema del conector consiste en determinar qué vías de comunicación directa deben construirse, con el fin de que todas la n ciudades queden conectadas a un costo total mínimo.

Es decir, dado un grafo conexo G y una función de costo $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $c(e) > 0$ para toda $e \in E(G)$, el problema del conector consiste en hallar un subgrafo de recubrimiento conexo H tal que

$$c(H) = \sum_{e \in E(H)} c(e)$$

sea mínimo.

2.5. Ruta más corta

Cuando cada arista e de G tiene asociado su peso $w(e)$, tenemos la siguiente:

Definición 66 Una gráfica G , junto con sus pesos en las aristas se denomina gráfica ponderada (weighted graph).

Definición 67 Si H es una subgráfica de una gráfica ponderada G , el peso

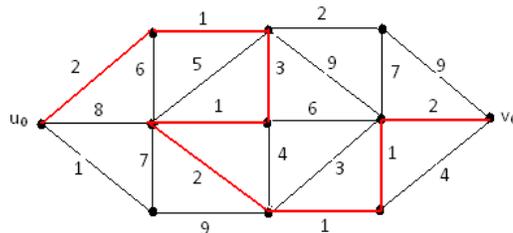
$$w(H) = \sum_{e \in H} w(e)$$

es decir, el peso de H es la suma de los pesos de sus aristas.

Muchos problemas de optimización de cantidades, tienen que ver con encontrar una subgráfica de una gráfica ponderada, de cierto tipo con mínimo (máximo) peso, como el problema de la ruta más corta, que dice que dada una red (ferroviaria) que conecta a varios pueblos o ciudades, se busca determinar la ruta más corta, entre dos pueblos en particular, en la red.

Lo que significa, encontrar en una gráfica ponderada, una ruta de mínimo peso, que conecte dos vértices u_0 y v_0 . Los pesos representan las distancias por la vía entre dos pueblos distintos, conectados directamente, es decir entre vértices distintos adyacentes, por tanto con distancia no negativa.

Ejemplo 68 En la gráfica se resalta la subgráfica que es la (u_0, v_0) ruta de mínimo peso



Notación 69 La longitud de una subgráfica ponderada se representa por $w(H)$.

Definición 70 El mínimo peso de una (u, v) ruta es la distancia entre u y v , la cual se denota por $d(u, v)$.

En las definiciones anteriores y en la formulación del problema de la ruta más corta, se asume que la gráfica G es simple.

Algoritmo 71 Dijkstra

1. Sea

$$\begin{aligned} l(u_0) &= 0 \\ L(v) &= \infty, v \neq u_0 \\ S &= \{u_0\} \\ i &= 0 \end{aligned}$$

2. Para cada $v \in \bar{S}_i$, reemplace $l(v)$ por $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i, v)\}$. Calcule

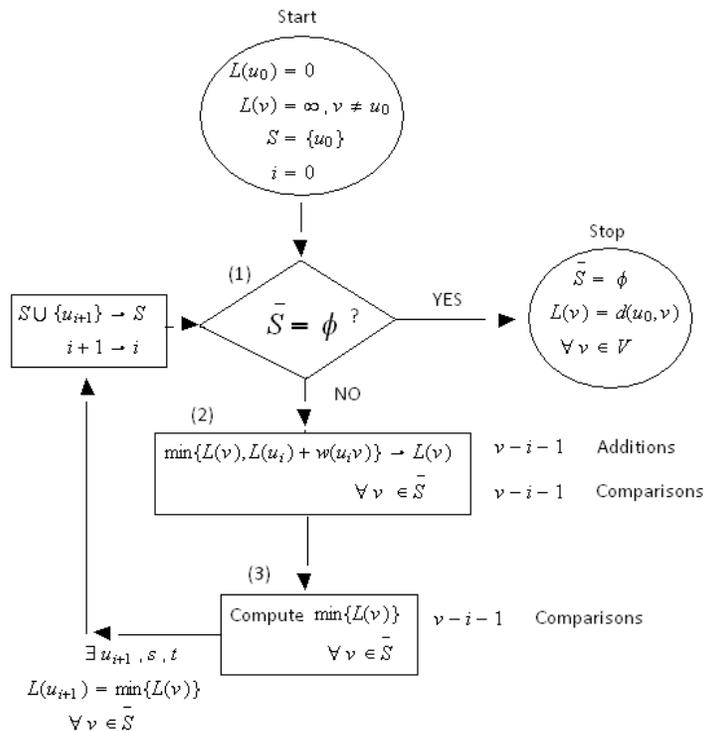
$$\min_{v \in \bar{S}_i} \{l(v)\}$$

y sea u_{i+1} un vértice para el cual este mínimo se alcanza. Sea $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

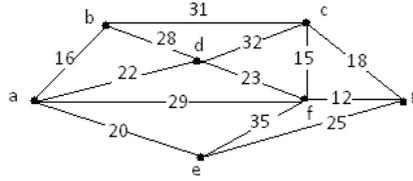
3. Si $i = v - 1$, pare. Si $i < v - 1$, reemplace i por $i + 1$ y vaya al paso 2.

Cuando finaliza el algoritmo, la distancia de u_0 a v está dada por el valor final de $l(v)$. Si el interés es determinar la distancia a un vértice específico v_0 , nos detenemos en cuanto algún u_j es igual a v_0 .

En el siguiente diagrama se presenta el algoritmo de Dijkstra.



Ejercicio 72 Usar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el árbol de expansión de mínimo peso de la siguiente gráfica:



2.6. Árboles de expansión mínima y programación lineal

Hay una conexión interesante entre los árboles de expansión mínima y la programación lineal, esto es, hay un problema de programación lineal para el cual cada árbol de expansión mínima proporciona una solución óptima. Considere el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar: $c^T x$

Sujeta a:

$$x(\gamma(S)) \leq |S| - 1 \quad \text{para todo } S \quad \emptyset \neq S \subset V$$

$$x(E) = |V| - 1$$

$$x_e \geq 0 \quad \text{para todo } e \in E$$

Teorema 73 Sea x^0 el vector característico de un MST con respecto a los costos c_e . Entonces x^0 es una solución óptima del problema anterior.

Demostración 1 Se reformula el problema para tener un manejo más fácil, como sigue

Minimizar: $c^T x$

Sujeta a:

$$x(A) \leq |V| - \kappa(A) \quad \text{para todo } A \subset E$$

$$x(E) = |V| - 1$$

$$x_e \geq 0 \quad \text{para todo } e \in E$$

La afirmación es que ambos problemas tienen las mismas soluciones factibles, y de ahí que las mismas soluciones óptimas. Cada restricción de la forma

$$x(\gamma(S)) \leq |S| - 1$$

es consecuencia de

$$x(A) \leq |V| - \kappa(A)$$

tomado $A = \gamma(S)$. Nótese que

$$\kappa(\gamma(S)) \geq |V \setminus S| + 1$$

Recíprocamente, cada restricción

$$x(A) \leq |V| - \kappa(A)$$

es consecuencia de una combinación de las restricciones

$$x(\gamma(S)) \leq |S| - 1 \quad \text{para todo } S \quad \emptyset \neq S \subset V$$

$$x(E) = |V| - 1$$

Sea $A \subset E$ y S_1, \dots, S_k los conjuntos de nodos de las componentes de la subgráfica (V, A) . Entonces

$$x(A) \leq \sum_{i=1}^k x(y(S_i)) \leq \sum_{i=1}^k (|S_i| - 1) = |V| - k$$

Es suficiente probar que x^0 es óptima para el problema reformulado, es más, que es suficiente probar que esto es cierto cuando x^0 es el vector característico del árbol de expansión T generado por el algoritmo Kruskal. La optimalidad del vector característico se prueba mostrando que dicho algoritmo puede usarse para calcular una solución factible del problema dual que satisface la holgura complementaria con x^0 . Para facilitar la construcción del problema dual, reemplazamos el objetivo de minimizar $c^T x$, por maximizar $-c^T x$. De ahí que el problema dual es

$$\text{Minimizar: } \sum_{A \subset E} (|V| - \kappa(A)) y_A$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \sum (y_A : e \in A) &\geq -c_e && \text{para todo } e \in E \\ y_A &\geq 0 && \text{para todo } A \subset E \end{aligned}$$

Nótese que no se requiere que y_E sea no-negativo. Sea e_1, \dots, e_m el orden en el cual el algoritmo Kruskal considera los arcos. Sea

$$R_i = \{e_1, \dots, e_i\}$$

para $1 \leq i \leq m - 1$ y

$$y_{R_i}^0 = c_{e_{i+1}} - c_{e_i}$$

para $1 \leq i \leq m - 1$ y

$$y_{R_m}^0 = -c_{e_m}$$

Se sigue del orden en los arcos que

$$y_A^0 \geq 0$$

para $A \neq E$. De la primera restricción del problema dual, con $e = e_i$ se tiene

$$\sum (y_A^0 : e \in A) = \sum_{j=i}^m y_{R_j}^0 = \sum_{j=i}^m (c_{e_{j+1}} - c_{e_j}) - c_{e_m} = -c_{e_i} = c_e$$

En otras palabras, todas las restricciones se cumplen con igualdad. Falta mostrar que y^0 es una solución factible del problema dual, y que por holgura complementaria, la condición

$$x_e^0 > 0$$

implica que la igualdad en la respectiva restricción dual, se satisface. Finalmente, falta verificar que

$$y_A^0 > 0$$

implica que x^0 satisface la primera restricción, con igualdad. Para ello, se sabe que

$$A = R_i$$

para alguna i . Si la restricción no se cumple con igualdad, entonces hay una arista en R_i , cuya adición a

$$T \cap R_i$$

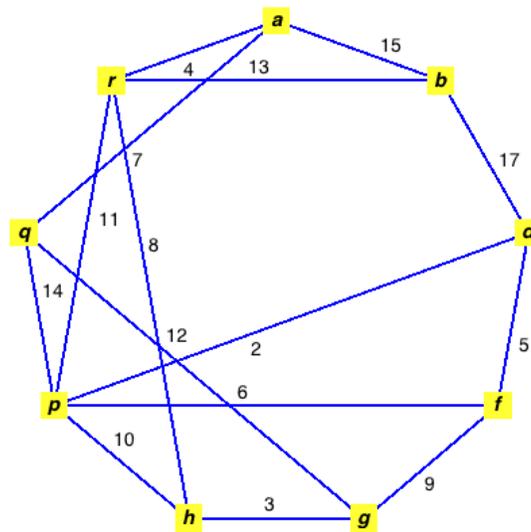
reduce el número de componentes de

$$(V, T \cap R_i)$$

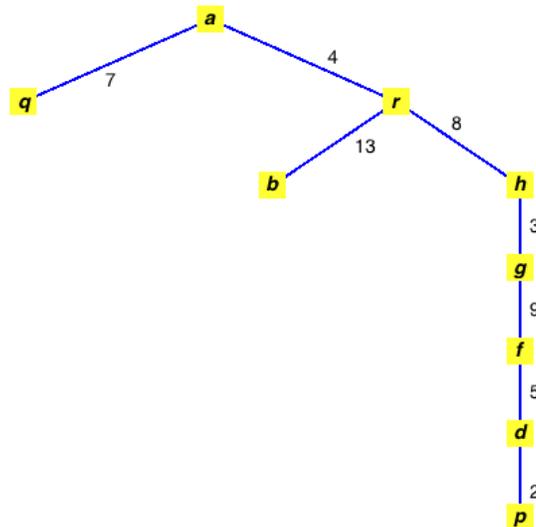
Pero una arista de ese tipo tendría sus extremos en dos componentes distintas de $(V, T \cap R_i)$, de ahí que se habría agregado a T , debido al algoritmo Kruskal. Por lo tanto, x^0 y y^0 satisfacen las condiciones de holgura complementaria. De donde se tiene que x^0 es una solución óptima del problema reformulado y el problema original. ■

Recordatorio 74 Dado que cualquier árbol de expansión que proporciona una solución óptima del problema de programación lineal debe ser un MST, y debido a que la demostración anterior solo utiliza el hecho de que T fue generado por el algoritmo Kruskal, esa prueba es una prueba de que dicho algoritmo calcula un MST.

Ejemplo 75 Encontrar el MST por el algoritmo Kruskal, para el grafo²



Solución 76 A continuación se muestra el MST, cuya longitud es 51.



²Tomado de Cook, W. et.al. (1997) Combinatorial Optimization, p. 17

Problema 77 DINERO EN MOVIMIENTO³ Jake Nguyen pasa nerviosamente una mano a través de su pelo, alguna vez peinado finamente, se afloja al mismo tiempo su corbata de seda perfectamente anudada y se frota sus manos sudadas en sus, alguna vez pantalones impecablemente planchados. Hoy no ha sido ciertamente un buen día.

Durante los últimos meses, Jake había oído rumores que circulaban en Wall Street - rumores de los labios de banqueros inversionistas y corredores de la bolsa conocidos por su franqueza. Hacían murmuraciones acerca de un próximo colapso de la economía japonesa - las murmuraciones eran porque pensaban que haciendo públicos sus temores acelerarían el derrumbamiento.

Hoy, sus mismos temores se han hecho realidad. Jake y sus colegas se reúnen alrededor de una pequeña televisión dedicada exclusivamente al canal de Bloomberg (canal 315 de Sky). Jake mira fijamente con escepticismo y escucha los horrores que tienen lugar en el mercado japonés. El mercado japonés está arrastrando todos los mercados financieros de los demás países Asiático Orientales en su vertiginosa caída. Jake se queda paralizado. Como gerente de la inversión extranjera Asiática para Grant Hill Associates, una pequeña empresa de inversión de la Costa Oriental que se especializa en la comercialización del dinero. Jake lleva la responsabilidad personal por cualquier impacto negativo de este colapso. Y Grant Hill Associates experimentará impactos negativos.

Jake no había hecho caso de las murmuraciones que advertían un derrumbamiento japonés. En cambio, él había aumentado en gran manera el riesgo de Grant Hill Associates de quedar fuera del mercado japonés. Debido a que el mercado japonés se había comportado mejor de lo esperado durante el último año, Jake había aumentado las inversiones en Japón de 2.5 millones de a 15 millones de dólares, hace sólo un mes. En ese momento, la paridad del dólar era de 80 yens.

No más. Jake comprende que la devaluación de hoy del yen significa que un dólar equivaldrá a 125 yens. El podrá liquidar las inversiones sin pérdida en yens. La pérdida de dólares cuando convierta los yens en dólares americanos sería enorme. Jake respira profundamente, cierra los ojos y mentalmente se prepara para reparar los severos daños.

La meditación de Jake es interrumpida por una potente voz que lo llama desde una esquina de su gran oficina. Grant Hill, el presidente de Grant Hill Associates, vocifera “¡Nguyen, esto es un infierno!”

Jake da un brinco y mira renuientemente hacia la esquina de la oficina donde aparece la figura de Grant Hill hecho una furia. Jake entonces se alisa el cabello, se aprieta la corbata, y camina aprisa por la oficina. Grant Hill le sale al paso a Jake, lo mira fijamente a los ojos y le sigue gritando, “¡No me diga ni una sola palabra, Nguyen! No hay pretextos; ¡simplemente arregle este desastre! ¡Saque todo nuestro dinero de Japón! ¡Mi intestino me dice que éste es sólo el principio! ¡Invierta el dinero en bonos americanos confiables! ¡AHORA! ¡Y no olvide sacar nuestro dinero en efectivo de Indonesia y Malasia!”

Jake tiene bastante sentido común para no hacer ningún comentario. Él inclina su cabeza, gira sobre los tacones de sus zapatos, y prácticamente sale volando de la oficina.

Seguramente atrás de su escritorio, Jake empieza a formular un plan para sacar sus inversiones de Japón, Indonesia y Malasia. Sus experiencias de invertir en mercados extranjeros le han enseñado que jugar con millones de dólares, así como sacar dinero de un mercado extranjero es casi tan importante como sacar dinero del mercado. Los socios de la banca de Grant Hill Associates cobran diferentes honorarios por la transacción de convertir un tipo de dinero en otro y remitir grandes sumas de dinero alrededor del mundo. Y ahora, las cosas han empeorado, los gobiernos en el Asia Oriental han impuesto límites muy estrictos en la cantidad de dinero que un individuo o compañía puede cambiar del dinero doméstico a una divisa particular y pueda sacarlo del país. El objetivo de esta dramática medida es reducir la salida de inversiones extranjeras de esos países para prevenir un colapso total de las economías en la región. Debido a las posiciones en efectivo de Grant Hill Associates de 10.5 billones de rupias en Indonesia y 28 millones de ringgits en Malasia, junto con los yenes, no está claro cómo deben convertir esas divisas en dólares.

³Tomado y adaptado de Hillier, F., Hillier, M., Hillier, and Lieberman, G. (2001) Caso 6.2

Jake quiere encontrar el método más efectivo en costos, para convertir estas posiciones en dólares. En el sitio Web de su compañía, él puede encontrar siempre los tipos de cambio, en todo momento para la mayoría de las monedas en el mundo, vea la tabla 1.

De \ A	Yen	Rupia	Ringgit	US Dólar	C Dólar	Euro	Libra	Peso
Yen japonés	1	50	0.04	0.008	0.01	0.0064	0.0048	0.0768
Rupia hindú		1	0.0008	0.00016	0.0002	0.000128	0.00096	0.001536
Ringgit malasio			1	0.2	0.25	0.16	0.12	1.92
US Dólar				1	1.25	0.8	0.6	9.6
C Dólar					1	0.64	0.48	7.68
Euro						1	0.75	12
Libra británica							1	16
Peso mexicano								1

Tabla 1. Tipos de cambio de divisas

La tabla anterior indica que, por ejemplo, 1 yen japonés equivale a 0.008 dólares americanos. Haciendo unas llamadas telefónicas, conoce los costos de la transacción que su compañía debe pagar por las grandes transacciones de divisas durante estos tiempos críticos, vea la tabla 2.

De \ A	Yen	Rupia	Ringgit	US Dólar	C Dólar	Euro	Libra	Peso
Yen japonés	–	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.25	0.5
Rupia hindú		–	0.7	0.5	0.3	0.3	0.75	0.75
Ringgit malasio			–	0.72	0.7	0.4	0.45	0.5
US Dólar				–	0.05	0.1	0.1	0.1
C Dólar					–	0.2	0.1	0.1
Euro						–	0.05	0.5
Libra británica							–	0.5
Peso mexicano								–

Tabla 2. Costo por transacción (porcentaje)

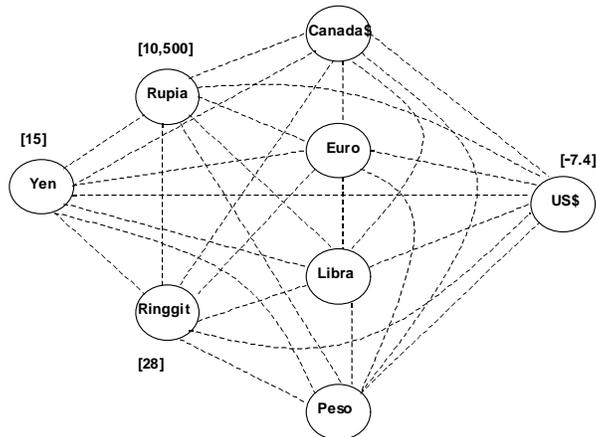
Jake nota que al cambiar una moneda por cualquier otra se produce el mismo costo de la transacción que para una conversión inversa. Finalmente, Jake averigua las cantidades máximas de dineros domésticos que su compañía tiene permitido convertir a otros tipos de moneda en Japón, Indonesia y Malasia, vea la tabla 3.

De \ A	Yen	Rupia	Ringgit	US Dólar	C Dólar	Euro	Libra	Peso
Yen japonés	–	5,000	5,000	2,000	2,000	2,000	2,000	4,000
Rupia hindú	5,000	–	2,000	200	200	1,000	500	200
Ringgit malasio	3,000	4,500	–	1,500	1,500	1,500	1,000	1,000

Tabla 3. Límites de transacciones en miles de dólares equivalentes

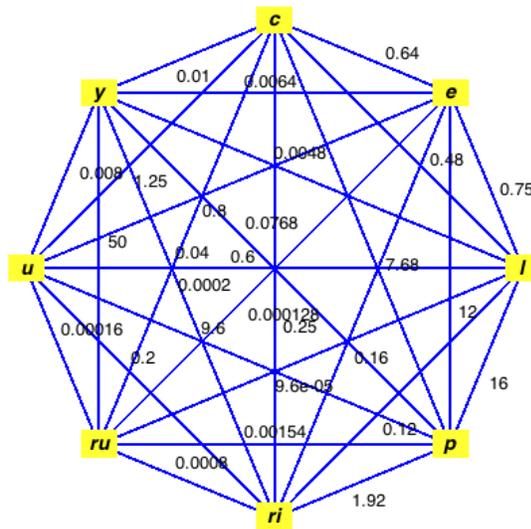
El problema de Jake se formula como un problema de flujo a costo mínimo. La red se muestra a continuación. Hay tres nodos de suministro – Yen, Rupia y Ringgit. Hay un nodo de demanda – el nodo Dólares

Americanos.



Ejercicio 78 Complete la información faltante en la red anterior y encuentre la ruta de costo mínimo de los tres orígenes (yen, rupia y ringgit) al destino (USD).

Solución 79 La gráfica queda como sigue



MODIFICAR

2.7. El problema del cartero chino⁴

El trabajo de un cartero es recoger el correo en la oficina postal, entregarlo a los destinatarios, y regresar a la oficina postal. Se espera que recorra cada calle de su área al menos una vez, de modo que camine lo menos posible.

En una gráfica ponderada, se define el peso del paseo ponderado

$$v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_0$$

⁴Tomado de Bondy and Murty, p. 62

como

$$\sum_{i=1}^n w(e_i)$$

El problema del cartero chino es encontrar un paseo con mínimo peso en una gráfica conectada ponderada, con pesos no-negativos, el cual será óptimo.

Si la gráfica G es euleriana, es decir que contiene un paseo euleriano, entonces cualquier paseo euleriano de G es un paseo óptimo. Recordamos que un paseo se denomina euleriano si recorre cada arco o arista exactamente una vez.

El problema en cuestión se resuelve con el algoritmo Fleury, el cual construye un paseo euleriano a partir de un trayecto, sujeto a la única condición de que, en cada etapa, un arco puente de la subgráfica no recorrida se toma si y sólo si no hay alternativa.

2.8. Algoritmo Fleury

1. Escoger un vértice arbitrario v_0 y establecer el trayecto

$$W_0 = v_0$$

2. Supóngase que el trayecto

$$W_i = v_0 e_1 v_1 \dots e_i v_i$$

se ha escogido, entonces elegir

$$e_{i+1}$$

de

$$E \setminus \{e_1, \dots, e_i\}$$

de modo tal que

i) e_{i+1} es incidente con v_i

ii) A menos que no haya una alternativa, e_{i+1} no es una arista de corte (puente) de

$$G_i = G - \{e_1, \dots, e_i\}$$

3. Detenerse cuando el paso 2 no puede implementarse mas.

Por su definición el algoritmo de Fleury construye un trayecto en G .

Teorema 80 Si G es euleriana, entonces un trayecto en G construido mediante el algoritmo de Fleury es un paseo euleriano de G .

2.9. El problema del agente viajero

Consiste en visitar cierto número de ciudades y regresar al punto de partida. Conocidos los tiempos de viaje entre cada par de ciudades, se quiere hacer un itinerario para que se visite cada ciudad sólo una vez y emplear el menor tiempo posible en regresar al punto de partida. En términos de grafos, se desea encontrar un ciclo hamiltoniano con peso mínimo en una gráfica completa ponderada. Un ciclo de esa naturaleza se le denomina óptimo. A diferencia del problema de la ruta más corta y del problema del conector, no se conoce un algoritmo eficiente para resolver el problema del agente viajero. Por lo que, se desea encontrar una solución razonablemente buena (no necesariamente óptima).

Un enfoque posible es encontrar un primer ciclo hamiltoniano C , después buscar otro de menor peso que pueda sustituir al primero.

Sea

$$C = v_1v_2 \dots v_nv_1$$

un ciclo hamiltoniano. Para todo i y j tales que

$$1 < i + 1 < j < n$$

se puede obtener un nuevo ciclo hamiltoniano

$$C_{ij} = v_1v_2 \dots v_iv_jv_{j-1} \dots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2} \dots v_nv_1$$

quitando las aristas

$$v_iv_{i+1}$$

y

$$v_jv_{j+1}$$

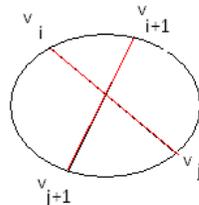
pero agregando

$$v_iv_j$$

y

$$v_{i+1}v_{j+1}$$

como se muestra en la siguiente figura



Tomado de Bondy and Murty (1976)

Si, para algunos i y j

$$w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1})$$

el ciclo C_{ij} mejora, reduce el peso de C .

Después de realizar una sucesión de modificaciones como la explicada, se llegará a un ciclo que ya no pueda mejorarse por este método. Este ciclo final, no será óptimo, pero se supone razonablemente que será mucho mejor. Para mayor precisión, el procedimiento anterior puede realizarse varias veces, iniciando en con ciclos diferentes, en cada ocasión.

Ejemplo 81 Considere la siguiente tabla de distancias (en millas), por avión, entre seis ciudades principales, Londres, Mexico City, New York, Paris, Peking y Tokyo:

	L	MC	NY	PA	PE	T
L	—	5558	3469	214	5074	5959
MC	5558	—	2090	5725	7753	7035
NY	3469	2090	—	3636	6844	6757
PA	214	5725	3636	—	5120	6053
PE	5074	7753	6844	5120	—	1307
T	5959	7035	6757	6053	1307	—

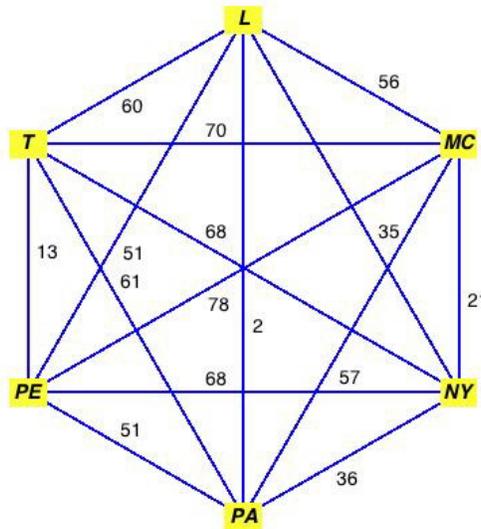
Tomado de Bondy and Murty (1976)

Use el enfoque explicado, iniciando con el ciclo

L, MC, NY, PA, PE, T

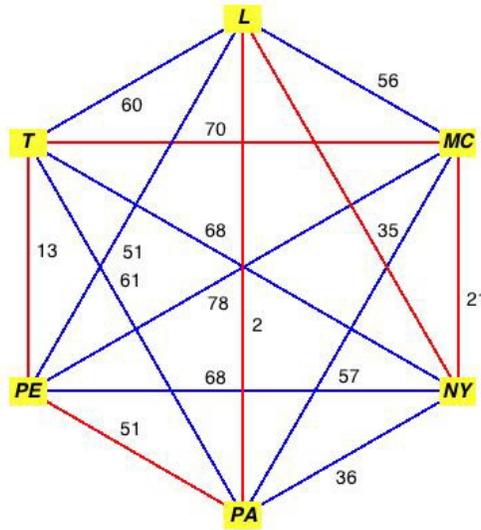
para encontrar un ciclo hamiltoniano desde L, de menor peso.

Solución 82 La gráfica correspondiente a la tabla de distancias es



Grafo hamiltoniano

el paseo hamiltoniano se resalta en la figura



el cual se obtiene de las iteraciones:

<i>i</i>	<i>Paseo hamiltoniano</i>	<i>Aristas que se quitan</i>	<i>Aristas que se agregan</i>
0	<i>L, MC, NY, PA, PE, T, L</i>		
1	<i>LPA, NY, MC, PE, T, L</i>	<i>LMC, PAPE</i>	<i>LPA, MCPE</i>
2	<i>L, PA, NY, MC, T, PE, L</i>	<i>TL, MCPE</i>	<i>LPE, MCT</i>
3	<i>L, PA, PE, T, MC, NY, L</i>	<i>LNy, PAPE</i>	<i>NYL, PAPE</i>

3. Bibliografía

Balderas, P. y Sánchez, G. (coords., 2011) Ingeniería de Sistemas. Investigación e Intervención. México: Plaza y Valdés- Facultad de Ingeniería, UNAM, 67 – 92

Bondy, J. A. and Murty, U.S.R. (1982) Graph Theory with Applications. N.Y. North-Holland, 5a.

Chartrand, G. (1977) Introductory Graph Theory. New York: Dover Publications, Inc. pp. 294

Cook, W., Cunningham, W. , Pulleyblank, W., and Schrijver, A. (1998) Combinatorial optimization. New York : J. Wiley.

Espinosa Armenta, R. (2010) Matemáticas Discretas. México: _Alfaomega, pp. 467

Harary, F. (1969) Graph Theory. Massachussets: Addison-Wesley, pp. 274

Harary, F. Norman, F. y Cartwright D. (1965, 1978) Structural Models: an Introduction to the Theory of Directed Graph. New York: John Wiley & Sons, pp. 415

Ortega, James M. (1987) Matrix Theory. A second course. The University Series in Mathematics. New York: Plenum Press, pp. 262

Murthy, D., Page, N. & Rodin, E. (1990) Mathematical Modelling. A tool for Problem Solving Engineering, Physical, Biological and Social Sciences. N.Y.: Pergamon Press.

Slomson, Alan (1991) An Introduction to Combinatorics. London: Capman & Hall/CRC

POR CONSIDERAR

Pierluigi Crescenzi, Viggo Kann, Magnús Halldórsson, Marek Karpinski, Gerhard Woeginger, A Compendium of NP Optimization Problems.

Christos H. Papadimitriou, and Kenneth Steiglitz; Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity; Dover Pubns; (paperback, Unabridged edition, July 1998) ISBN 0486402584.