FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
PROGRAMA DE POSGRADO EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

NOTAS DE CLASE
TEORÍA DE INVENTARIOS
SEMESTRE: 2016-2
DRA. PATRICIA E. BALDERAS CAÑAS

Parte I
SISTEMAS DE INVENTARIOS[1]

1. Conceptos básicos de modelación y toma de decisiones

Un modelo es una abstracción y simplificación de un problema real, idealmente, incorpora los elementos y relaciones esenciales del mundo real. Usar un modelo significa obtener conclusiones lógicas que se derivan del mismo, estas conclusiones deben ser una guía efectiva para la toma de decisiones si el modelo está diseñado y resuelto adecuadamente. La toma de decisiones involucra la integración de información cuantitativa, obtenida del modelo, con el juicio intuitivo acerca de los factores cualitativos, como la moral y el liderazgo en una organización, las restricciones de empleo, las acciones afirmativas, la contaminación y otras áreas de responsabilidad social.

Dado que la mente humana no puede considerar cada aspecto de un problema empírico, algunos atributos del problema deben ignorarse si una decisión se va a tomar. Esto es, los procesos de abstracción y simplificación son pasos necesarios en la solución de cualquier problema humano.

Después de que el tomador de decisiones ha seleccionado los factores críticos, o variables, de la situación empírica, se les combina de alguna manera lógica de modo que formen un modelo del problema. Un modelo es una representación simplificada de una situación empírica. Idealmente, le quita a un fenómeno natural su confusa complejidad y duplica la conducta esencial del fenómeno natural con algunas variables que están simplemente relacionadas. Entre más simple sea el modelo obtenido, lo mejor para el que toma decisiones, el modelo sirve como una razonable y confiable contraparte del problema empírico.

Ventajas de un modelo simple:

1. Es económico por cuanto al tiempo y pensamiento.
2. Puede ser entendido fácilmente por el que toma decisiones.
3. En caso necesario, el modelo puede modificarse rápida y efectivamente.

Después que el modelo se ha construido, se pueden derivar conclusiones acerca de su comportamiento por medio del análisis lógico. El que toma decisiones basa entonces sus acciones o decisiones en estas conclusiones.

Dos fuentes importantes de error en el uso de modelos para la toma de decisiones son la exclusión de variables importantes y los errores al definir las relaciones entre las variables. Por ejemplo, supóngase que puede esperarse una pérdida del 40 %, en los rendimientos de un proceso de producción, debida a especificaciones restringidas inusuales. La omisión de este factor en el análisis daría por resultado que el modelo resultante no representaría la situación adecuadamente, para los propósitos de decisión, de hecho, podría tomarse una decisión equivocada.

La técnica apropiada para describir y relacionar las variables seleccionadas depende en gran medida de la naturaleza de las variables. Si las variables son susceptibles de alguna forma de medición, y particularmente si pueden

[1]Notas basadas principalmente en Love, S. (1979) *Inventory Control*. New York: McGraw-Hill Book Company.

dárseles una representación cuantitativa, entonces hay fuertes razones para seleccionar una representación matemática del modelo. Primero, porque hay una disciplina inherente rigurosa en las matemáticas que asegura un procedimiento metódico por parte del investigador. Se debe ser específico acerca de qué variables se han seleccionado y qué relaciones se asume que existen entre ellas. Segundo, la matemática es una poderosa técnica para relacionar variables y derivar conclusiones lógicas a partir de premisas dadas. Las matemáticas, combinadas con las modernas computadoras, hacen posible el manejo de los problemas que requieren modelos de gran complejidad y facilita el proceso de toma de decisiones, donde el análisis cuantitativo es aplicable.

El análisis cuantitativo se ha extendido a muchas áreas de las operaciones de negocios de las empresas y se ha vuelto un modo efectivo de enfocar ciertos problemas de decisión.

Para tomar una decisión, se establece el criterio, se seleccionan alternativas, se determina un modelo para evaluar las alternativas y seleccionar la mejor alternativa.

Las decisiones pueden caracterizarse conforme se toman bajo certidumbre o incertidumbre, dependiendo de si o no los factores principales se asumen como conocidos. La toma de decisiones bajo incertidumbre involucra el uso de probabilidades para expresar la probabilidad de eventos inciertos.

Los problemas de decisión pueden clasificarse como simples (si hay pocas variables importantes), complejos (si hay muchas), o dinámicos (si las decisiones se interrelacionan con el transcurso del tiempo).

A continuación se resume la clasificación anterior, para ubicar los modelos de inventario que se abordarán en este curso, respecto a si o no la demanda es conocida.

Variables principales en un problema de decisión		
Problema de decisión	Certidumbre	Incertidumbre
Simple	Modelos de caso	Análisis de decisión (árboles de decisión)
Complejo	Modelos de caso Programación lineal y entera	Simulación
Dinámico	Modelos de inventario Modelos PERT (trayectorias críticas)	Simulación Modelos de inventario Modelos de líneas de espera

1.1. Problemas simples

Todos los problemas son simplificados al construir un modelo para cualquier análisis. Si de esto resulta sólo un número pequeño de factores o variables y relativamente pocas alternativas, entonces el modelo se denomina simple.

Un modelo de caso o escenario es un modelo de un problema de decisión que se analiza ensayando una serie de casos (posibles resultados o escenarios) usando diferentes alternativas o supuestos. El modelo no está programado para encontrar directamente "la mejor solución". En lugar de eso, el administrador usa el modelo en un proceso de ensayo y error.

Los modelos de optimización usan procedimientos matemáticos para encontrar la solución óptima e incorporan el uso de probabilidades en la toma de decisiones bajo incertidumbre.

1.2. Problemas complejos

Muchos problemas de decisión involucran una gran cantidad de factores o variables importantes, o pueden tener varias alternativas para considerar. Por ejemplo, el problema de decisión de programar el suministro de fábricas a consumidores, a fin de minimizar el costo, involucra cientos de variables y restricciones que pueden tener millones de soluciones.

Los modelos de programación lineal y entera son las técnicas más ampliamente utilizadas para resolver complejos problemas de negocios de este tipo. Usan las técnicas matemáticas para encontrar el máximo (o el mínimo) valor de un objetivo (función), sujeto a un conjunto de restricciones.

Simulación es una técnica para modelar problemas complejos que involucran situaciones con incertidumbre. Se diseña un modelo para reproducir el comportamiento de un sistema. Los modelos de simulación usualmente se analizan con el enfoque de estudio de caso por caso (en contraposición de la optimización).

1.3. Problemas dinámicos

Problemas de decisión dinámicos consideran un tipo particular de complejidad, cuando hay una sucesión de decisiones interrelacionadas a lo largo de varios periodos de tiempo. Algunos tipos son los modelos de inventario para determinar cuando solicitar un inventario y qué tantas existencias se deben tener; PERT o modelos de rutas críticas para la programación de proyectos y los modelos de líneas de espera para problemas que involucran tráfico o acumulación.

1.4. Sistemas de soporte para decisión

Un sistema de soporte para decisión (DSS por sus siglas en inglés), es un sistema computarizado integrado diseñado para ayudar en la toma de decisiones. Un DSS incorpora generalmente un modelo (alguno de los señalados arriba), y el sistema computarizado desempeña los cálculos necesarios para resolver el modelo. Generalmente, es más que un modelo, incluye además una base de datos que puede emplearse para proporcionar directamente información al administrador (o al modelo), mediante gráficas o diversos reportes que son fáciles de entender por el usuario. Desde luego que incorpora también tecnología computacional para facilitar el análisis que se requiere en el problema de decisión o para indagar en la base de datos la información requerida.

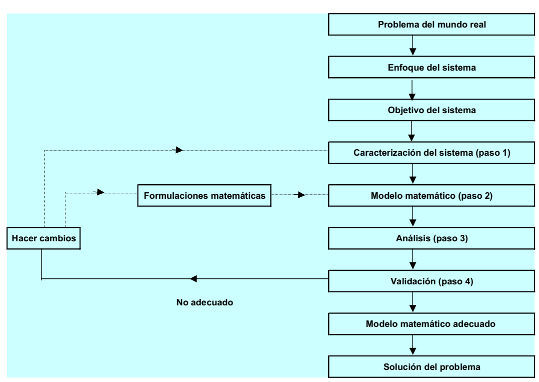
1.5. Modelación matemática

Es el proceso mediante el cual un sistema físico se traduce en un modelo matemático. Esta modelación considera la naturaleza de la modelación matemática y el enfoque del proceso de modelación.

1.5.1. Enfoque sistémico

Ofrece un marco teórico que permite ver el problema inmerso en un sistema. Se identifican claramente las características del sistema que son fundamentales para el problema. El proceso de construcción del modelo matemático puede verse de manera simple como un proceso iterativo de múltiples etapas. Las etapas principales en la traducción de un problema del mundo real a la descripción matemática según Murthy and Page (1990, 20) son las siguientes.

1. Formulación del problema
2. Descripción matemática
3. Análisis matemático
4. Interpretación del análisis para obtener una solución



1.5.2. Flujos de efectivo y valor presente[2].

En los problemas que involucran flujos de efectivo en varios años, como por ejemplo inversiones de capital que generan flujos en el tiempo, el periodo de tiempo en que se recibe el dinero es un aspecto importante, de su valor.

[2] Adaptado del Apéndice, Capítulo 1, Bonini.

No es lo mismo recibir 1,000 U.M. ahora que dentro de cinco años. Si no se necesita inmediatamente ese efectivo, se podría invertir y tener algo más que 1,000 U.M. dentro de cinco años.

Un enfoque general de los problemas relacionados con flujos de efectivo en el tiempo es convertirlos a sus equivalentes en valor presente, usando un descuento o tasa de interés y calcular el interés compuesto. El valor presente de 1,000 U.M. a cinco años, recibidos hoy usando una tasa de descuento del 6 % es

$$\frac{1,000}{(1+0{,}6)^5}$$

Lo anterior significa que si se invierten 747.26 U.M. en una cuenta bancaria a una tasa de interés del 6 % (compuesta anualmente), se tendrán 1,000 U.M. al final de los cinco años.

En general, el valor presente de una cantidad A, con una tasa de descuento r, recibido en n años es

$$\frac{A}{(1+r)^n}$$

Algunas ocasiones se tienen varios flujos a lo largo de cierto número de años, con la misma tasa. Por ejemplo, el valor presente de A recibidos al final del año 1, más B recibido al final del año 2 es

$$\frac{A}{(1+r)^1}+\frac{B}{(1+r)^2}$$

1.6. Análisis y construcción de modelos de inventario[3]

Enseguida se hace una definición de inventario, con el objetivo de hacer un control o manejo administrativo del mismo.

Definición 1 *Un inventario es la cantidad de bienes o materiales en el control de una empresa, que se mantienen por un tiempo en un estado relativamente ocioso o inproductivo, en espera de un uso posterior o a la venta.*

La definición anterior sugiere que la existencia de un inventario tiene que ver con dos procesos el *suministro* y la *demanda*. El primero, usualmente precede al segundo y contribuye con bienes al inventario, mientras que la demanda le sigue y reduce el nivel del inventario. Ambos procesos, suministro y demanda suelen ocurrir acompañadamente.

La definición anterior excluye a los oleoductos y gasoductos, porque no satisfacen una demanda mientras se encuentran en las tuberías. Los bienes se convierten en inventarios cuando se mantienen sin uso, lo cual no sucede con los ductos en general.

Las funciones de un inventario se pueden agrupar en cinco categorías:

1. Por razones de mercado. Por ejemplo cuando la disponibilidad de un bien proporciona una ventaja económica.
2. Para protegerse del faltante de un bien. Debido principalmente a que los procesos de suministro y demanda fluctúan arbitrariamente, se tiene el riesgo de que ocurran faltantes y ocasionar molestias a los clientes, por ejemplo.
3. Para tener operaciones sin contratiempos. Por ejemplo, con los cambios en la demanda de productos que se venden por temporadas.
4. Para tener un tamaño del pedido, económico. Lo cual supone hacer una decisión entre el tamaño de un pedido y el número de veces que se hace el pedido, en condiciones diversas, por ejemplo, cuando el precio de los bienes depende del volumen de compra.
5. Para tener un sistema de control del inventario, económico.

En el control de un inventario, como un proceso de decisión, se destacan las siguientes acciones.

1. Establecer el criterio a usarse. Por ejemplo, minimizar los costos por mantener un inventario.

[3] Bonini, C.P., Asuman, W. H., y Bierman, H. Jr. Quantitative Analysis for Management. Chicago: McGraw Hill. IRWIN Series, 1997(9), capítulo 1.

2. Seleccionar un conjunto de alternativas para consideración.

3. Determinar el modelo a usarse y los valores de los parámetros del proceso. Por ejemplo, en una cadena de suministro, los costos variables por mantener una unidad en inventario son

$$\text{Costos variables} = K \text{ (costo unitario por ordenar)} + h(\text{inventario promedio})$$

   Los parámetros K y h, deben determinarse para utilizar el modelo.

$$\begin{aligned} K &= \text{costo unitario por ordenar} \\ h &= \text{costo unitario por mantener} \end{aligned}$$

4. Determinar qué alternativa optimiza (es decir, produce el mejor valor), según el criterio establecido en el punto 1.

1.7. Componentes básicas de un sistema de inventario

El inventario existe porque las tasas de suministro y demanda difieren, generalmente, y cuando se requiere disponer de los bienes involucrados, almacenados en algún lugar. Dichas tasas se representan como

$$s(t), d(t)$$

respectivamente. El nivel del inventario resultante, de los procesos de suministro y demanda, lo representamos con

$$Q(t)$$

Una manera de relacionar las tres cantidades anteriores es mediante la expresión

$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t [s(\tau) - d(\tau)]\, d\tau$$

Los costos y beneficios relacionados con un inventario son los costos por almacenar una unidad de ese inventario h, por unidad de tiempo; los costos por faltantes p, por unidad de tiempo; los costos por colocar o hacer un pedido K, ordenar, o simplemente los costos por ordenar; los costos por comprar, cuando se tienen descuentos en función del volumen del pedido y los costos por el sistema de inventario, que dependen de la cantidad y calidad del esfuerzo realizado hacer administrar el inventario.

1.8. Clasificación de los sistemas de inventario

De acuerdo a la forma en cómo ocurren los procesos de suministro y demanda, se da la clasificación siguiente

Clase	Inventario $Q(t)$	Suministro $s(t)$	Demanda $d(t)$	Valor $\frac{\%}{dolar}$
I	Materias primas	suministrador	producción	25
II	trabajo en proceso	producción	producción	25
III	bienes terminados	producción	mayorista	19
IV	mayoreo	manufacturador	minorista	12
V	menudeo	mayorista	consumidor	19

1.9. Ejemplos[4]

Ejemplo 2 *Computronics es un fabricante de calculadoras, actualmente fabrica 200 semanales. Una componente para todas las calculadoras es una pantalla de cristal líquido (PCL), que la compañía compra a Display, Inc. (DI), a 1*

[4]Tomados de Hillier, F., Hillier, M. and Lieberman, G. (2000) *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Boston: Irwin McGraw-Hill.

U.M. por PCL. La administración de Computronics quiere evitar cualquier escasez de PCL, ya que esto interrumpiría la producción, DI garantiza un tiempo de entrega de $\frac{1}{2}$ semana en cada orden. La colocación de cada orden se estima que requerirá de una hora de tiempo de empleado, con un costo directo de 15 U. M. por hora más gastos indirectos de otras 5 U.M. por hora. Se ha hecho una estimación de que el costo anual por capital ocupado en el inventario de Computronics es 15 % del valor del inventario. Otros costos asociados con el almacenamiento y protección de las PCL en inventario ascienden a 5¢ por PCL por año.

Ejemplo 3 *Kenichi Keneko es el gerente de un departamento de fabricación que usa 400 cajas de remaches al año. Para mantener bajo su nivel de inventario, Kenichi ha estado pidiendo únicamente 50 cajas cada vez. Sin embargo, el proveedor de remaches le ofrece un descuento por pedidos de volúmenes más grandes de acuerdo con la siguiente lista de precios.*

Categoría de Descuento	Cantidad Comprada	Precio (por caja)
1	1 a 99	8.50 U.M.
2	100 a 99	8.00 U.M.
3	1,000 ó más	7.50 U.M.

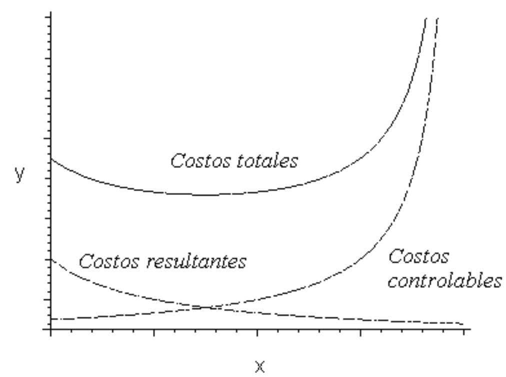
La compañía usa una tasa anual de costo de mantener de 20 % del precio del artículo. El costo total asociado con la colocación de un pedido es 80 U.M. por orden.

Ejemplo 4 *Jennifer's Donut House vende una gran variedad de donas, una de las cuales es la dona suprema que es de tamaño gigante, está rellena de zarzamoras y está cubierta de chocolate con turrón. Esta es una dona gigante que comparte toda la familia. Puesto que la masa requiere de mucho tiempo para esponjarse, la preparación de estas donas comienza a las 4:00 de la mañana, de modo que la decisión de cuántas preparar tiene que tomarse antes de saber cuántas se van a necesitar. El costo de los ingredientes y de la mano de obra requerida para preparar cada una de estas donas es 1 U.M. Su precio de venta es 3 U.M. cada una. Todas las donas que no se venden ese día se venden a una tienda de descuento de la localidad en 0.50 U.M. Durante las últimas semanas, se registró el número de estas donas vendidas en 3 U.M. En la siguiente tabla se resumen estos datos.*

Número Vendido	*Porcentaje de Días*
0	10%
1	15
2	20
3	30
4	15
5	10

1.10. Modelación de decisiones para ordenar

Un modelo es una aproximación a una realidad, por lo que su valor se concentra en la medida en que nos permite hacer decisiones eficaces de manera eficiente. Para el logro de ese valor, un modelo debe captar suficientemente la esencia de esa realidad, sin demasiado esfuerzo y costo. Una medida de ese valor es la suma de los costos asociados con el uso del modelo. Estos costos caen naturalmente en dos categorías. Los *costos controlables*, aquellos en los que se incurre cuando se desarrolla, usa y mantiene un modelo, los cuales están relacionados con el tiempo de los analistas, la recolección de datos, el procesamiento de datos, entre otros. En la construcción de un modelo, se prefiere aproximar los costos controlables, de la manera más simple posible, para evitar que se nos escapen de la mano. Los *costos resultantes* son aquellos en los que se incurre como consecuencia del uso del modelo y ellos incluyen costos relacionados con el inventario tales como los costos por mantener, por faltantes y por ordenar. Gráficamente, la relación entre los costos controlables, resultantes y totales, se muestra en la siguiente gráfica



1.11. Modelación del comportamiento del suministro y la demanda

La actividad más importante en el desarrollo de un adecuado modelo de control de inventario es describir las consecuencias físicas de tomar una decisión de control. El control principal sobre un inventario incluye una actividad de suministro, de modo que los términos *control* y *suministro*, se relacionan estrechamente. La diferencia es que el suministro ocurre como resultado de una decisión de control. De ahí que, en lo sucesivo se considerará una *decisión de ordenar*, como sinónimo de una *decisión de control*.

Para modelar el comportamiento del suministro es necesario relacional el suministro actual con la decisión de ordenar. Las dos cantidades generalmente difieren en magnitud y/o tiempo de realización. La mayoría de los modelos de inventario, asumen que la cantidad suministrada es igual a la ordenada. El tiempo de suministro o abasto generalmente tiene retraso con relación al tiempo de colocación de una orden o pedido, por dos razones, por la colocación de una orden y por la rapidez en que se realiza el suministro. Respecto a la primera razón, una orden o pedido se hace después de varias actividades se ejecutan, como hacer papeleo, tener los materiales a la mano, transportar materiales, entre otros. Todos los retrasos asociados a las actividades anteriores, se consideran juntos en una variable denominada tiempo de retraso, en el suministro de una orden, (L). Esta variable puede tratársele como constante o aleatoria o bién, ignorarse. Si el tiempo de retraso es apreciable, el tiempo para tomar la decisión de ordenar, puede considerarse como una decisión, dependiendo cuándo la orden de suministro solicitado debería llegar, en lugar de cuándo debería colocarse una orden. Esta convención no es del todo satisfactoria en los casos en que la demanda tiene una gran variabilidad aleatoria.

La segunda razón del porqué el sumistro no coincide, en tiempo, con una decisión de ordenar es que la rapidez del suministro es finita. Como el caso, en que la orden es una orden de producción en lugar de una orden de compra. De nuevo, los tiempos de retraso, entre la colocación de la orden de producción y el inicio de la producción, usualmente se ignoran, a pesar de que se pueden incluir en el modelo.

Mientras que el suministro se suele modelar como cantidades conocidas, es decir, con certidumbre y con base en la cantidad a ordenar, la demanda frecuentemente no se le trata de esa manera. En la siguiente sección, se aborda el tratamiento de la demanda como una cantidad conocida, esto es con certidumbre. Por ejemplo, la materia prima o los insumos que se requieren para las actividades de manufactura, tienen demanda conocida en la medida en que se conoce la calendarización de la producción. Aún en esta situación, hay que tener en cuenta la variación que podría deberse a diversos acontecimientos como problemas de calidad, tolerancia para los desechos y cambios en la ingeniería. El grado de predicción es el que determina las decisiones de modelación para manejar demandas futuras como conocidas o no. El grado de predicción no se pretende que sea una cantidad definida precisamente. En los casos en que se usan y monitorean, pronósticos de la demanda, un grado alto de predicción correponde a un bajo grado de error en el pronóstico y viceversa. Es importante dejar claro que la característica de no predicción o incertidumbre no es sinónimo de variabilidad. La demanda puede mostrar una gran variabilidad, sin embargo ser predecible, como en el caso de la demanda de la renovación de placas de circulación. Es la variación aleatoria en la demanda la que causa que las demandas futuras sean impredecibles.

De lo anterior, las demandas para periodos futuros, se consideren cantidades conocidas o variables aleatorias. Puesto que la demanda usualmente es la única cantidad, tratada como una variable aleatoria en un modelo de decisión para ordenar, o los posibles tiempos de retraso, los modelos de inventario correspondientes, se le denominan determinísticos si la demanda se le trata como conocida y probabilístico o estocástico si la demanda se modela como una variable aleatoria.

En un modelo determinista, la demanda puede considerarse constante o variable. En el caso variable, la demanda puede variar continuamente, en cada punto del tiempo considerado, o bien como variable periódicamente. En este último caso, el horizonte de estudio se divide en intervalos de tiempo, llamados periodos. Si la demanda se considera constante, la distinción entre la tasa de la demanda y la demanda por períodos, se reduce a una diferencia entre las unidades de tiempo consideradas. Obviamente, no hay diferencia entre una demanda semanal de diez unidades y una de 20 unidades por dos semanas.

En los modelos estocásticos, se prefiere el enfoque periódico para expresar la demanda, sobre el enfoque continuo de la tasa de la demanda. Lo anterior se debe a que conceptualmente es es mucho más directo, tratar la demanda por unidad fija de intervalo de tiempo o periodo, como una variable aleatoria en lugar de la tasa de la demanda Una tasa de demanda aleatoria con variación continua, puede generar cálculos de los niveles de inventario sumamente complejos. De ahí que en los modelos estocásticos de inventarios, se asigna a la demanda por periodos, una distribución de probabilidad, como una normal o una uniforme, por la disponibilidad de sus valores.

2. Modelos determinísticos con un artículo

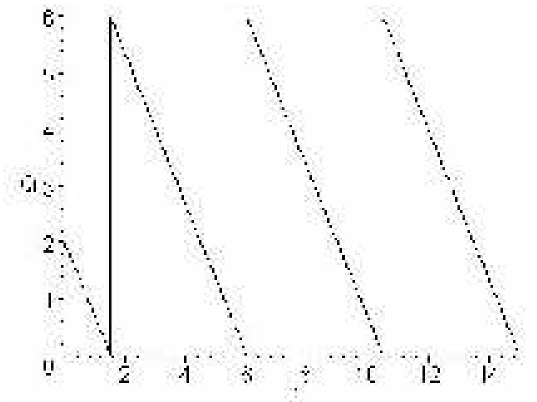
Una decisión para ordenar cierta cantidad de un artículo, toma en cuenta políticas preestablecidas, por ejemplo que la cantidad a ordenar es de 20 unidades, y que la orden se hará o colocará, cuando el nivel del inventario llegue a 5 unidades. Entonces, si una medición u observación de ese inventario, produce una información de 10 unidades, en un momento determinado, no se hará una orden. Este tipo y otros de políticas de control de inventarios, suelen permanecer invariantes en períodos determinados y las decisiones de ordenar suelen cambiar conforme cambia el nivel del inventario, requerido.

Es importante subrayar las siguientes convenciones:

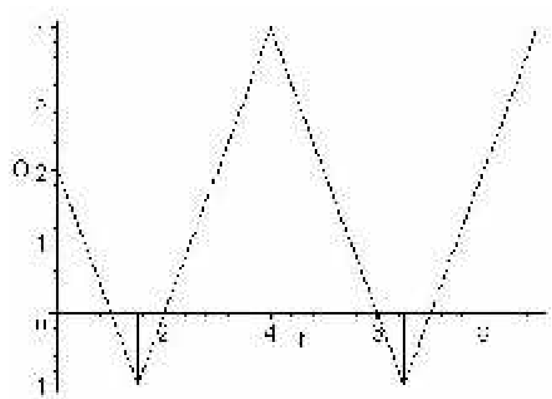
1. El gasto del inventario se muestra usualmente como si ocurriera continuamente. De ahí que, los retiros del inventario se suavizan, es decir, se convierte a una tasa de retiro. y las unidades del inventaro se consideran divisibles tanto como sea necesario.

2. El inventario disponible se representa por una línea sólida, el inventario ordenado con una línea punteada. La cantidad ordenada es la distania vertical entre la línea sólida y la punteada.

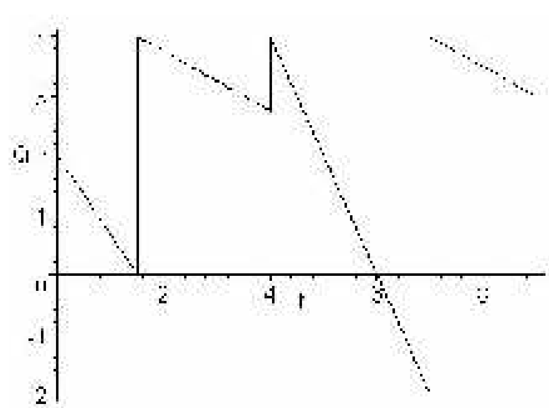
A continuación se resumen varios modelos de inventario, de manera gráfica, en el eje horizontal se registra el tiempo y en el vertical, el nivel del inventario.



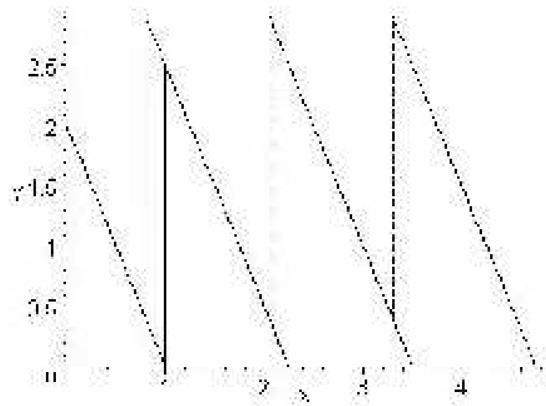
Demanda constante, sin faltantes, entrega inmediata



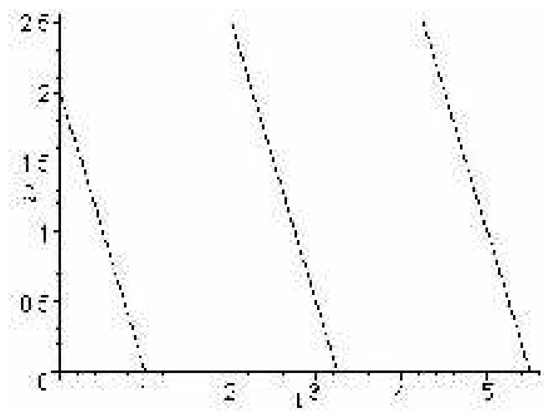
Reabastecimiento gradual, con faltantes planeados y acumulaciαn de pedidos



Demanda variable, entrega inmediata



Con tiempos de retraso en el suministro



Con ventas perdidas, sin acumulacian de pedidos

Los modelos deterministas también se pueden clasificar de acuerdo a la tasa de producción y a los supuestos sobre faltantes, como sigue

Modelo	Tasa de producción	Costo por faltante
I	Finita	Finito
II	Finita	Infinito
III	Infinita	Finito
IV	Infinita	Infinito

2.1. Modelo con entrega inmediata, sin faltantes y costos de adquisición fijos

El propósito del modelo de lote económico EOQ, es elegir la cantidad a ordinar que sea más económica. Bajo los supuestos de entrega inmediata, sin faltantes y costos de adquisición fijos, la única variable es la cantidad a ordenar Q, el número de unidades ordenadas o pedidas, ya sea por medio de compra o producción, que abastece al inventario cuando se debe de reabastecer. Así, cuando el inventario llega a 0 y se reabastece inmediatamente, el nivel del inventario salta de 0 a Q.

Con una tasa de demanda constante, el nivel del inventario diminuye con el paso del tiempo, a esa tasa hasta que el nivel llegue a 0 y de nuevo se reabastece.

Entonces el objetivo es seleccionar Q de modo que se *minimice* el

$$CTV = \text{costo total variable}$$

En este costo se excluye el costo del producto, porque éste es un costo fijo. Tampoco incluye costos por faltantes, puesto que no se permiten faltantes. De ahí que

$$CTV = \text{costo inicial anual + costo por mantener anual}$$

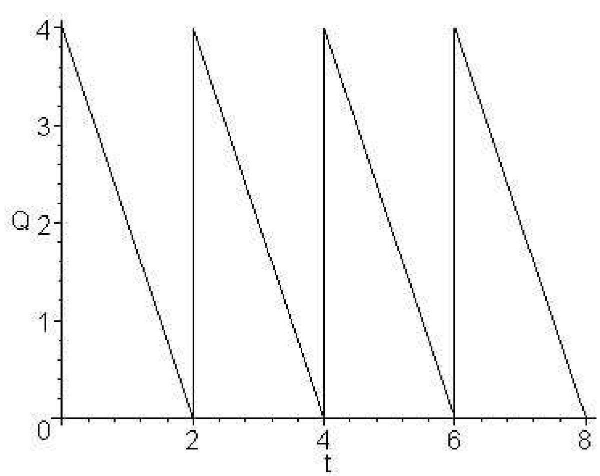
donde

$$\begin{aligned} \text{costo inicial anual} &= K \times \text{número de inicios o preparaciones anuales} \\ \text{costo por mantener anual} &= h \times \text{nivel promedio del inventario} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K &= \text{costo inicial cada vez que ocurre un pedido} \\ h &= \text{costo unitario por mantener el inventario} \end{aligned}$$

El patrón de niveles de inventario a través del tiempo, supuesto para el modelo básico del EOQ, con Q la variable de decisión es



Modelo EOQ basico

Por ejemplo, el número de inicios o colocaciones de pedidos, es 6 en un año, cada dos meses y que el nivel promedio del inventario es 2, entonces

$$CTV = 6K + 2h$$

Si se cambia la cantidad ordenada $Q = 4$, cambiará el CTV, por lo que que se desea encontrar el Q óptimo que minimice el CTV.

En general, el número de inicios o colocaciones de pedidos es

$$\text{Número de inicios por año}=\frac{\text{tasa de demanda anual}}{\text{cantidad a ordenar}} = \frac{D}{Q}$$

y el nivel promedio del inventario

$$\begin{aligned}\text{Nivel promedio del inventario} &= \frac{\text{nivel máximo + nivel mínimo}}{2}\\ &= \frac{Q+0}{2}\\ &= \frac{Q}{2}\end{aligned}$$

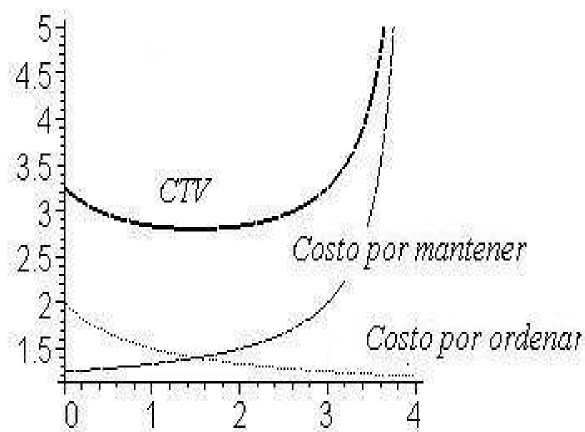
Por lo que, el costo total variable es

$$CTV = K\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2}$$

El lado derecho de la relación anterior expresa que el costo inicial anual y el costo por mantener anual varían con la cantidad Q a ordenar. El costo inicial disminuye conforme Q aumenta porque dicho costo es el producto de la constante KD y el factor variable $\frac{1}{Q}$.

En cambio, el costo por mantener anual aumenta proporcionalmente cuando Q aumenta, porque dicho costo es el producto de la constante $\frac{h}{2}$ y el factor variable Q.

La relación entre el costo total variable, el costo inicial anual y el costo por mantener anual, se muestra gráficamente como sigue



Para cada valor de Q, el valor en la curva del CTV es la suma de los valores de las dos curvas inferiores, así que el valor de Q que da el valor mínimo del CTV, es el punto donde los costos por ordenar y por mantener son iguales, esto es en el punto de intersección de ambas curvas, a este valor se le representa por Q^* y se determina expresando algebraicamente la relación de igualdad.

$$h\frac{Q}{2} = K\frac{D}{Q}$$

resolviendo para Q

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

donde

$$\begin{aligned} D &= \text{tasa de demanda anual} \\ K &= \text{costo inicial por ordenar} \\ h &= \text{costo unitario por mantener} \end{aligned}$$

esta es la fórmula de la raíz cuadrada para el cálculo del nivel óptimo del inventario.

También se obtiene Q^*, utilizando el criterio de la segunda derivada[5], el cual permite obtener el valor crítico que minimiza a la función CTV. Derivando al CTV, con respecto a Q

$$CTV' = -K\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

se encuentra el valor crítico de Q, resolviendo la ecuación

$$-K\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

es decir,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

La decisión de ordenar el $EOQ = Q^*$, produce el valor mínimo de los costos totales variables

$$CTV^* = K\frac{D}{Q^*} + h\frac{Q^*}{2}$$

donde

$$\begin{aligned} \text{costo inicial anual} &= K\frac{D}{Q^*} \text{ U.M.} \\ \text{costo por mantener anual} &= h\frac{Q^*}{2} \text{ U.M.} \\ \text{número de órdenes al año} &= \frac{D}{Q^*} \\ \text{periodo entre dos órdenes consecutivas} &= \frac{1}{\frac{D}{Q^*}} = \frac{Q^*}{D} \text{ (fracción de un año)} \end{aligned}$$

Ejemplo 5 *Considere una demanda de 60,000 unidades al año. La tasa de demanda mensual es de 5,000. La demanda anual se satisface con la acumulación de 5,000 unidades mensuales, durante doce meses. De ahí que se represente gráficamente la situación como sigue.*

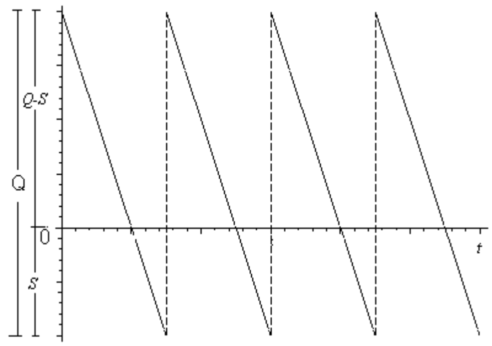
[5] La segunda derivada de la función CTV, respecto de Q,

$$K\frac{D}{Q^3}$$

siempre es positiva, por ello la función CTV es convexa y alcanza su mínimo local y global en Q^*.

2.2. Modelo con tiempo de entrega constante, faltantes convertidos en ventas pendientes y costos de adquisición fijos

El comportamiento del inventario bajo los supuestos de demanda constante conocida y entrega inmediata, y con la política de que se aceptan faltantes convertidos en ventas pendientes, gráficamente es



Los componentes del costo total variable son tres, los costos anuales por ordenar, los costos anuales por mantener y los costos anuales por faltantes.

$$\begin{aligned}
\text{costo anual por ordenar} &= K\frac{D}{Q} \\
\text{costo anual por mantener} &= h\left(\frac{Q-S}{2}\right)\left(\frac{Q-S}{Q}\right) = h \times \text{nivel promedio del inventario positivo} \times \text{fracción de tiempo respectivo} \\
\text{costo anual por faltante} &= p\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{S}{Q}\right) = p \times \text{nivel del faltante promedio} \times \text{fracción del tiempo cuando ocurre el faltante}
\end{aligned}$$

De ahí que, la función del costo total variable, depende de las variables Q y S.

$$CTV(Q,S) = K\frac{D}{Q} + h\frac{(Q-S)^2}{2Q} + p\frac{S^2}{2Q}$$

Obtenemos el óptimo de CTV, derivando parcialmente respecto a Q y a S.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial CTV}{\partial Q} &= -K\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}\frac{2(Q-S)Q-(Q-S)^2}{Q^2} - \frac{p}{2}\frac{S^2}{Q^2} = \frac{-2KD + hQ^2 - (h+p)S^2}{2Q^2} \\
\frac{\partial CTV}{\partial S} &= -h\frac{Q-S}{Q} + p\frac{S}{Q} = \frac{-h(Q-S)+pS}{Q} = \frac{-hQ+(h+p)S}{Q}
\end{aligned}$$

Igualando a cero cada los lados derechos de las expresiones anteriores y simplificando, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}
hQ^2 - (h+p)S^2 &= 2KD \\
-hQ + (h+p)S &= 0
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación, resolvemos para S,

$$S = \frac{h}{h+p}Q$$

Sustituimos S en la primera ecuación y resolvemos para Q

$$\begin{aligned} hQ^2 - (h+p)\left(\frac{h}{h+p}Q\right)^2 &= 2KD \\ hQ^2 - \frac{h^2Q^2}{h+p} &= 2KD \\ \left(h - \frac{h^2}{h+p}\right)Q^2 &= 2KD \\ \frac{hp}{h+p}Q^2 &= 2KD \\ Q^2 &= \frac{h+p}{hp}2KD \\ Q &= \sqrt{\frac{h+p}{p}}\sqrt{\frac{2KD}{h}} \end{aligned}$$

Los valores críticos

$$Q^* = \sqrt{\frac{h+p}{p}}\sqrt{\frac{2KD}{h}},\ S = \frac{h}{h+p}Q^*$$

son óptimos porque la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} \frac{2KD+(h+p)S^2}{Q^3} & -\frac{(h+p)S}{Q^2} \\ -\frac{(h+p)S}{Q^2} & \frac{h+p}{Q} \end{bmatrix}$$

es positiva definida, cuando $Q = Q^*$ y $S = S^*$.

El máximo nivel del inventario es

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{p}{h+p}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

2.3. Modelo con descuento por cantidad

Suponga que los costos totales de adquisición de las unidades de un pedido Q, consisten de costos fijos A y costos variables c_k, por categoría de descuento, entonces los costos totales de adquisición son

$$A + c_k Q$$

donde

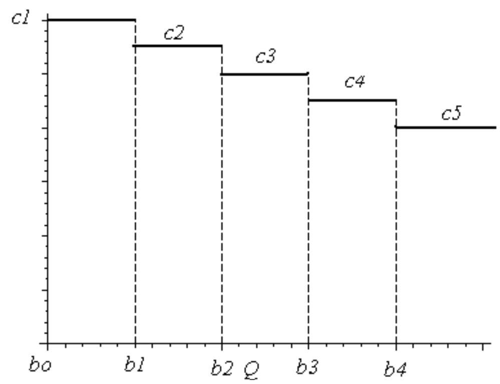
$$c_k < c_{k-1}$$

y

$$b_{k-1} \le Q < b_k$$

para $k = 1, \ldots, j$.

b_0 es la mínima cantidad que puede ordenarse y b_j, es la máxima cantidad a ordenar, la cual generalmente no es limitada. Una gráfica para la cantidad ordenada y los descuentos es la siguiente



Categorías de descuentos

El costo anual promedio en función de la cantidad a ordenar, para cada categoría es

$$CTV_k\left(Q\right) = c_k D + K\frac{D}{Q} + ic_k\frac{Q}{2}$$

para

$$b_{k-1} \leq Q < b_k$$

y

$$k = 1, \ldots, j$$

Minimizando a $CTV_k\left(Q\right)$, obtenemos

$$Q_k^* = \sqrt{\frac{2KD}{ic_k}}$$

No todos los óptimos (relativos) pertenecen a la k-ésima categoría, $\left[b_{k-1}, b_k\right]$, de ahí que la regla de decisión es

Si	Cantidad óptima a ordenar
$Q_k^* \leq b_{k-1}$	b_{k-1}
$b_{k-1} < Q_k^* < b_k$	Q_k^*
$b_k < Q_k^*$	b_k

El costo total anual promedio es

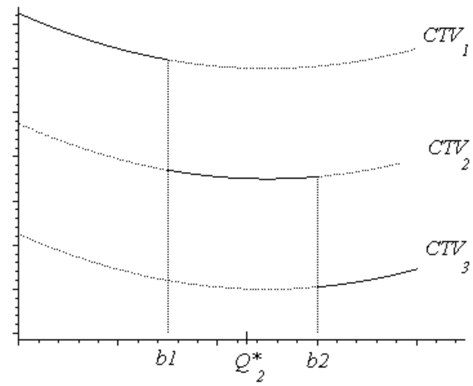
$$CTV\left(Q^*\right) = \min_k CTV_k\left(Q\right)$$

donde

$$Q^*$$

es el tamaño del lote óptimo global.

Ejemplo 6 *La gráfica de $CTV\left(Q\right)$, consiste de los segmentos de curvas sólidas, que corresponden a tres categorías de descuentos. Los puntos mínimos de la primera y tercera categoría, están en los extremos superior e inferior de la* *categoría, respectivamente. El CTV mínimo, para la segunda categoría, se encuentra en Q_2^*.*



Costos totales variables para tres categorías, cantidad óptima por ordenar para la segunda categoría Q_2^*

Ejemplo 7 *Un productor compra grandes cantidades de una pieza para un proceso de ensamblado. Quiere comprar un lote de tamaño constante y no quiere tener faltantes. Determine el tamaño óptimo del lote, conforme a la siguiente información.*

1. Demanda anual de 300,000 unidades
2. Costos por pedido de 80 U.M., del productor
3. Costos anuales por el interés, seguro e impuestos sobre la inversión por el promedio del inventario, de 20 % del valor promedio del inventario
4. Costos por mantener, 10 centavos por mes, con base en la cantidad promedio retenida
5. Precio del vendedor por venta registrada, de un cargo fijo de 20 U.M. por orden, más un cargo por unidad de acuerdo al tamaño del pedido, conforme a la siguiente tabla de precios

Tamaño del pedido	Costo unitario variable (U.M.)
$0 < Q < 10,000$	1,00
$10,000 \leq Q < 30,000$	0,98
$30,000 \leq Q < 50,000$	0,96
$50,000 \leq Q$	0,94

Para resolver el problema, obtenemos la función de costo total anual, tomando en cuenta que los costos fijos por pedido son de 100 U.M., la suma de los costos del productor y del cargo fijo del vendedor, y los costos por mantener de 1.20 U.M., por año por unidad, de inventario promedio.

Cuando

$$b_{k-1} \leq Q < b_k$$

el precio es c_k y el costo promedio anual es

$$CTV_k(Q) = (80 + 20)\frac{300,000}{Q} + (300,000)\, c_k + [(0{,}20)\, c_k + 1{,}20]\, \frac{Q}{2}$$

donde

$$k = 1, 2, 3, 4,$$

El Q óptimo en la categoría k es

$$
\begin{aligned}
Q_k^* &= \sqrt{\frac{2\,(100)\,(300,000)}{1{,}20+0{,}20c_k}} \\
&= 1,000\sqrt{\frac{60}{1{,}20+0{,}20c_k}}
\end{aligned}
$$

Substituyendo los datos por categoría se obtiene

c_k	Condición	Cantidad óptima a ordenar
1,00	$Q_1^* = 6546{,}536707 < b_1 = 10,000$	6, 547
0,98	$Q_2^* = 6555{,}908990 < b_1 = 10,000$	10, 000
0,96	$Q_3^* = 6565{,}321643 < b_2 = 30,000$	30, 000
0,94	$Q_4^* = 6574{,}774955 < b_3 = 50,000$	50, 000

Ahora, calculamos los costos para los lotes óptimos

Q_k^*	$CTV\left(Q_k^*\right)$ U.M.	
6, 547	309, 165,15	
10, 000	303, 980,00	mínimo
30, 000	309, 880,00	
50, 000	317, 300,00	

Por lo tanto, el lote óptimo es $Q^* = 10,000$ unidades.El tiempo promedio entre dos órdenes consecutivas es de

$$
\frac{Q^*}{D} = \frac{10,000}{30,000} = {,}0\overline{3} \text{ de año}
$$

es decir,

$$
8.\overline{3} \text{ días}
$$

2.4. Modelo con descuentos incrementales

El modelo con descuentos anterior se aplica el descuento a todas las unidades, porque el precio asociado con el intervalo se aplicó a todo el nivel del inventario Q, de unidades compradas. Otra situación se da cuando se tiene una tabla de descuentos que se aplican solo a las unidades que están en un determinado intervalo. Es decir, si $b_0 = 0$, las primeras b_1 unidades tienen un costo de c_1 U.M., cada una, las siguientes $(b_2 - b_1)$ unidades, un costo de c_2 cada una y así sucesivamente, con $c_1 > c_2 > \cdots > c_j$, este comportamiento con descuentos se denomina incremental.[6]

El costo total variable por adquisición de Q unidades, es

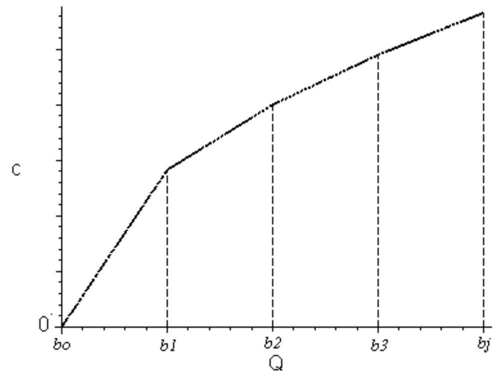
$$
\begin{aligned}
C\,(Q) &= \sum_{k=1}^{j-1} c_k\,(b_k - b_{k-1}) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right) \\
&= C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)
\end{aligned}
$$

donde

$$
b_{j-1} \leq Q < b_j
$$

[6]Hadley, G. and Whitin, T.M. (1963) Analysis of Inventory Systems. N.J.: Prentice-Hall. Citado en Johnson, L. and Montgomery, D. (1974) Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control. N.Y.: John Wiley and Sons, Inc., p. 42)

Gráficamente, el costo total variable, de adquisición, se comporta como



El costo total anual promedio es

$$CTV(Q) = CTV_j(Q)$$

si

$$b_{j-1} \leq Q < b_j$$

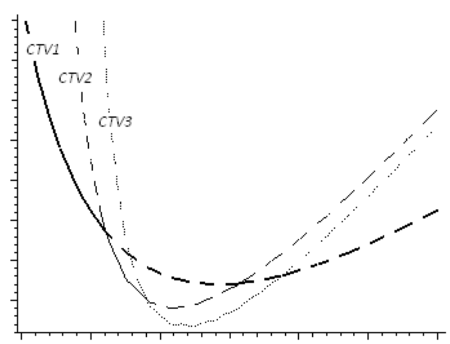
donde

$$\begin{aligned} CTV_j(Q) &= [A + C(Q)] \frac{D}{Q} + i \left[\frac{C(Q)}{Q} \right] \frac{Q}{2} \\ &= \left[A + C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right) \right] \frac{D}{Q} + \frac{i}{2} \left[C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right) \right] \end{aligned}$$

con A costos fijos e i la tasa de interés sobre el valor promedio del inventario.

La cantidad $\frac{C(Q)}{Q}$, representa el precio unitario promedio y se usa para encontrar el valor promedio del inventario. La relación anterior, asume que no hay faltantes y que es posible adquirir cualquier cantidad de unidades.

El costo total anual promedio se comporta como



Para encontrar el tamaño óptimo del lote a ordenar, se calcula para cada $k = 1, \ldots, j$

$$Q_k^0 = \sqrt{\frac{2D\left[A + C(b_{k-1}) + c_k b_{k-1}\right]}{ic_k}}$$

Si $b_{k-1} \leq Q_k^0 < b_k$, calcule $CTV_k\left(Q_k^0\right)$. Escoja el tamaño óptimo del lote Q^*, como Q_k^0 que produce el mínimo $CTV_k\left(Q_k^0\right)$.

Ejemplo 8 *Suponga que la lista de precios*

Tamaño del pedido	*Costo unitario variable (U.M.)*
$0 < Q < 10,000$	1,00
$10,000 \leq Q < 30,000$	0,98
$30,000 \leq Q < 50,000$	0,96
$50,000 \leq Q$	0,94

es una del tipo de descuentos incrementales. Con un costo unitario mensual, por mantener de 0.10 U.M. Entonces el costo total anual es CTV_j, cuando $b_{j-1} \leq Q < b_j$, donde

$$\begin{aligned} CTV_j(Q) &= \left[100 + C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)\right]\frac{300,000}{Q} + \\ &\quad \frac{0,20}{2}\left[C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)\right] + 1,20\frac{Q}{2} \end{aligned}$$

El último término, es el costo por almacenar, calculado sobre el inventario promedio. Para cada j, se obtiene

j	c_j	b_j	$C\left(b_j\right) = \sum_{k=1}^{j-1} c_k\left(b_k - b_{k-1}\right)$	$C(Q) = C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)$
1	1,00	10, 000	$C(b_1) = c_1(b_1 - b_0) = 10,000$	$0 + 1Q = Q$
2	0,98	30, 000	$C(b_2) = c_1(b_1 - b_0) + c_2(b_2 - b_1)$ $= 10,000 + 0,98(20,000) = 29,600$	$[0 + 1b_1] + 0,98[Q - b_1] = 200 + 0,98Q$
3	0,96	50, 00	$C(b_3) = \sum_{k=1}^{3} c_k(b_k - b_{k-1}) = 48,800$	$[200 + 0,98b_2] + 0,96[Q - b_2] = 800 + 0,96Q$
4	0,94	$-$	$-$	$[800 + 0,96b_3] + 0,94[Q - b_3] = 1800 + 0,94Q$

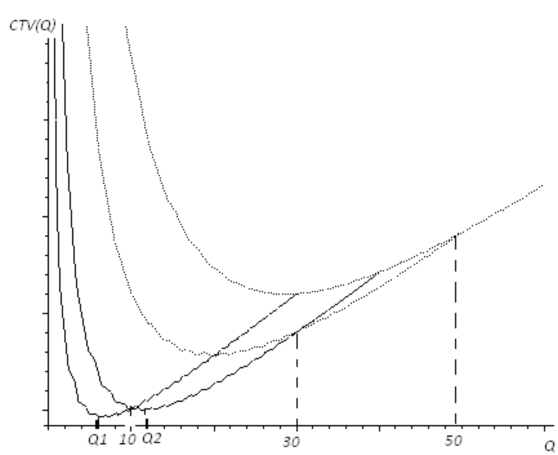
Usando los datos, obtenemos

$$CTV(Q) = \begin{cases} CTV_1(Q) = \frac{30(10^6)}{Q} + 300,000 + 0,70Q & si\ 0 < Q < 10,000 \\ CTV_2(Q) = \frac{90(10^6)}{Q} + 294,020 + 0,698Q & si\ 10,000 \leq Q < 30,000 \\ CTV_3(Q) = \frac{270(10^6)}{Q} + 288,080 + 0,696Q & si\ 30,000 \leq Q < 50,000 \\ CTV_4(Q) = \frac{570(10^6)}{Q} + 282,180 + 0,694Q & si\ 50,000 < Q \end{cases}$$

los óptimos[7] *de cada $CTV_j(Q)$, son*

$$\begin{aligned} Q_1^* &= 6,547 \\ Q_2^* &= 11,355 \\ Q_3^* &= 19,696 \\ Q_4^* &= 28,659 \end{aligned}$$

Las curvas $CTV_j(Q)$, para cada $j = 1, 2, 3, 4$ son



[7] Se obtienen los óptimos de las funciones CTV_j, para $j = 1, 2, 3, 4$, usando la derivada de cada función.

Los óptimos Q_3^* y Q_4^*, no pertenecen a la categoría donde los $CTV_3(Q)$ y $CTV_4(Q)$, se aplican, respectivamente, de ahí que no se les tome en cuenta para determinar el tamaño del lote óptimo. El lote óptimo se determina con Q_1^* y Q_2^*. Los costos anuales promedio, de esos lotes óptimos, son

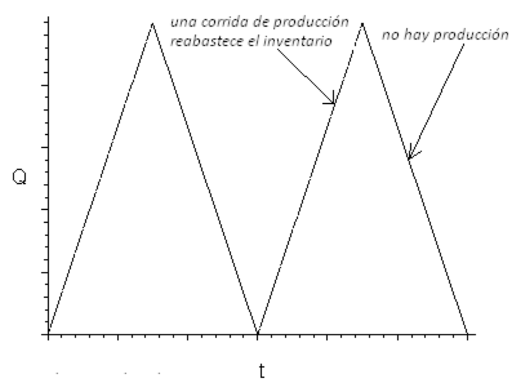
$$
\begin{aligned}
CTV_1(6,547) &= \frac{30\left(10^6\right)}{6,547}+300,000+0{,}70\,(6,547)=309,165{,}15\ (U.M.)\\
CTV_2(Q) &= \frac{90\left(10^6\right)}{11,355}+294,020+0{,}698\,(11,355)=309,871{,}81\ (U.M.)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el tamaño del lote óptimo es 6,547 *unidades. El número de órdenes es* 46*, el tiempo óptimo entre dos órdenes consecutivas es* 0,022 *de año, esto es, cada* 8 *días (año de* 365 *días).*

2.5. Modelo de inventario para producción

Una de las suposiciones del modelo básico EOQ es que la cantidad a ordenar que abastecerá al inventario se recibe toda en un momento dado, lo cual suele presentarse con minoristas o mayoristas. Sin embargo, una situación diferente se encuentra en la producción de artículos, cuando se reabastecen sus productos terminados y los inventarios de artículos intermedios se reabastecen gradualmente al completarse corridas intermintentes de producción interna. Suponiendo que una corrida de producción toma un periodo de tiempo significativo y que los artículos producidos se transfieren al inventario conforme son terminados, en lugar de que se transfieran todos juntos, al final de la corrida. El modelo EOQ con reabastecimiento gradual es adecuado para esta situación.

Este modelo supone que el patrón del nivel del inventario a lo largo del tiempo es como el de la figura siguiente



Cuando una corrida de producción está en ejecución, el inventario se reabastece gradualmente conforme a la tasa de producción R mientras que el inventario se reduce, conforme a la tasa de demanda D. Cuando el inventario llega a cero, se inicia otra corrida de producción, y así sucesivamente. En este contexto, la cantidad a ordenar Q, es el número de unidades a producirse durante la corrida, denominado tamaño del lote de producción. Los supuestos del modelo básico EOQ, se mantienen con excepción del reabastecimiento:

1. Demanda con tasa constante
2. Una corrida de producción se programa para que inicie cada vez que el nivel del inventario llega a cero, para reabastecer el inventario con una tasa constante a lo largo de la corrida
3. No se permiten faltantes planeados

Sea $R \geq D$, en caso contrario no se podría satisfacer la demanda, entonces en el instante $\frac{Q}{R}$ se habrán producido Q unidades. En este momento, la corrida de producción se completa y el inventario disminuye a una tasa de D, unidades por año hasta que el inventario es cero, lo que ocurre cuando el tiempo es $\frac{Q}{D}$. Suponiendo que los costos de producción son independientes del tamaño de la corrida, se quiere determinar el valor de Q que minimiza

$$CTV = \frac{\text{costo de preparación}}{\text{año}} + \frac{\text{costo por mantener}}{\text{año}}$$

El costo de preparación anual es

$$\left(\frac{\text{costo por pedido}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclo}}{\text{año}}\right)=\frac{KD}{Q}$$

Dado que la demanda ocurre a una tasa constante, el nivel del inventario promedio es un medio del nivel de inventario máximo, lo cual ocurre en el instante $\frac{Q}{R}$ y es $\frac{Q}{R}(R-D)$, entonces

$$\text{nivel del inventario promedio}=\frac{1}{2}\frac{Q}{R}(R-D)$$

y

$$\frac{\text{costo por mantener}}{\text{año}}=h\frac{(R-D)\,Q}{2R}$$

Por lo tanto,

$$CTV=\frac{KD}{Q}+h\frac{(R-D)\,Q}{2R}$$

y

$$\text{Tamaño óptimo de corrida}=\left(\frac{2KD}{\frac{h(R-D)}{R}}\right)^{1/2}=\left(\frac{2KDR}{h\,(R-D)}\right)^{1/2}$$

Se ejecutan $\frac{D}{Q}$ corridas al año para satisfacer la demanda anual de D unidades.

La expresión anterior se reformula usando la fórmula básica $EOQ=\left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}$, como

$$\text{Tamaño óptimo de corrida}=\left(\frac{R}{R-D}\right)^{1/2}EOQ$$

Lo que expresa que conforme se incrementa R, la producción ocurre a una tasa más rápida. De ahí que, para R grande, el modelo de tasa continua para el reabastecimiento, tiende a la situación de entrega inmediata del modelo EOQ, puesto que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{R-D}=1$$

es decir, que el tamaño óptimo de corrida de producción para el modelo de reabastecimiento continuo o gradual tiende a EOQ.

Ejemplo 9 *Una empresa produce 10,000 unidades para un proceso de producción. Cada una con un costo de 2,000 U.M. La planta de la empresa tiene la capacidad de producir 25,000 unidades por año. El costo de preparación de una corrida es de 200 U.M. El costo anual por mantener es de 25 centavos, por U.M. de inventario. Determine el tamaño óptimo de la corrida de producción ¿Cuántas corridas de producción se hacen al año?*[8]

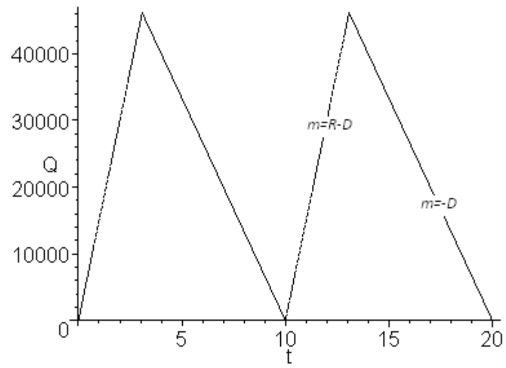
Solución 10 *Los datos relevantes son*

$$\begin{aligned}R &= 25,000 \textit{ unidades por año}\\ D &= 10,000 \textit{ unidades por año}\\ h &= 0{,}25\,(2,000)=500 \textit{ U.M./unidad/año}\\ K &= 200 \textit{ U.M. por corrida de producción}\end{aligned}$$

Suponiendo que una corrida de producción inicia en el tiempo 0*, la variación del inventario con respecto al tiempo*

[8]Tomado de Winston, W. L. (2005) Investigación de Operaciones. Aplicaciones y algoritmos. México: Thomson, 4a. edición, p. 867.

se describe con en la siguiente gráfica



Usando la expresión para el tamaño óptimo de corrida y los datos del ejemplo, se obtiene

$$\textit{Tamaño óptimo de corrida} = \left(\frac{2\,(200)\,(10,000)\,(25,000)}{500\,(25,000-10,000)}\right)^{1/2} = 115{,}4700539$$

Se harán

$$\frac{D}{Q} = \frac{10,000}{115{,}4700539} = 86{,}60254033 \textit{ corridas de producción cada año}$$

2.6. Modelo dinámico[9]

Cuando la demanda cambia conforme el tiempo transcurre, el problema de planeación del inventario asociado, se dice que es dinámico. Los casos anteriores se trataron de manera estática, bajo el supuesto de que la tasa de la demanda es constante y conocida. Ahora se analiza el problema de determinar el tamaño óptimo a ordenar, con demanda determinista y dinámica.

Sea T la duración del horizonte de planeación, finito, en el cual los lotes se agregan al inventario en tiempos arbitrarios durante ese periodo. Considérese una política de faltantes no permitidos. Cuando la tasa de la demanda en el tiempo t, $\delta(t)$, no es constante a lo largo del tiempo, ya no es óptimo tener todos los lotes del mismo tamaño, por lo que se introduce una nueva variable que contabiliza los lotes que ocurren en un periodo

$$n = \text{número de lotes suministrados durante el periodo } [0, T]$$

Los parámetros y variables relevantes son

$$\begin{aligned}
Q_j &= \text{tamaño del lote por agregarse al inventario en el tiempo } t_j \\
A &= \text{costo fijo asociado con el suministro de un lote} \\
c &= \text{costo unitario variable de adquisición} \\
h &= \text{costo unitario por mantener por unidad de tiempo} \\
D(t) &= \text{demanda acumulada en el intervalo } [0, t] \\
I(t) &= \text{nivel del inventario en el tiempo } t
\end{aligned}$$

El problema consiste en escoger n lotes de tamaños $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, los cuales se agregan al inventario, en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, respectivamente, para minimizar

$$CTV_n = nA + cD(t) + H_n$$

[9]Tomado de Johnson, D. and Montgomery, D. (1974) Operation Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control. New York: John Wiley & Sons, pp 71-74

donde

nA	total de costos fijos asociados al suministro
$cD(t)$	costo total variable por suministrar
H_n	costo total por mantener el inventario en el horizonte de planeación

Nótese que n es una variable de decisión, así como $\{t_j\}$ y $\{Q_j\}$, respecto a estas variables el término $cD(t)$, es constante, por lo que se omite de la discusión siguiente.

El nivel del inventario, en el tiempo t, está dado por la expresión

$$I(t) = I(0) + \sum_{i=1}^{j} Q_i - D(t)$$

donde

$$t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

para

$$j = 0, 1, \ldots, n$$

$$t_0 = 0 \text{ y } t_n = T$$

Con una política óptima se tendrá inventario cero en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, porque si consideramos el tiempo t_j, antes de que el lote se agregue al inventario, $I(t_j) > 0$ y el costo del inventario H_n, se podría reducir por

$$h(t_j - t_{j-1}) I(t_j)$$

disminuyendo el tamaño del lote, en el tiempo t_{j-1}, en $I(t_j)$ unidades.

Ningún otro costo, se verá afectado, de ahí que

$$I(t_j) = 0$$

para

$$j = 1, \ldots, n$$

bajo una política óptima. Usando este hecho junto con la restricción $I(t_j) \geq 0$, se tiene que

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \delta(t)\, dt = D(t_{j+1}) - D(t_j)$$

para todo

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$D(t_1) = I(t_0) = I(0)$$

de modo que

$$t_1 = D^{-1}(I(0))$$

El nivel del inventario en el instante t es

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - \int_{t_0}^{t} \delta(u)\, du & , 0 \leq t \leq t_1 \\ Q_j - \int_{t_j}^{t} \delta(u)\, du & , t_j \leq t \leq t_{j+1} \quad , j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

O, en términos de la función de demanda acumulada

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - D(t) & , 0 \leq t \leq t_1 \\ D(t_{j+1}) - D(t) & , t_j \leq t \leq t_{j+1} \quad , j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

El costo total por mantener el inventario es

$$H_n = h \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} I(t)\, dt$$

sustituyendo a $I(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} H_n &= h\int_0^{t_1}[I(0)-D(t)]\,dt + h\sum_{j=1}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[D\left(t_{j+1}\right)-D(t)\right]dt \\ &= h\left[t_1 I(0)-\int_0^{t_1}D(t)\,dt\right] + h\sum_{j=1}^{n}\left[D\left(t_{j+1}\right)\left(t_{j+1}-t_j\right)-\int_{t_j}^{t_{j+1}}D(t)\,dt\right] \\ &= h\left[t_1 I(0)+\sum_{j=1}^{n}\left(t_{j+1}-t_j\right)D\left(t_{j+1}\right)\right]-h\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}D(t)\,dt \end{aligned}$$

pero, $D(t_1)=I(0)$, de donde

$$H_n = h\sum_{j=0}^{n}\left(t_{j+1}-t_j\right)D\left(t_{j+1}\right)-h\int_0^T D(t)\,dt$$

Para un n dado, H_n se miminiza, seleccionando $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tales que se cumple el sistema (S)

$$\begin{aligned} D(t_1) &= I(0) \\ \frac{\partial H_n}{\partial t_j} &= 0 \\ D(t_{n+1}) &= D(T) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial H_n}{\partial t_j} = \left(t_j-t_{j-1}\right)\frac{\partial D\left(t_j\right)}{\partial t_j}+D\left(t_j\right)-D\left(t_{j+1}\right)$$

y

$$\frac{\partial D\left(t_j\right)}{\partial t_j} = \delta\left(t_j\right)$$

sustituyendo se tiene

$$\left(t_j-t_{j-1}\right)\delta\left(t_j\right)+D\left(t_j\right)-D\left(t_{j+1}\right)=0 \text{ para } j=2,3,\ldots,n$$

lo que implica que

$$D\left(t_{j+1}\right)=D\left(t_j\right)+\left(t_j-t_{j-1}\right)\delta\left(t_j\right)$$

con

$$j=2,3,\ldots,n$$

En síntesis, los siguientes tres pasos forman un método para completar la solución.

1. Para n dado, resolver para $\left\{t_j^*\right\}$, los valores de $\left\{t_j\right\}$ que satisfacen el sistema (S). Si $D(t)$ es una función simple de t y n es pequeño, el sistema puede resolverse directamente. En caso contrario, use la ecuación $D(t_1)=I(0)$, para encontrar t_1^*, entonces escoja el valor de t_2 y resuelva para $t_3, t_4, \ldots, t_n$, al satisfacer $n-2$ ecuaciones

   $$D\left(t_{j+1}\right)=D\left(t_j\right)+\left(t_j-t_{j-1}\right)\delta\left(t_j\right)$$

   La última relación dará probablemente, $D(t_{n+1})\neq D(t)$, así que intente diferentes valores para t_2, hasta que

   $$D(t_{n+1})=D(t)$$

   Evalúe CTV_n, para el conjunto $\left\{t_j^*\right\}$ y n, para obtener CTV_n^*.

2. Varíe n y repita el paso 1. Escoja la política que minimice CTV_n^*.

3. Determine los tamaños óptimos de los lotes, con la ecuación

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \delta(t)\, dt = D\left(t_{j+1}\right) - D\left(t_j\right)$$

usando $\left\{t_j^*\right\}$.

Ejemplo 11 *Durante el próximo año, la tasa de demanda para un producto, se espera que varie de acuerdo a la función*

$$\delta(t) = 1000 - 400t, 0 \leq t \leq 1$$

donde t se mide en años. Esto es

$$D(T) = D(1) = 1000$$

El precio de adquisición por artículo es 20 U.M., por unidad y el costo fijo de obtención es de 200 U.M., por orden. El costo unitario anual, por mantener en inventario, es de 20 por ciento sobre el costo de adquisición. No se permiten faltantes. El inventario inicial es 192 unidades. El inventario final debe ser cero. El problema es determinar cuándo y en qué cantidades, ordenar durante el próximo año[10].

Solución 12 *Analicemos tres situaciones:*

1. Suponga que, solamente una orden será colocada. Esto, debe hacerse cuando el inventario inicial se haya agotado. Como

$$D(t) = 1000t - 200t^2$$

los requerimientos acumulados, serán iguales a 192, en el tiempo

$$t_1 = 0{,}20$$

que es la solución de la ecuación

$$1000t - 200t^2 = 192$$

que satisface

$$0 < t_j < 1$$

Entonces, la cantidad a ordenar es

$$Q_1 = D(T) - I(0) = 800 - 192 = 608$$

unidades en ese momento. Para calcular el costo por mantener, sustituimos en la ecuación

$$H_n = h \sum_{j=0}^{n} (t_{j+1} - t_j) D(t_{j+1}) - h \int_{0}^{T} D(t) dt$$

los datos

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ t_0 &= 0 \\ t_1 &= 0{,}2 \\ t_2 &= 1 \\ h &= iC = 4 \\ D(t_1) &= 192 \\ D(t_2) &= 800 \end{aligned}$$

[10]Tomado de Jonhson y Montgomery (1974). Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control, p. 73

para obtener

$$\begin{aligned}
H_1 &= 4\sum_{j=0}^{1}(t_{j+1}-t_j)D(t_{j+1})-4\int_0^1\left(1000t-200t^2\right)dt \\
H_1 &= 4\left[(0{,}2-0)\,(192)+(1-0{,}2)\,(800)\right]-\frac{5200}{3} \\
H_1 &= 980{,}266667
\end{aligned}$$

El costo total variable correspondiente es

$$CTV_1^* = A + H_1 = 1180{,}266667 \text{ U.M}$$

2. Ahora, suponga que dos órdenes se van a colocar, es decir, $n = 2$. La primera en $t_1 = 0{,}20$. Hay que encontrar t_2, para el cual se satisfaga la ecuación

$$D(t_{j+1}) = D(t_j) + (t_j - t_{j-1})\delta(tj)$$

con $j = 2$. Esto es,

$$D(t_3) = D(t_2) + (t_2 - t_1)\delta(t_2)$$

Pero,

$$D(t_3) = D(T) = 800$$

Así se obtiene la ecuación

$$800 = 1000t_2 - 200{t_2}^2 + (t_2 - 0{,}20)(1000 - 400t_2)$$

Resolviendo la ecuación para t_2, y tomando en cuenta que

$$0 < t_2 < 1$$

obtenemos

$$t_2 = {,}576709895$$

Calculamos ahora los tamaños de los lotes

$$\begin{aligned}
Q_1 &= D({,}576709895) - D(0{,}200) = 510{,}1910344 - 192 = 318{,}1910345 \\
Q_2 &= D(1) - D({,}576709895) = 800 - 510{,}1910344 = 289{,}8089655
\end{aligned}$$

Comprobamos que la suma de los lotes es igual a la diferencia $800 - 192$.

$$318{,}1910345 + 289{,}8089655 = 608$$

Con los tiempos y lotes encontrados, calculamos el costo por mantener y el costo total, cuando se hacen dos órdenes.

$$\begin{aligned}
H_2 &= 4\sum_{j=0}^{2}(t_{j+1}-t_j)D(t_{j+1})-4\int_0^T D(t)dt \\
H_2 &= 4\left[(t_1-t_0)\,D\,(t_1)+(t_2-t_1)\,D\,(t_2)+(t_3-t_2)\,D\,(t_3)\right]-\frac{5200}{3} \\
H_2 &= 4\left[(0{,}2-0)\,(192)+({,}576709895-0{,}2)\,(510{,}1910344)+(1-{,}576709895)\,(800)\right]-\frac{5200}{3} \\
H_2 &= 543{,}571047 \text{ U.M.}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$CTV_2^* = 2A + H_2 = 943{,}571047 \text{ U.M.}$$

Comparamos los costos totales variables, con una y dos órdenes, recuérdese que $CTV_1^* = 1180$, de ahí que

$$CTV_2^* < CTV_1^*$$

Dado que el costo total variable con dos órdenes es menor que el costo total variable con una orden, la política óptima con dos órdenes es mejor que con una.

3. Ahora, suponga que tres órdenes se van a colocar, es decir, $n = 3$. La primera en $t_1 = 0{,}20$. Hay que encontrar los valores de t_2 y t_3, para los que se cumplan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} D(t_3) &= D(t_2) + (t_2 - 0{,}2)(1000 - 400t_2) \\ D(t_4) &= D(t_3) + (t_3 - t_2)(1000 - 400t_3) \equiv D(T) = 800 \end{aligned}$$

Sustituimos las expresiones para las demandas $D(t_2)$ y $D(t_3)$, con lo que se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 1000t_3 - 200t_3^2 &= 1000t_2 - 200t_2^2 + (t_2 - 0{,}2)(1000 - 400t_2) \\ 1000t_3 - 200t_3^2 + (t_3 - t_2)(1000 - 400t_3) &= 800 \end{aligned}$$

Cuya solución

$$t_2^* = {,}4475716412 \text{ y } t_3^* = {,}7122035760$$

satisface

$$0 < t_j < 1$$

para $j = 2, 3$. Calculamos los tamaños de los lotes para esos tiempos

$$\begin{aligned} Q_1 &= D({,}4475716412) - D(0{,}200) = 407{,}5075664 - 192 = 215{,}5075664 \\ Q_2 &= D({,}7122035760) - D({,}4475716412) = 610{,}7567893 - 407{,}5075664 = 203{,}2492229 \\ Q_3 &= D(1) - D({,}7122035760) = 800 - 610{,}7567893 = 189{,}2432107 \end{aligned}$$

Comprobamos que la suma de los lotes es $800 - 192$.

$$215{,}5075664 + 203{,}2492229 + 189{,}2432107 = 608$$

La política de tres órdenes da un costo por mantener de

$$\begin{aligned} H_3 &= 4\sum_{j=0}^{3}(t_{j+1} - t_j)D(t_{j+1}) - 4\int_0^T D(t)dt \\ H_3 &= 4\left[(t_1 - t_0)\,D(t_1) + (t_2 - t_1)\,D(t_2) + (t_3 - t_2)\,D(t_3) + (t_4 - t_3)\,D(t_4)\right] - \frac{5200}{3} \\ H_3 &= 4\left[(0{,}2 - 0)\,(192) + ({,}4475716412 - 0{,}2)\,(407{,}5075664) + ({,}7122035760 - {,}4475716412)\,(610{,}7567893)\right] \\ &\quad 4\left[(1 - {,}7122035760)\,800\right] - \frac{5200}{3} \\ H_3 &= 391{,}267495 \text{ U.M.} \end{aligned}$$

El costo total variable correspondiente es

$$\begin{aligned} CTV_3^* &= 3A + H_3 \\ CTV_3^* &= 991{,}267495 \text{ U.M.} \end{aligned}$$

Como

$$CTV_3^* > CTV_2^*$$

decidimos terminar el análisis y utilizar la política de doble lote.

3. Modelos estocásticos con un artículo[11]

Si se desconoce cuándo los clientes acuden a comprar algún nuevo artículo, se tiene una situación de incertidumbre respecto a la demanda de ese nuevo artículo o desde la perspectiva de las ventas , cuando estas fluctúan considerablemente, por ejemplo mes a mes, se tiene incertidumbre acerca de la demanda. Para estas situaciones, se requiere hacer alguna clase de pronósticos sobre la demanda esperada y la variabilidad que podría presentar. Por ejemplo, el enfoque

[11] Retomar la discusión, a partir de tercer párrafo de la página 16, Love

de tres estimaciones con PERT, la más probable, la optimista y la pesimista, da lugar a una distribución de probabilidad (beta), con la cual se analizan los costos involucrados en el inventario. Las probabilidades consideradas en una situación, podrían ser subjetivas, como sucede con las probabilidades *a priori*, y en ese caso, es pertinente usar la teoría de decisiones. Cuando las estimaciones se basan en datos empíricos históricos, se supone que es posible hacer una estimación de la distribución de probabilidad de la demanda en un periodo dado.

Una consecuencia importante de tener incertidumbre en la demanda es que se tiene un gran riesgo de incurrir en faltantes, a menos que se maneje cuidadosamente el inventario. Se necesita colocar una orden de reabastecimiento del inventario antes de agotarse, debido principalmente al retraso en el suministro. De hecho, el tiempo de retraso en el suministro puede ser incierto. Sin embargo, si se reabastece demasiado inventario demasiado pronto, un corto alto se paga debido al costo por mantener un inventario grande. Por ello, frecuentemente se busca el mejor intercambio o trueque entre las consecuencias de tener demasiado y escaso inventario.

El análisis de los inventarios con demanda desconocida, se suelen dividir de acuerdo al tipo de productos en cuestión, perecederos o no, es decir artículos estables. En el caso de los primeros, el inventario se mantiene durante periodos cortos; los segundos, son suceptibles de venderse de manera indefinida.

3.1. Modelo del vendedor de periódicos

Los periódicos o diarios, se consideran productos perecederos, porque su venta se reduce a un día, periodo de tiempo, después del cual se regresan a la editorial, o no tienen vigencia, como los productos lácteos.

El problema del vendedor de periódicos consiste en estimar diariamente el número de ejemplares de una publicación, para optimizar sus ganancias. Generalmente, el vendedor adquiere cada ejemplar a un costo fijo, lo vende a un precio fijo y consigue un reembolso por ejemplar no vendido. En el ejemplo siguiente, el vendedor asigna una distribución de probabilidad (probabilidades subjetivas) a las ventas, con base en su experiencia, en un periodo fijo. Este vendedor, vende

9 ejemplares el 30 % de los días
10 ejemplares el 40 % de los días
11 ejemplares el 30 % de los días

Una forma de abordar esta situación de decisión, sobre qué cantidad de ejemplares solicitar diariamente para maximizar las ganancias, es con la regla de decisión de Bayes. Se calculan los rendimientos en cada una de las situaciones, considerando la distribución empírica anterior, como se muestra en la siguiente tabla.

Ganancias	Estado de la naturaleza (solicitudes de compra)			Rendimiento	
Aternativas	9	10	11	esperado	
Ordenar 9	9	9	9	9	
Ordenar 10	8	10	10	9.4	mayor
Ordenar 11	7	9	11	9	
Probabilidades a priori	0.3	0.4	0.3		

El modelo del vendedor de periódicos es un modelo de inventario para un producto perecedero. Los supuestos que se hacen para este tipo de inventarios son los siguientes.

3.1.1. Modelo probabilístico de un solo periodo[12]

Suposiciones del modelo. En la aplicación del modelo se

1. Involucra sólo un producto perecedero.
2. Incluye sólo un periodo dado, el producto no puede venderse después.
3. Tiene la posibilidad de disponer del inventario final, con un valor de recuperación.
4. Toma la decisión sobre cuántas unidades (cantidad a ordenar) se solicitan al inicio, para formar parte del inventario.

[12] Winston, p. 888

5. Tiene incertidumbre en la demanda, de las unidades a retirar del inventario, para venderlas o con cualquier otro propósito. Pero, se conoce o estima la distribución de probabilidad de la demanda.
6. Incurre en un costo por subordenar, cuando la demanda excede la cantidad a ordenar, es decir, hay disminución de la ganancia que resulta por no ordenar una cantidad suficiente, que pudiera haberse vendido, en el periodo.

$$c_{abajo} = \text{costo unitario por subordenar (costo por unidad faltante)}$$

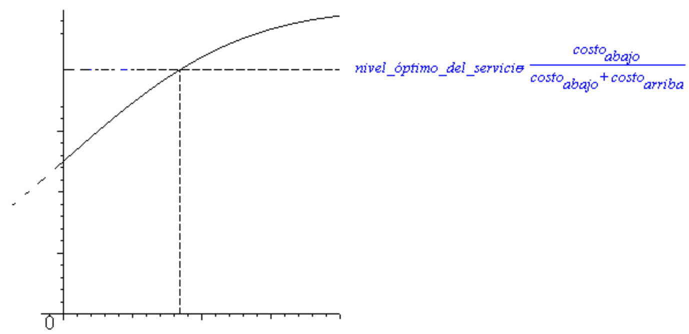
7. Incurre en un costo por sobreordenar, cuando la cantidad a ordenar excede a la demanda, hay disminución en la ganancia que resulta de ordenar una unidad, que no pudo venderse, durante el periodo.

$$c_{arriba} = \text{costo unitario por sobreordenar (costo por cada unidad excedente)}$$

Definición 13 *El nivel óptimo del servicio es la razón*

$$\frac{c_{abajo}}{c_{abajo} + c_{arriba}}$$

Gráficamente, el nivel óptimo de servicio se alcanza con una cantidad óptima del pedido.



Regla de pedidos para el modelo de productos perecederos

1. Calcular el nivel óptimo de servicio
2. Elegir la menor cantidad de pedido que proporciona al menos, ese nivel de servicio.

Aplicación del modelo de periodo único La función objetivo se expresa por lo regular como una ganancia esperada o un costo esperado, en términos de la variable de decisión q. Se determina el máximo o el mínimo de la manera clásica, si se trata de una función derivable cóncava o convexa.

Ejemplo 14 *Modelo de licitación. Una empresa constructora C, participa en una licitación de una obra importante, la cual costará, de principio a fin, 2 millones de U.M. Otra empresa contrincante D, presenta también una licitación para la misma obra. En la empresa C, se piensa que la licitación de la empresa D, se encuentra entre dos y cuatro millones de U.M. Si la empresa C quiere maximizar la ganancia esperada, ¿cuál debe ser el monto de su licitación?*

Solución 15 *Definimos las variables*

$$\begin{aligned} B &= \textit{variable aleatoria que representa la oferta de la empresa D} \\ b &= \textit{oferta actual de la empresa D} \end{aligned}$$

Sea f, la función de densidad para la variable aleatoria B, dada por

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2(10^6)} & si\ 2\left(10^6\right) \leq b \leq 4\left(10^6\right) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sea q la oferta de la empresa C. Se tienen tres casos:

1. Si $b > q$, la empresa C ofrece más que su contrincante D y obtiene una ganancia de

$$q - 2\left(10^6\right)$$

2. Si $b < q$, la contrincante ofrece más que la empresa C y ésta no gana nada.
3. El evento $b = q$, tiene una probabilidad casi nula de que ocurra y se puede ignorar.

Sea $E(q)$, la ganancia esperada de la empresa C, cuando oferta q, entonces

$$\begin{aligned}
E(q) &= \int_{2(10^6)}^{q} 0 \cdot f(b)\,db + \int_{q}^{4(10^6)} \left(q - 2\left(10^6\right)\right) f(b)\,db \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \int_{q}^{4(10^6)} \left(q - 2\left(10^6\right)\right) db \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \left(q - 2\left(10^6\right)\right) b\Big|_{q}^{4(10^6)} \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \left[4\left(10^6\right) - q\right]\left[q - 2\left(10^6\right)\right]
\end{aligned}$$

Encontramos el valor óptimo q^*, que maximiza el valor de $E(q)$, resolviendo

$$\begin{aligned}
E'(q) &= 0 \\
\frac{1}{2\left(10^6\right)} \left[\left[4\left(10^6\right) - q\right] - \left[q - 2\left(10^6\right)\right]\right] &= 0 \\
6\left(10^6\right) - 2q &= 0 \\
q^* &= 3\left(10^6\right)
\end{aligned}$$

y, observando que la función es cóncava, debido a que

$$E''(q) = -\frac{1}{10^6} < 0$$

Por tanto, la empresa C debe ofertar $3\left(10^6\right)$, con una ganancia esperada de

$$\begin{aligned}
E\left(q^*\right) &= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \int_{q^*}^{4(10^6)} \left(q^* - 2\left(10^6\right)\right) db \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \left[q^* - 2\left(10^6\right)\right] b\Big|_{q^*}^{4(10^6)} \\
&= 500,000 \text{ U.M.}
\end{aligned}$$

3.2. Modelo con faltantes convertidos en ventas pendientes

3.2.1. Modelo (r, q)

Es una modificación del modelo básico EOQ, que se usa cuando el plazo de entrega (demora en la entrega o tiempo de espera), no es cero y la demanda durante cada plazo de entrega es aleatoria. Se supone, además, que toda la demanda se puede acumular, que se hace revisión contínua, de tal modo que los pedidos se pueden hacer en cualquier momento.

El problema consiste en determinar a q y r, de tal manera, que se minimice el costo total anual esperado (sin incluir al costo por adquisición).

Los parámetros del modelo son

$$K = \text{costo por hacer un pedido}$$
$$h = \text{costo por almacenar/unidad/año}$$
$$L = \text{plazo de entrega de cada pedido (se supone conocido con certeza)}$$
$$q = \text{cantidad ordenada cada vez que se hace un pedido}$$

Las varibles del modelo son

D = variable aleatoria que representa la demanda anual (se supone continua), con media $E(D)$,varianza $var D$ y desviación estándar σ_D

c_B = costo generado por cada unidad faltante, que no depende de cuánto tome agotar existencias

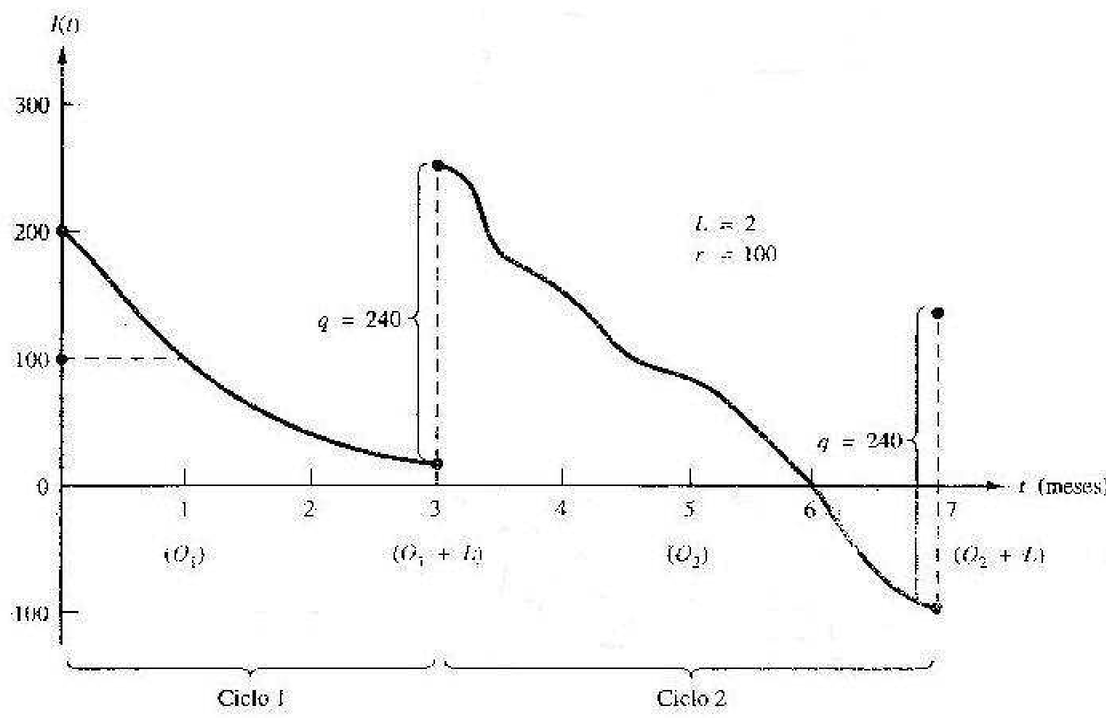
$ID(t)$ = inventario disponible (existencias) en el tiempo t

$B(t)$ = cantidad de pedidos pendientes en el tiempo t

$I(t)$ = nivel neto de existencias en el tiempo $t = ID(t) - B(t)$

r = nivel de existencias en el cual se hace el pedido (punto de reorden)

La evolución de un inventario respecto al tiempo en este modelo y el punto de reorden, se ilustra gráficamente en seguida.



Evolucion del inventario respecto al tiempo, en el modelo (q, r). Tomado de Winston (2005, p. 890)

De la gráfica se determinan los siguientes niveles del inventario disponible:

$$ID(0) = 200$$
$$ID(1) = 100$$
$$ID(3) = 10$$
$$ID(5) = 100$$
$$ID(6) = 0$$
$$ID(0) = 0$$

La cantidad de pedidos pendientes es

$$B(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } 0 \leq t \leq 6 \\ 100 & \text{cuando } t = 7 \end{cases}$$

De ahí que, algunos niveles de inventario netos son

$$\begin{aligned} I(0) &= 200 - 0 = 200 \\ I(3) &= 260 - 0 = 260 \\ I(6) &= 0 - 0 = 0 \\ I(7) &= 0 - 100 = -100 \end{aligned}$$

Introducimos además, la variable

$$X = \text{variable aleatoria continua que representa la demanda durante el plazo de entrega}$$

con función de densidad

$$f(x)$$

media, varianza y deviación estándar

$$\begin{aligned} E(X) &= L E(D) \\ var X &= L var D \\ \sigma_X &= \sigma_D \sqrt{L} \end{aligned}$$

bajo el supuesto de que las demandas, en puntos distintos del tiempo, son independientes. Si D es normalmente distribuida, entonces X también sigue una distribución normal.

Cuando la demora en la entrega L es una variable aleatoria, con media $E(L)$, vaianza $var L$ y desviación estándar σ_L y el plazo de entrega es independientes de la demanda por unidad de tiempo, durante el plazo de entrega, entoces se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} E(X) &= E(L) E(D) \\ var X &= E(L) var D + E(D)^2 var L \end{aligned}$$

Con relación a la gráfica anterior, describimos la evolución del inventario conforme al tiempo, como sigue. Un pedido $q = 240$ unidades llega justo en el tiempo 0 y que $L = 2$ meses. Los pedidos de tamaño q, se jacen en los tiempos $O_1 = 1$ y $O_2 = 5$ meses. Esos pedidos se reciben en los tiempos $O_1 + L = 3$ y $O_2 + L = 7$, respectivamente.

Un ciclo se define como el tiempo que transcurre entre la recepción consecutiva de dos pedidos. Así, un primer ciclo ocurre desde la llegada del pedido en el tiempo 0 y $O_1 + L = 3$. El segundo ciclo ocurre desde $O_1 + L = 3$ hasta $O_2 + L = 7$.

En el ciclo 1, la demanda durante el plazo de entrega es menor que r, el punto de reorden, de modo que no hay faltantes o déficit. Durante el ciclo 2, la demanda en el plazo de entrega excede a r, así que se agotan las existencias entre el tiempo 6 y el tiempo $7 = O_2 + L$. Es claro que, si se incrementa r es posible reducir el déficit de existencias. Pero, el aumento de r obliga a mantener un mayor inventario, por lo que aumenta el costo de mantenerlo. Por lo que, un valor óptimo de r tiene que representar algún tipo de transacción entre los costos por mantener los artículos y los costos generados por agotarse las existencias.

La situación en la cual toda la demanda debe satisfacerse a la larga y no perder venta alguna, es el caso de pedidos pendientes, para la cual se determina el punto de reabastecimiento r y la cantidad q que minimice el costo anual esperado.

Suponiendo que el costo de adquisición unitario es fijo, el costo anual esperado variable $CTV(q, r)$, que se genera, si cada pedido es por q unidades y se hace cuando el punto de reabastecimiento es r, se tiene un modelo de inventario (q, r), donde

$$\begin{aligned} CTV(q, r) &= \text{costo anual esperado por mantener } + \\ &\quad \text{costo anual esperado por ordenar } + \\ &\quad \text{costo anual esperado por déficit} \end{aligned}$$

Para determinar a q^* y r^*, suponemos que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en comparación con el nivel promedio de existencias disponibles. Esta suposición es razonable, la mayoría de las veces, porque la falta de existencias (si es que se presentan), por lo regular ocurren durante sólo una pequeña parte del ciclo.

Una variable intermedia es el inventario neto, definida como

$$I(t) = ID(t) - B(t)$$

donde $B(t)$, es la cantidad de pedidos pendientes en el tiempo t. Entonces,

$$\text{valor esperado de } I(t) = \text{valor esperado de } ID(t)$$

Así, una aproximación al costo anual esperado por mantener es

$$\begin{aligned}\text{costo anual esperado por mantener} &= h \times \text{valor del nivel de existencias disponibles} \\ &= hI(t)\end{aligned}$$

El valor esperado de $I(t)$, es igual al valor esperado en un ciclo. La tasa media a la cual se presenta la demanda es constante, de ahí que

$$\begin{aligned}\text{valor esperado de } I(t) \text{ en un ciclo} &= \frac{1}{2}\big[\text{valor esperado de } I(t) \text{ al principio del ciclo+} \\ &\quad \text{valor esperado de } I(t) \text{ al final del ciclo}\big]\end{aligned}$$

Esto es, la media aritmética de los valores de $I(t)$, al principio y final del ciclo.

Al final del ciclo, un instante antes de que llegue el pedido, el nivel de existencias es igual al nivel de existencias en el punto de reorden r menos la demanda X (en el plazo de entrega). Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$, al final del ciclo es $r - E(X)$.

Al principio del ciclo, el nivel de existencias al final del ciclo anterior aumenta con la recepción de una orden, de tamaño q. De donde, el valor esperado de $I(t)$ al principio del ciclo es igual a $r - E(X) + q$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{valor esperado de } I(t) \text{ en un ciclo} &= \frac{1}{2}\big[r - E(X) + r - E(X) + q\big] \\ &= \frac{q}{2} + r - E(X)\end{aligned}$$

Así, el costo anual esperado por mantener es aproximadamente

$$\text{costo anual esperado por mantener} = h\left[\frac{q}{2} + r - E(X)\right]$$

Ahora, para determinar el costo anual esperado por faltantes o pedidos pendientes, se define

$$\begin{aligned}B_r \;=\;& \text{variable aleatoria que representa el agotamiento de existencias o} \\ & \text{la acumulación de pedidos pendientes durante un ciclo, cuando el punto de reorden es } r\end{aligned}$$

entonces,

$$\text{costo anual esperado por faltantes} = \left[\frac{\text{costo esperado por faltante}}{\text{ciclo}}\right]\left[\frac{\text{ciclos esperados}}{\text{año}}\right]$$

pero

$$\frac{\text{costo esperado por faltante}}{\text{ciclo}} = c_B E(B_r)$$

y la demanda se cumple a la larga, un promedio de

$$\frac{E(D)}{q}$$

órdenes se hará cada año.

Entonces,

$$\text{costo anual esperado por faltantes} = \frac{c_B E\left(B_r\right) E\left(D\right)}{q}$$

Finalmente,

$$\text{costo anual esperado por ordenar} = K\left[\frac{\text{cantidad de órdenes esperada}}{\text{año}}\right] = \frac{K E\left(D\right)}{q}$$

El total de los costos anuales esperados por mantener, por déficit y por ordenar es

$$CTV\left(q, r\right) = h\left[\frac{q}{2} + r - E\left(X\right)\right] + \frac{c_B E\left(B_r\right) E\left(D\right)}{q} + \frac{K E\left(D\right)}{q}$$

Para optimizar, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial CTV\left(q, r\right)}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial CTV\left(q, r\right)}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo q^* y r^*.

En la mayor parte de los casos, el valor q^* que satisface el sistema anterior, está muy cercano a la EOQ.

$$\left(\frac{2K E\left(D\right)}{h}\right)^{1/2}$$

es decir $q^* \approx EOQ$.

3.2.2. Análisis marginal

Para determinar el punto de reabastecimiento o de reorden, r^*, que minimiza $CTV\left(q, r\right)$, dado un valor de q, el término

$$\frac{K E\left(D\right)}{q}$$

no es relevante, así que nos concentramos en los primeros sumandos, los costos anuales esperados por mantener y por déficit, para encontrar a r^*.

Si se incrementa el punto de reorden de r a $r + \triangle$, manteniendo a q fija, el costo anual esperado por mantener se incrementaría a

$$h\left[\frac{q}{2} + r + \triangle - E\left(X\right)\right] - h\left[\frac{q}{2} + r - E\left(X\right)\right] = h\triangle$$

Además, cuando $r \to r + \triangle$, los costos por déficit se reducen en $c_B\triangle$ durante la fracción $\Pr\left(X \geq r\right)$, de todos los ciclos. En promedio hay

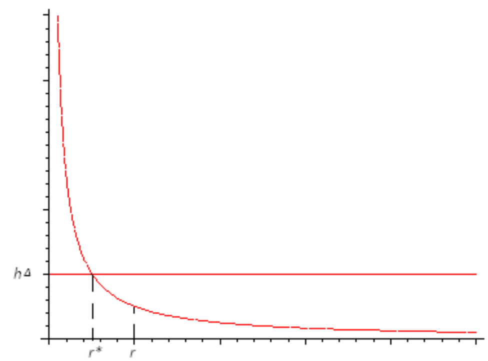
$$\frac{E\left(D\right)}{q}$$

ciclos al año, luego el costo anual esperado por déficit se reduce en

$$\frac{\triangle E\left(D\right) c_B \Pr\left(X \geq r\right)}{q}$$

Observe que, conforme r aumenta, $\Pr\left(X \geq r\right)$ disminuye, de modo que cuando r se incrementa, disminuye la reducción esperada en el costo anual esperado por déficit, que resulta de dar un incremento $\triangle$ al punto de reabastecimiento.

Gráficamente, el comportamiento anterior es



Aumento en el costo anual esperado, por
mantener, cuando $r \to r + \triangle$

Sea r^*, el valor de r para el cual el beneficio marginal es igual al costo marginal, es decir, cuando se cumple

$$\frac{\triangle E(D)\, c_B \Pr(X \geq r^*)}{q} = h\triangle$$

lo que implica

$$\Pr\left(X \geq r^*\right) = \frac{hq}{c_B E(D)}$$

Si

$$\frac{hq}{c_B E(D)} > 1$$

no hay solución y r se establece en el punto más bajo aceptable. Cuando $r^* < 0$, se procede igual.

De la gráfica, observamos que si

$$r < r^*$$

es decir, aumentamos de r a r^*, ahorramos más en el costo por déficit de lo que perdemos en el costo por mantener.

En cambio, si

$$r > r^*$$

se ahorra más en el costo por almacenamiento de lo que perdemos en el costo incrementado por el déficit.

Por tanto, r^*, es la transacción óptima entre el costo por déficit y el costo por almacenar. En resumen, si suponemos que la cantidad ordenada se puede aproximar por

$$EOQ = \left(\frac{2K E(D)}{h}\right)^{1/2}$$

entonces tenemos que el punto de reorden óptimo r^* y el tamaño óptimo de la orden q^*, en el caso de acumulación de pedidos, ventas pendientes, cumplen

$$\begin{aligned} q^* &= \left(\frac{2K E(D)}{h}\right)^{1/2} \\ \Pr\left(X \geq r^*\right) &= \frac{hq^*}{c_B E(D)} \end{aligned}$$

Ejemplo 16 *Una empresa que distribuye cajas con CD's, desea determinar*

1. la cantidad a ordenar
2. el punto de reorden

que minimice los costos anuales esperados por déficit, mantener y ordenar, y

3. el stock de seguridad
4. la probabilidad de que se agoten las existencias durante el plazo de entrega

Se supone que la demanda anual de esas cajas tiene una distribución normal con media $1,000$ *y desviación estándar* $40{,}8$. *En resumen, datos relevantes son los siguientes:*

$$\begin{aligned} E(D) &= 1,000 \\ L &= 2 \text{ semanas} = \frac{2}{52} \text{ de año} \\ K &= 50 \text{ U.M.} \\ h &= 10 \text{ U.M./caja/año} \\ c_B &= 20 \text{ U.M.} \end{aligned}$$

1. La estimación de q^* es
$$EOQ = \left(\frac{2\,(50)\,(1,000)}{10}\right)^{1/2} = 100$$

2. Para encontrar r^*, primero hay que determinar el valor esperado de X y la desviación de X.
$$\begin{aligned} E(X) &= LE(D) = \frac{1}{26}1,000 = 38{,}46 \\ \sigma_X &= \sigma_D\sqrt{L} = 40{,}8\sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{40{,}8}{\sqrt{26}} = 8 \end{aligned}$$
Entonces, de
$$\Pr\left(X \geq r^*\right) = \frac{hq^*}{c_B E(D)} = \frac{10\,(100)}{20\,(1,000)} = 0{,}05$$
encontramos
$$r = NORMINV\,(0{,}95, 38{,}46, 8) = 51{,}62$$

3. El stock de seguridad es
$$r - E(X) = 51{,}62 - 38{,}46 = 13{,}16$$
Pero, si el plazo de entrega es aleatorio, r y $r - E(X)$, se determinan como sigue.
Suponga que L, tiene una media de 2 semanas, $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ y desviación estándar de una semana, esto es $\frac{1}{52}$ de año. Entonces,
$$\begin{aligned} var X &= E(L)\,var D + E(D)^2\,var L \\ \sigma_X^2 &= \frac{1}{26}\,(40{,}8)^2 + (1,000)^2\left(\frac{1}{52}\right)^2 \\ &= 64{,}02 + 369{,}82 \\ &= 433{,}84 \end{aligned}$$
y
$$\sigma_X = \sqrt{433{,}84} = 20{,}83$$
De ahí que, el punto de reorden es
$$\begin{aligned} r &= E(X) + z_{\alpha/2}\sigma_X \\ &= 38{,}46 + 1{,}644853627\,(20{,}83) \\ &= 72{,}83 \end{aligned}$$
y el stock de seguridad
$$\begin{aligned} r - E(X) &= 72{,}83 - 38{,}46 = 1{,}644853627\,(20{,}83) \\ &= 34{,}37 \end{aligned}$$
bajo el supuesto de que la demanda en el plazo de entrega se distribuye normalmente. Nótese que, la variabilidad del plazo de entrega, da más del doble de stock de seguridad.

3.3. Modelo con faltantes convertidos en ventas perdidas

En este caso se supone que el agotamiento de existencias ocasiona pérdida de ventas y que se genera un costo de c_{LS} unidades monetarias (UM), por cada venta que se pierde, demás de las penalizaciones por la pérdida de clientes se incluye la pérdida de ganancias derivada de las ventas que se pierden. El inventario esperado en este caso, es igual al inventario esperado en el caso de pedidos inclumplidos más la cantidad esperada por faltante por ciclo. En el caso de ventas perdidas, durante cada ciclo, un promedio de pocos pedidos se surtirán del inventario, es decir, con lo cual se eleva el nivel promedio del inventario por una cantidad igual a los faltantes esperados por ciclo. La suposición de ventas perdidas genera una probabilidad de agotamiento de las existencias menor, un punto de reorden y un nivel de existencias de seguridad mayores que en el caso de acumulación de pedidos.

La cantidad óptima ordenar, se aproxima de manera apropiada mediante la EOQ y el punto de reorden, en el caso de ventas perdidas son

$$\begin{aligned} q^* &= \left(\frac{2KE(D)}{h}\right)^{1/2} \\ \Pr\left(X \geq r^*\right) &= \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(D)} \end{aligned}$$

Ejemplo 17 *Con relación al ejemplo anterior, suponemos que se vende cada caja de discos en 50 UM y que el precio de adquisición es de 30 UM. Bajo el supuesto de que el costo por faltante,de 20 UM, representa el costo por cliente que se pierde, c_{LS}, se obtiene sumando, además, la pérdida por la venta, esto es*

$$c_{LS} = 20 + 20 = 40$$

Si $E(D) = 1000$ cajas por año, $h = 10$ UM/caja/año, $K = 50$ UM y $EOQ = 100$ cajas, entonces

$$\begin{aligned} \Pr\left(X \geq r^*\right) &= \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(D)} \\ &= \frac{10(100)}{10(100) + 40(1000)} \\ &= 0{,}024 \end{aligned}$$

De donde

$$r^* = NORINV(0{,}976, 38{,}46, 8) = 54{,}28$$

con un stock de seguridad de

$$r^* - E(X) = 54{,}28 - 38{,}46 = 15{,}82$$

3.4. Método del nivel de servicio para determinar el nivel de existencias de seguridad

Debido a la dificultad para estimar el costo por faltante, el control de los faltantes suele hacerse usando un nivel de servicio específico.

Definición 18 *Medida 1 del nivel de servicio. La fracción esperada, expresada generalmente como porcentaje, de toda la demanda que se cumple a tiempo, se denota por*

$$SLM_1$$

Definición 19 *Medida 2 del nivel de servicio. El número esperado de ciclos al año durante los cuales se presenta déficit, se denota por*

$$SLM_2$$

Bajo el supuesto de que los faltantes se acumulan, a continuación se ilustra el uso de los dos niveles de servicio definidos.

Ejemplo 20 *Determine SLM_1 y SLM_2, cuando la demanda anual promedio es de 1,000 unidades, la EOQ es* 100 *para un punto de reorden de* 30 *unidades. La demanda durante el plazo de entrega es aleatoria, con la siguiente masa de probabilidad*

Demanda en el plazo de entrega	*Probabilidad*
20	$\frac{1}{5}$
30	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{1}{5}$
50	$\frac{1}{5}$
60	$\frac{1}{5}$

Solución 21 *De la distribución se tiene que la demanda esperada durante un plazo de entrega es*

$$\frac{1}{5}(20)+\frac{1}{5}(30)+\frac{1}{5}(40)+\frac{1}{5}(50)+\frac{1}{5}(60)=\frac{1}{5}(200)=40$$

Si el punto de reorden es de 30 unidades, se reabastecerá el inventario, cada ciclo, cuando el gasto llegue a ese punto. Si la demanda en el plazo de entrega, durante un ciclo, es de 20 o 30 unidades, no se presentará déficit. En las restantes situaciones habrá faltantes, esto es, 10, 20 *ó* 30 *unidades faltantes, de ahí que la cantidad esperada de unidades faltantes, por ciclo, es*

$$\frac{1}{5}(0+0+10+20+30)=\frac{60}{5}=12$$

El número promedio de pedidos, dado que la demanda se cumple a la larga y el $EOQ=100$, es

$$\frac{E(D)}{q}=\frac{1000}{100}=10$$

Entonces, el promedio de faltantes en el periodo es

$$12(10)=120$$

unidades. De donde,

$$1000-120=880$$

es la cantidad de unidades cumplidas a tiempo, cada año. Por lo que

$$SLM_1=\frac{880}{1000}=0{,}88$$

esto es, se cumple la demanda en un 88 %*. Aunque el punto de reorden es menor que la demanda media, de* 40 *unidades, durante el plazo de entrega, se obtuvo un nivel de servicio relativamente alto; como consecuencia de que el agotamiento de las existencias sólo se presenta durante el plazo de entrega, el cual cual es una parte pequeña de cada ciclo.*
Para determinar a SLM_2, con un punto de reorden de 30 *unidades, nótese que el agotamiento puede ocurrir en cualquier ciclo en el cual la demanda en el plazo de entrega exceda ese valor, de ahí que, la probabilidad de que se agoten las existencias durante un ciclo es*

$$P(X=40)+P(X=50)+P(X=60)=\frac{3}{5}$$

Como hay en promedio 10 ciclos por año, el número esperado de ciclos por año, en el que se tendrá déficit es

$$10\left(\frac{3}{5}\right)=6$$

Por lo tanto, un punto de reorden de 30 *unidades genera una $SLM_2=6$ agotamientos de existencias al año.*

El problema inverso, al planteado en el ejemplo anterior, trata de determinar el punto de reorden y el stock de seguridad para un nivel de servicio deseado.

3.5. Estrategia de revisión periódica (R, S)[13]

Definición 22 *Nivel de inventario en pedido es la suma del inventario disponible y del inventario pedido.*

3.5.1. Funcionamiento de la estrategia de inventario (R, S)

Cada R unidades de tiempo (años), se revisa el inventario disponible y se hace un pedido para llevar el nivel del inventario en pedido hasta S.

Ejemplo 23 *La estrategia* $(0{,}25, 100)$*, significa hacer una revisión del inventario al final de 0.25 años (al final de cada trimestre).Si la existencia fuera i* < 100*, entonces el tamaño del pedido será de* $100 - i$ *unidades.*

En general, una estrategia (R, S) generará costos más altos que la estrategia (r, q), que miminiza costos, pero una estrategia (R, S) es más fácil de administrar que una estrategia de revisión continua.
Con una estrategia (R, S) es posible determinar con certeza las veces qie se hace un pedido, permite también, coordinar el abastecimiento.

Ejemplo 24 *Revisar cada* $R = 1$ *mes, todos los productos de un mismo proveedor y luego pedir todos los productos de ese proveedor, el primer día de cada mes.*

Bajo los supuestos:

1. R se determinó, el valor de S que minimizará los costos anuales esperados, se calcula como sigue.
2. Los faltantes se acumulan
3. La demanda es una variable continua cuya distribución permanece sin cambio en el tiempo
4. El precio unitario de adquisición es constante
5. Los costos anuales de compra no dependen de la elección de R y S

Definimos las siguientes variables

R	:	tiempo en años, entre revisiones
D	:	demanda (aleatoria) durante un periodo (año)
$E(D)$	:	demanda media durante un periodo (año)
K	:	costo por hacer un pedido
J	:	costo por revisar el nivel de inventario
h	:	costo unitario anual por mantener en inventario
c_B	:	costo generado por cada unidad faltante, en el caso de acumulación de pedidos suponemos que es independiente del tiempo de entrega
L	:	plazo de entrega de cada pedido (suponemos conocido y constante)
D_{L+R}	:	demanda aleatoria durante el periodo $L + R$
$E(D_{L+R})$	:	media de D_{L+R}
$\sigma_{D_{L+R}}$	:	desviación estándar de D_{L+R}

Dado un valor de R, es posible determinar un valor de S que minimice los costos anuales esperados:

$$
\begin{aligned}
&\text{costos anuales esperados de compra} + \text{costos anuales de revisión} \\
&+\text{costos anuales por hace pedidos} + \text{costos anuales esperados por} \\
&\text{mantener una unidad} + \text{costos anuales esperados por faltantes}
\end{aligned}
$$

[13] Winston, p. 907

Dado que, el número de revisiones al año es

$$\frac{1}{R}$$

los costos anuales por revisión son

$$\frac{J}{R}$$

Si S es el nivel del inventario en pedido, $D_{L+R} = 0$, significa que no se hace pedido en el correspondientes punto de revisión.

Pero, D_{L+R} es una variable aleatoria continua, con $P\left(D_{L+R} = 0\right) = 0$. De ahí que, se hace un pedido en el próximo punto de revisión o en cualquier punto de revisión.

El costo anual por hacer pedidos es

$$\frac{K}{R}$$

Los dos costos anteriores, son independientes de S, de ahí que el valor de S que miminiza los costos anuales esperados será el valor de S que minimiza a la suma

$$(\text{costos anuales esperados por mantener}) + (\text{costos anuales esperados por faltantes})$$

Definición 25 *Un ciclo es el intervalo de tiempo entre llegadas consecutivas de dos pedidos.*

Cuando es posible determinar el valor esperado del nivel promedio del inventario en un ciclo, entonces el costo anual esperado por mantener una unidad de inventario es justamente

$$h \times (\text{valor esperado del nivel del inventario disponible en el ciclo})$$

Suponiendo que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en relación con el nivel promedio de inventario disponible, entonces

$$\text{valor esperado de } I\left(t\right) \simeq \text{valor esperado de } OHI\left(t\right)$$

donde $OHI\left(t\right)$ es el inventario disponible (existencias) en el tiempo t. Luego el valor esperado de $I\left(t\right)$ en un ciclo se aproxima mediante

$$\begin{gathered}0{,}5\,(\text{valor esperado de } I\left(t\right) \text{ justo antes de que llegue un pedido}) + \\ 0{,}5\,(\text{valor esperado de } I\left(t\right) \text{ justo después de la llegada del pedido})\end{gathered}$$

Justo antes de que llegue un pedido, el nivel del inventario máximo en pedido S se ha reducido por un promedio de $E\left(D_{L+R}\right)$. Por tanto, el valor esperado de $I\left(t\right)$ justo antes de que llegue el pedido es

$$S - E\left(D_{L+R}\right)$$

Como se hacen $\frac{1}{R}$ pedidos y se tiene que pedir cada año un promedio de $E\left(D\right)$ unidades, el tamaño promedio de un pedido es

$$\frac{E\left(D\right)}{R}$$

Así que, el valor esperado de $I\left(t\right)$ justo después de que llega un pedido es

$$S - E\left(D_{L+R}\right) + E\left(D\right)R$$

Por lo tanto,

$$\text{valor esperado de } I\left(t\right) \text{ en un ciclo} = S - E\left(D_{L+R}\right) + \frac{E\left(D\right)R}{2}$$

Luego,

$$\text{costo unitario\_anual, esperado, por mantener } = h\left[S - E\left(D_{L+R}\right) + \frac{E\left(D\right)R}{2}\right]$$

Usando la expresión anterior, se concluye que, al incrementar S hasta $S+\Delta$, los costos unitarios anuales esperados por mantener aumentarán en $h\Delta$.

Ahora, se analiza el modo como un incremento desde S hasta $S+\Delta$, afecta los costos anuales esperados por déficit o faltantes, es decir, se hace un análisis marginal para hallar el valor de S que minimiza la suma de los costos anuales esperados por mantener y por faltantes.

4. Modelos con varios artículos

4.1. Modelos con ordenación coordinada. Políticas de pedido de potencia de dos[14]

Suponga que una empresa ordena tres artículos o productos y las correspondientes EOQ, para cada artículo producen tiempos entre pedidos de 3,5, 5,6 y 9,2 días. Por lo que rara vez los pedidos para diferentes artículos llegarían en un mismo día. La sincronización o coordinación de los intervalos de reabastecimiento, de modo que se reciban en un mismo día, puede reducir los costos de coordinación. Por ejemplo, se necesitarían menos camiones para entregar los pedidos, si se logra sincronizar su llegada. Roundy[15] diseñó el método de Políticas de pedido de potencia dos, para asegurar que los pedidos para varios artículos esten bien sincronizados.

Sea

$$Q^* = EOQ$$

entonces el intervalo de reabastecimiento óptimo para un producto es

$$t^* = \frac{Q^*}{D}$$

por lo menos es de un día. Entonces para algún entero $m \geq 0$, se cumple

$$2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$$

Si

$$t^* \leq 2^{m+0,5} = \sqrt{2}2^m$$

se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^m.

Si

$$t^* \geq \sqrt{2}2^m$$

se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^{m+1}. Roundy demostró que el uso de este método para redondear el intervalo de reabastecimiento a una potencia cercana a 2, incrementa, el total de los costos, a lo más en 6 %.

La ventaja de una política de potencia de dos es que artículos diferentes frecuentemente llegan al mismo tiempo, con lo que generalmente se reducen los costos de coordinación.

Para los tiempos entre pedidos de 3.5, 5.6 y 9.2 días, la política de potencia de dos de Roundy, eligiría pedir las cantidades óptimas a periodos de reabastecimiento de 4, 4 y 8 días, ya que

$$\begin{aligned} 2 &\leq 3{,}5 \leq 2^2 \\ 2^2 &\leq 5{,}6 \leq 2^3 \\ 2^3 &\leq 9{,}2 \leq 2^4 \end{aligned}$$

Así, los artículos 1 y 2 llegarían siempre juntos, la mitad del tiempo el artículo 3 llegaría junto con el 2. En la mayoría de los casos, esta política reduciría los costos de coordinación por más del incremento máximo posible del 6 %, en el costo total. Este hecho se enuncia y demuestra en el siguiente teorema.

Recordatorio 26 *Recordemos que el costo total expresado como una función de la cantidad a ordenar q es*

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq}{2}$$

[14] Winston, p. 857-858

[15] Roundy, R. (1985) "98 % Effective Integer Rate Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems", Management Science, 1416-1430.

entonces, la proporción de este costo con el óptimo es

$$
\begin{aligned}
\frac{TC(q)}{TC(q^*)} &= \frac{\frac{KD}{q}+\frac{hq}{2}}{\sqrt{2KhD}} \\
&= \frac{1}{q}\sqrt{\frac{K^2D^2}{2KhD}}+\frac{q}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KhD}} \\
&= \frac{1}{2q}\sqrt{\frac{2KD}{h}}+\frac{q}{2}\sqrt{\frac{h}{2KD}} \\
&= \frac{q^*}{2q}+\frac{q}{2q^*} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{q^*}{q}+\frac{q}{q^*}\right)
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
t^* &= \frac{q^*}{D} \\
t &= \frac{q}{D}
\end{aligned}
$$

así que

$$\frac{TC(q)}{TC(q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{t}+\frac{t}{t^*}\right)$$

Teorema 27 *Si $t^* \leq 2^m\left(\sqrt{2}\right)$, entonces la política de pedidos de costo mínimo de potencia de dos es*

$$t = 2^m$$

Si $t^* \geq 2^m\left(\sqrt{2}\right)$, entonces la política de pedido de costo mínimo de potencia de dos es

$$2^{m+1}$$

En cualquier caso, el costo total de la política de pedidos óptima de potencia de dos nunca será más de 6% mayor que el costo total de la EOQ.

Proof. Puesto que

$$TC^{\text{“}}(q) = 2\frac{KD}{q^3}+\frac{1}{2} > 0$$

la función de costo total es convexa, de ahí que, el intervalo de tiempo de reabastecimiento óptimo de potencia de dos es 2^m o 2^{m+1}. Usando la expresión

$$\frac{TC(q)}{TC(q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{t}+\frac{t}{t^*}\right)$$

tenemos que, 2^m será el intervalo de tiempo de reabastecimiento ótimo de potencia de dos si y sólo si

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{2^m}+\frac{2^m}{t^*}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{2^{m+1}}+\frac{2^{m+1}}{t^*}\right)$$

Pero esta desigualdad se cumplirá, si y sólo si

$$\frac{t^*}{2^{m+1}} \leq \frac{2^m}{t^*}$$

o

$$t^* \leq \left(\sqrt{2}\right)2^m$$

En resumen, se ha demostrado que si $t^* \leq \left(\sqrt{2}\right) 2^m$, entonces la política de pedidos de potencia de dos de costo mínimo es establecer $t = 2^m$.

Similarmente, si $t^* \geq \left(\sqrt{2}\right) 2^m$, entonces la política de pedidos de potencia de dos de costo mínimo es establecer $t = 2^{m+1}$.

Este resultado muestra que la política de pedidos óptima de potencia de dos debe elegir un tiempo de reabastecimiento en el intervalo[16]

$$\left[\frac{t^*}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}t^*\right]$$

Para encontrar la discrepancia máxima entre el costo total para la política de pedidos de potencia de dos y el costo total para t^*, usamos la expresión

$$\frac{TC\,(q)}{TC\,(q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{t} + \frac{t}{t^*}\right)$$

cuando el intervalo de reabastecimiento de potencia de dos es $\frac{t^*}{\sqrt{2}}$ o $\sqrt{2}t^*$.

$$\frac{TC\left(\frac{t^*}{\sqrt{2}} \text{ o } \sqrt{2}t^*\right)}{TC\,(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2} \simeq 1{,}060660172$$

De donde, una política de potencia de dos no puede causar un incremento en el costo total de más del 6 %. ■

5. Bibliografía

Barbolla, R., Cerdá, E. y Sanz, P. (2001) Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía. Madrid: Prentice Hall.

Broeckelmann, R.G. (1999) Inventory Classification Innovation. The St. Lucie Press/APICS Series on Resource Management. Boca Raton/Virginia, USA.

Hillier, and Hillier, M. (2003) Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets. Boston: International Edition McGraw-Hill.

Jaber, M. ed. (2009) Inventory Management. Non-Classical Views. Boca Raton: CRC Press, Taylor and Francis Group.

Johnson, L. and Montgomery, D. (1979) Operation Research in Production Planning and Inventory Control. New York: John Wiley & Sons.

Kenett, Ron S. y Zacks, Shelemyahu (2000) Estadística Industrial Moderna. Diseño y control de la calidad y la confiabilidad. México: Thomson.

Love, S. (1979) Inventory Control. Boston: McGraw-Hill.

Muckstadt, J.A. and Sapra, A. (2010) Principles of Inventory Management. New York: Springer Series on Operations Research and Financial Engineering.

Murthy, D., Page, N. & Rodin, E. (1990) Mathematical Modelling. A tool for Problem Solving Engineering, Physical, Biological and Social Sciences. N.Y.: Pergamon Press.

Winston, W. L. (2005) Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos. México: Thomson, 4^a ed.

[16]Nótese que el extremo izquierdo del intervalo se obtiene de

$$\begin{aligned} t^* &\leq \left(\sqrt{2}\right) 2^m \\ \frac{t^*}{\sqrt{2}} &\leq 2^m \end{aligned}$$

El extremo derecho se calcula

$$\begin{aligned} t^* &\geq \left(\sqrt{2}\right) 2^m \\ 2t^* &\geq \left(\sqrt{2}\right) 2^{m+1} \\ \frac{2t^*}{\sqrt{2}} &\geq 2^{m+1} \\ \sqrt{2}t^* &\geq 2^{m+1} \end{aligned}$$

Índice

[17]Notas basadas principalmente en Love, S. (1979) *Inventory Control*. New York: McGraw-Hill Book Company.

[18]Adaptado del Apéndice, Capítulo 1, Bonini.

[19]Bonini, C.P., Asuman, W. H., y Bierman, H. Jr. Quantitative Analysis for Management. Chicago: McGraw Hill. IRWIN Series, 1997(9), capítulo 1.

[20]Tomados de Hillier, F., Hillier, M. and Lieberman, G. (2000) *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Boston: Irwin McGraw-Hill.

[21]Tomado de Johnson, D. and Montgomery, D. (1974) Operation Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control. New York: John Wiley & Sons, pp 71-74

[22]Retomar la discusión, a partir de tercer párrafo de la página 16, Love

[23]Winston, p. 888

[24]Winston, p. 907

[25]Winston, p. 857-858